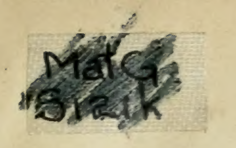


UNIVERSITY
OF
TORONTO
LIBRARY









Lehrbuch

der

Projektivischen (neueren) Geometrie

(Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage).

Zweiter Teil:

Harmonische Gebilde. Entstehung der Kegelschnitte. Sätze von Pascal und Brianchon.

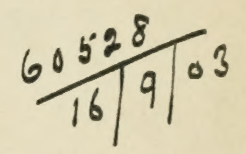
Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben.

Mit 445 Erklärungen und 135 in den Text gedruckten Figuren.

Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten

bearbeitet von

Prof. Dr. **J. Sachs.**



Stuttgart.
Verlag von Julius Maier.
1901.

QA
471
S22
T.2

Druck der Stuttgarter Vereins-Buchdruckerei.

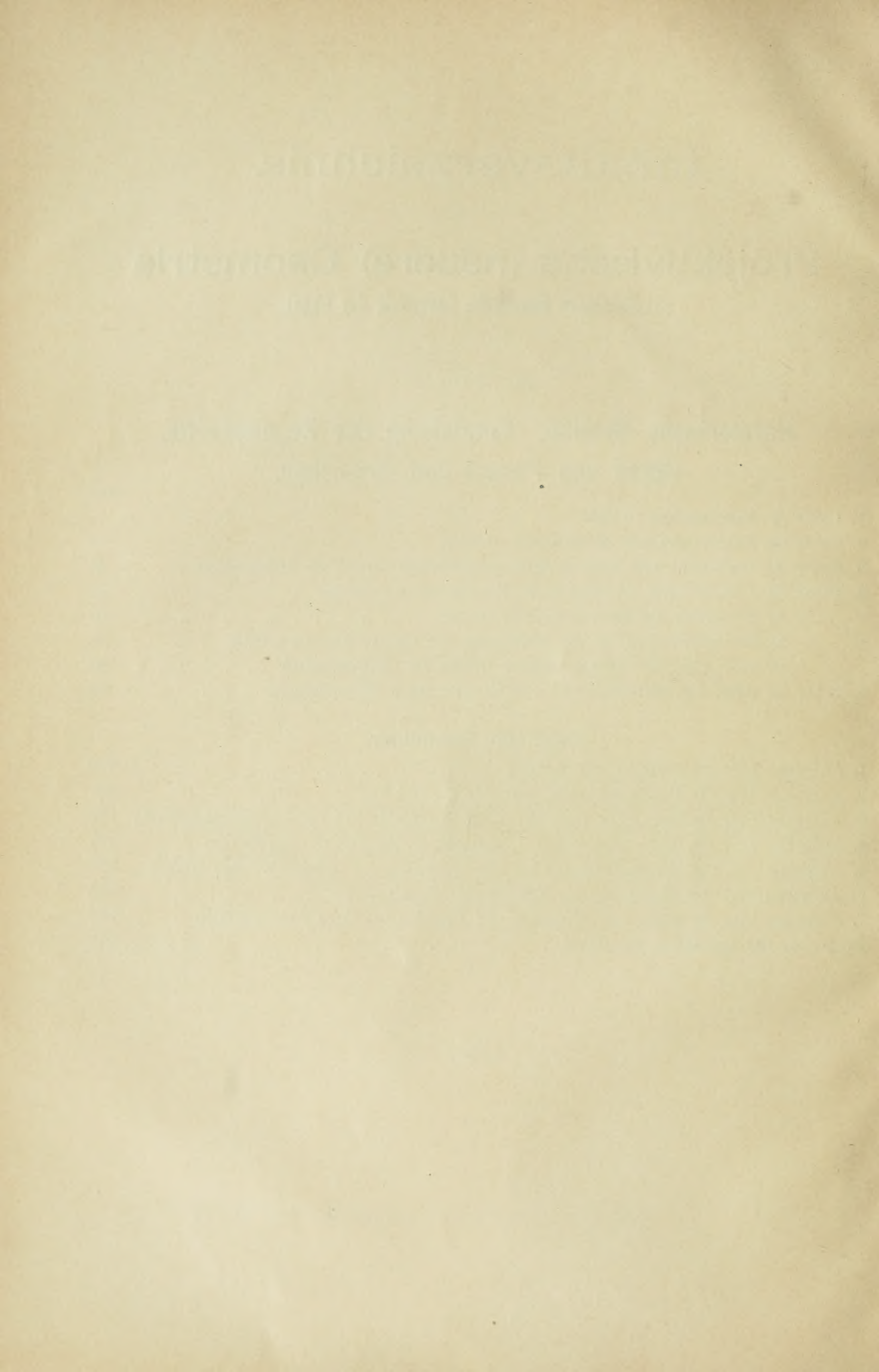
Inhaltsverzeichnis.

Projektivische (neuere) Geometrie
(Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage).

II. Teil.

Harmonische Gebilde. Entstehung der Kegelschnitte. Sätze von Pascal und Brianchon.

Aufgaben-Sammlung.



Projektivische (neuere) Geometrie

(Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage.)

II. Teil.

Harmonische Gebilde. Entstehung d. Kegelschnitte.

Sätze von Pascal und Brianchon.

I. Ueber die harmonischen Gebilde.

Frage 1. Was versteht man unter harmonischen Gebilden überhaupt?

Antwort. Unter harmonischen Gebilden versteht man in bestimmter Weise geordnete Gruppen von je vier Elementen (Punkten, Geraden, Ebenen) von einer solchen Art, dass zu einer ganz beliebig gewählten Anordnung der drei ersten Elemente auf Grund dieser Gruppierungsweise stets nur ein und dasselbe vierte Element zugeordnet ist.

Erkl. 1. Die Eindeutigkeit der Gruppierung in harmonischen Gebilden, d. h. die stets eindeutige Zuordnung des vierten Elementes zu den drei ersten Elementen in jeder Gruppe von vier harmonischen Elementen macht die harmonische Beziehung zu einer grundlegenden Thatsache für den gesamten Aufbau der projektivischen Geometrie überhaupt.

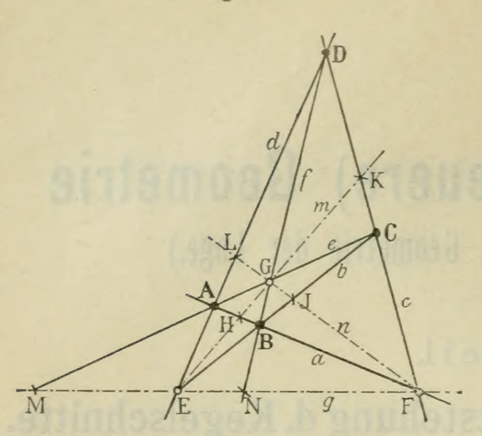
Frage 2. Was versteht man unter vier harmonischen Punkten?

Antwort. 1. Unter **vier harmonischen Punkten** versteht man vier Punkte einer Geraden, welche zu einem einfachen Viereck (oder Vierseit) solche Lage haben, dass durch den ersten und dritten je zwei Gegenseiten, durch den zweiten und vierten die beiden Diagonalen des Vierecks hindurchgehen.

2. Bezieht man die Ausdrucksweise derselben Aussage auf ein volllständiges Viereck, so bleiben die beiden ersten Paare von Gegenseiten als solche bestehen, und die Diagonalen werden zum letzten Paar derselben, so dass folgende Fassung entsteht:

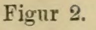
Erkl. 2. Ueber den Begriff der Gegenseiten des vollständigen Vierecks sehe man die Erkl. 184 im I. Teile dieses Lehrbuches. — Die völlig anders geartete Definition der harmonischen Punkte in der Planimetrie findet man im VI. Teil des Lehrbuches der Ebenen Elementar-Geometrie von Kleyer-Sachs. Weitere Behandlung der Masseigenschaften harmonischer Gebilde erfolgt im nächsten Abschnitte dieses Lehrbuches.

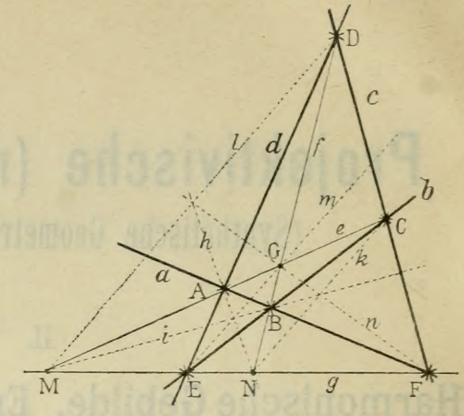
Figur 1.



Vollständiges Viereck.

●	4 Ecken: A, B, C, D.
———	6 Seiten: a, b, c, d, e, f.
○	3 Nebenecken: E, F, G.
—·—·—	3 Verbindungsgeraden dieser Nebenecken: g, m, n.
—·×·—	6 Schnittpunkte der Seiten mit letzteren: H, J, K, L, M, N (zu je 3 auf einer von 4 Geraden HJM, HLN, IKN, KLM).


Figur 2.



Vollständiges Vierseit.

———	4 Seiten: a, b, c, d.
✻	6 Ecken: A, B, C, D, E, F.
———	3 Nebenseiten: e, f, g.
•	3 Schnittpunkte dieser Nebenseiten: G, M, N.
······	6 Verbindungsgeraden der Ecken mit letzteren: h, i, k, l, m, n (zu je 3 durch einen von 4 Punkten him, hln, ikn, klm).

Erkl. 3. Bezieht man die erste Definition auf jedes der drei einfachen Vierecke $ABCD$ in Figur 3, so sind die vier harmonischen Punkte jedesmal $EHFK$, denn durch E, F gehen die Gegenseitenpaare AB und DC bezw. AD und BC (in Figur 3 I je beide verlängert, in Figur 3 II je eine verlängert, in Figur 3 III durch F beide selbst, durch E beide verlängert), durch H und K die Diagonalen AC und BD. Die zweite und dritte Definition sind umfassender als die erste, indem sie stets gleichzeitig für drei Gerade Geltung besitzen (vergl. Erkl. 4 und 5 auf folg. Seite). Dagegen besitzt die erste Definition auf Grund des einfachen Vierecks den Vorzug der Eindeutigkeit, indem sie in einem bestimmt gewählten Viereck nur auf eine einzige Gerade Beziehung hat. Dadurch eignet sie sich besonders zur genauen Unterscheidung der Zuordnung. Allerdings hat sie je nach der verschiedenen Lage der Viereckspunkte auch verschiedene Lagen der Geraden zum Viereck aufzuweisen (Figur 3): Nur beim gewöhnlichen einfachen Viereck (der Planimetrie) liegt die Gerade ausserhalb, beim Viereck mit einspringendem Winkel und beim überschlagenen Viereck geht die Gerade durch das Viereck hindurch.

Unter vier harmonischen Punkten versteht man vier Punkte einer Geraden, welche zu einem vollständigen Viereck solche Lage haben, dass durch den ersten und dritten je zwei Gegenseiten, durch den zweiten und vierten die beiden übrigen Gegenseiten des Vierecks hindurchgehen.

3. Nun ist aber das einfache Viereck identisch mit einem einfachen Vierseit. Und wenn man aus dessen vier Seiten ein vollständiges Vierseit bildet, so werden die zwei Diagonalen zu zwei Nebenseiten; und die Gerade, welche die vier Punkte enthält, wird zur dritten Nebenseite. Dadurch erhält man folgende Ausdrucksweise:

Unter vier harmonischen Punkten versteht man die auf jeder Nebenseite eines vollständigen Vierseits liegende Punktgruppe, welche gebildet wird aus den zwei Eckpunkten des Vierseits und den Schnitt-

punkten der beiden andern Nebenseiten mit der ersten Nebenseite.

Erkl. 4. Bezieht man die erste bezw. zweite Definition auf das einfache bezw. vollständige Viereck $ABCD$ der Figur 1 und 2, so sind vier harmonische Punkte:

1) $FNEM$ auf g, denn durch F gehen die Gegenseiten AB und CD,
durch E gehen die Gegenseiten BC und DA,
durch N und M geht je eine der (Diagonalen) Gegenseiten BD und AC;

2) $EHGK$ auf m, denn durch E gehen die Gegenseiten BC und DA,
durch G gehen die Gegenseiten BD und AC,
durch H und K geht je eine der Gegenseiten AB und CD;

3) $FJGL$ auf n, denn durch F gehen die Gegenseiten AB und CD,
durch G gehen die Gegenseiten BD und AC,
durch J und L geht je eine der Gegenseiten BC und DA.

Aber auch die vier in der Figur 1 und 2 auf jeder der sechs Seiten $abcdef$ auftretenden Punkte lassen sich nach derselben Definition als vier harmonische Punkte erkennen, indem man verschiedene Vierecke zu Grunde legt, nämlich:

1) $AHBF$ auf a durch das vollständige Viereck $EDGCE$
mit Gegenseitenpaaren ED, GC; DG, CE; EG und DC;

2) $CJBE$ auf b durch das vollständige Viereck $FDGAF$
mit Gegenseitenpaaren FD, GA; DG, AF; FG und DA;

3) $DKCF$ auf c durch das vollständige Viereck $EAGBE$
mit Gegenseitenpaaren EA, GB; AG, BE; EG und AB;

4) $DLAE$ auf d durch das vollständige Viereck $FCGBF$
mit Gegenseitenpaaren FC, GB; CG, BF; FG und CB;

5) $CGAM$ auf e durch das vollständige Viereck $DFBED$
mit Gegenseitenpaaren DF, BE; FB, ED; DB und FE;

6) $DGBN$ auf f durch das vollständige Viereck $EAFCE$
mit Gegenseitenpaaren EA, FC; AF, CE; CA und EF.

Erkl. 5. Bezieht man die dritte Definition auf das vollständige Vierseit $abcd$ der Figur 2 (bezw. 1), so sind vier harmonische Punkte:

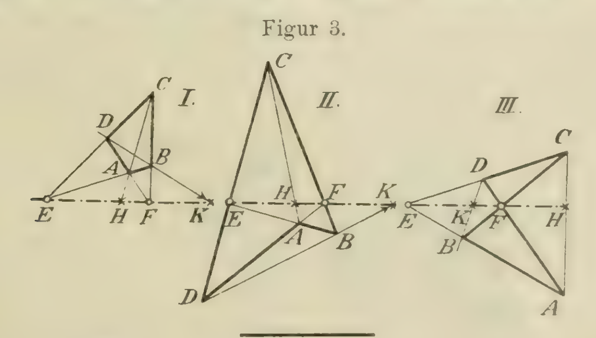
1) $FNEM$ auf g, denn F und E sind Ecken, N und M Schnittpunkte der Nebenseiten f und e;

2) $DGBN$ auf f, denn D und B sind Ecken, G und N Schnittpunkte der Nebenseiten e und g;

3) $CGAM$ auf e, denn C und A sind Ecken, G und M Schnittpunkte der Nebenseiten f und g.

Aber auch die in der Figur auf jeder der vier Geraden $abcd$ und jeder der sechs Geraden $hiklmn$ erscheinenden Punkte lassen sich nach derselben Definition als vier harmonische Punkte erkennen, indem man verschiedene Vierseite zu Grunde legt. Und zwar erhält man hier verschiedene Arten von Zuordnung, worüber noch später gehandelt wird.

Figur 3.



Frage 3. Welches ist die wichtigste Eigenschaft von vier harmonischen Punkten?

Antwort. Die wichtigste Eigenschaft von vier harmonischen Punkten ist die Eindeutigkeit ihrer Zu-

ordnung. Dieselbe lässt sich aussprechen in dem Satze:

Satz 1. Gehen durch zwei feste Punkte E, F einer Geraden je zwei Gegenseiten, und durch einen dritten Punkt H derselben Geraden die eine Diagonale irgend eines einfachen Vierecks, so geht die zweite Diagonale jedesmal durch denselben Punkt K der Geraden.

Oder in anderer Ausdrucksweise (fürs vollständige Viereck):

Satz 1a. Gehen durch zwei Punkte E, F einer Geraden je zwei Gegenseiten, durch einen dritten Punkt H derselben Geraden eine fünfte Seite eines vollständigen Vierecks, so geht dessen sechste Seite jedesmal durch denselben Punkt K der Geraden.

Oder endlich (fürs Vierseit):

Satz 1b. Haben zwei (oder mehrere) vollständige Vierseite eine gemeinsame Nebenseite und auf derselben gemeinsam zwei Eckpunkte E, F und den Schnittpunkt H mit einer der zwei andern Nebenseiten, so geht auch die dritte Nebenseite jedesmal durch denselben Punkt K der ersten Nebenseite.

Erkl. 6. Zur Veranschaulichung des nebenstehenden Satzes (dessen Beweis in der folgenden Antwort auf Frage 4 erfolgt) ist in Figur 4 die Zuordnung der Punkte E, F und H, K zunächst bewerkstelligt durch das Viereck:

$$A_0 B_0 C_0 D_0$$

und sodann ist auf dieselben vier Punkte angewendet (zum Teil unter Verwendung gemeinsamer Geraden) die Konstruktion mittels eines Vierecks:

$A_1 B_1 C_1 D_1$ nach Figur 3 I,

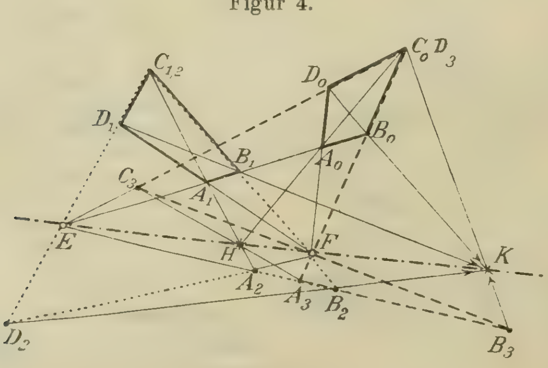
$A_2 B_2 C_2 D_2$ nach Figur 3 II,

$A_3 B_3 C_3 D_3$ nach Figur 3 III:

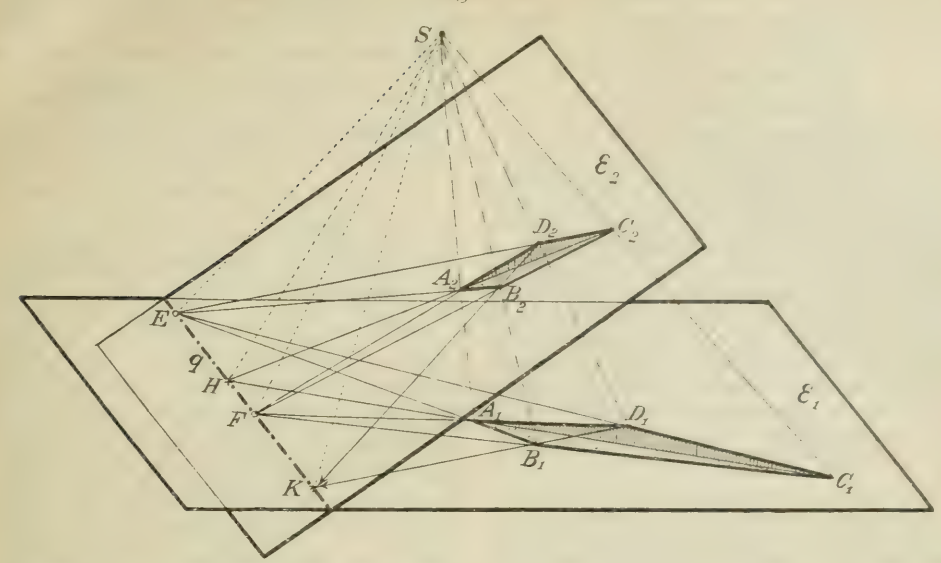
Und jedesmal geht die zweite Diagonale durch denselben Punkt K.

Erkl. 7. Wenn man bedenkt, dass zur Konstruktion des Vierecks bezw. Vierseits drei völlig willkürliche Elemente gewählt werden müssen, so ist die im nebenstehenden Satze ausgesprochene Eindeutigkeit des Ergebnisses als eine höchst merkwürdige zu betrachten. Man kann nämlich, wenn E, F, H gegeben sind, willkürlich wählen z. B. erstens EAB, zweitens HAC, drittens FBC, und trotz dieser dreifachen Willkür muss DB durch den bestimmten Punkt K gehen. Die als Ergebnis gefundene Merkwürdigkeit stellt sich damit als eine noch auffallendere dar, als z. B. die Fälle der Planimetrie, wo drei Gerade durch einen Punkt gehen — und entsprechend weittragender sind eben auch die Folgen.

Figur 4.



Figur 5.



Frage 4. Wie lässt sich die Eindeutigkeit der harmonischen Beziehung beweisen?

Erkl. 8. Da die Geraden EAB, FBC, HAC völlig willkürlich sind, so kann man sagen: die Vierecke, von denen die Gegenseiten durch E und F, eine Diagonale durch H geht, bilden eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit. Denn zu beliebig gewähltem EAB und FBC gibt es noch unendlich vielerlei HAC u. s. w. Für diese ∞^3 Vierecke stehen aber als zweite Diagonalen nur die ∞^2 Geraden der Ebene zur Verfügung, da ja auch stets unendlich (∞^1) viele dieser Vierecke dieselbe Diagonale HAC haben können. Für diese ∞^2 Diagonalen stehen dann als Schnittpunkte auf EF die ∞^1 Punkte dieser Geraden zur Verfügung, und es wird bewiesen, dass die gesuchte zweite Diagonale keine beliebige der ∞^2 Geraden der Ebene sein kann, sondern eine der ∞^1 Geraden des Strahlenbüschels durch K.

Erkl. 9. In Bezug auf die Reihenfolge der zu zeichnenden willkürlichen Geraden besteht mehrfache Auswahl: man kann entweder erst zwei Geraden von E und dazu eine von F oder eine von H ziehen; oder aber zuerst zwei Geraden von F und dazu eine von E oder eine von H; oder endlich je eine Gerade von E, von F und von H, welch letztere allerdings nicht durch denselben Punkt gehen dürfen. Hiernach entsteht folgende Gruppe von acht Fällen:

1) EAB, EDC, FBC;
2) EAB, EDC, FAD;
3) EAB, EDC, HAC;

Antwort. Der Beweis für die Richtigkeit der Sätze 1 lässt sich folgendermassen erbringen:

Beweis I.

Es seien durch die Punkte E, F, H, Fig. 5, willkürlich gelegt je die Geraden EAB, FBC, HAC der beiden einfachen Vierecke $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$; dann sind dadurch festgelegt die Punkte B, A und C der beiden Vierecke, also auch die Geraden EC und FA, und hierdurch der Punkt D; und es fragt sich, wo die durch D und B festgelegte zweite Diagonale des Vierecks jeweils die Gerade EF schneidet. Um diese Untersuchung durchzuführen, denke man sich die beiden Vierecke $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$, welche in derselben Zeichenebene konstruiert wurden, nunmehr in zwei getrennten (vorerst noch aufeinanderliegenden) Ebenen ε_1 und ε_2, welche um die Gerade EF drehbar wären. Und sodann dreht man die Ebenen um EF als Achse etwas auseinander und untersucht die projektivische Beziehung der jetzt in verschiedenen ebenen Systemen liegenden beiden Vierecke $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$. —

4) *FBC, FAD, EDC*;
5) *FBC, FAD, EAB*;
6) *FBC, FAD, HAC*;
7) *EAB, FBC, HAC*;
8) *EDC, FAB, HAC.*

Die drei übrigen Geraden der Figur sind dann durch diese drei willkürlichen festgelegt. Da aber die Reihenfolge der drei ausgewählten willkürlichen Geraden unter sich wieder völlig beliebig ist, so könnte man jede einzelne Konstruktion wieder auf sechs verschiedene Arten ausführen (123, 132, 213, 231, 312, 321) und hätte somit 48 verschiedene Reihenfolgen für die Konstruktion des Punktes K. — Man thut jedoch gut daran, sich eine bestimmte einzige derselben fest anzugewöhnen und nach derselben stets zu verfahren; und zwar empfiehlt sich dazu als allgemein gleichwertig die letzte der oben genannten Arten, nämlich je eine Gerade durch jeden der drei gegebenen Punkte.

Erkl. 10. Aus den Ueberlegungen der Antwort auf Frage 28 des I. Teils geht hervor, dass durch Projektion eines beliebigen einfachen n-Ecks in einer Ebene aus einem ausserhalb der Ebene liegenden Punkte ein System von n Strahlen dieses Punktes entsteht. Dieselben bilden ein n-Kant, und dieses hat so viele Kanten, als das n-Eck Eckpunkte hat, so viele Seitenflächen, als das n-Eck Seitenlinien, und so viele Diagonalebenen, als das n-Eck Diagonalgeraden hat. Wird das einfache n-Eck als einfaches n-Seit aufgefasst, so entsteht dieselbe Figur von n Ebenen durch jenen Projektionsscheitel, jetzt aufgefasst als räumliches n-Seit. Und so kann man unterscheiden je nach den Figuren:

in der Ebene: und entsprechend	im Raume:
einfaches n-Eck,	einfaches n-Kant,
einfaches n-Seit;	einfaches n-Seit;
vollständiges n-Eck (mit Ecken, Seiten, Nebenecken, einfachen n-Ecken),	vollständiges n-Kant (mit Kanten, Seiten, Nebenkanten, einfachen n-Kanten),
vollständiges n-Seit (mit Seiten, Ecken, Nebenseiten, einfachen n-Seiten).	vollständiges n-Seit (mit Seiten, Kanten, Nebenseiten, einfachen n-Seiten).

Erkl. 11. Wird die Beweisführung, wie es nebenstehend geschieht, auf die Definition der harmonischen Punkte mittels des einfachen Vierecks bezogen (siehe die erste Antwort auf Frage 2 und Satz 1), so geschieht die Projektion auch durch das einfache Vierkant S ($ABCD$) mit Diagonalebenen SAC und SBD. — Gründet man die Beweisführung auf das vollständige Viereck $ABCD$ (s. die zweite Antwort auf Frage 2 und Satz 1a), so geschieht auch die Projektion durch das vollständige Vierkant S ($ABCD$) mit den drei Paar Gegenseiten (Ebenen) SAB

Nun zerfällt das Viereck $ABCD$ in die zwei Dreiecke BCA und DCA. Und es werden aufeinander projiziert:

I. in den Dreiecken $B_1C_1A_1$ und $B_2C_2A_2$:

1. Seite B_1C_1 und Seite B_2C_2 durch die Ebene $C_1B_1FB_2C_2$;
2. Seite C_1A_1 und Seite C_2A_2 durch die Ebene $C_1A_1HA_2C_2$;
3. Seite A_1B_1 und Seite A_2B_2 durch die Ebene $B_1A_1EA_2B_2$.

Dabei ist die Schnittkante der ersten und zweiten Ebene (FBC und HAC) die Gerade C_1C_2, der zweiten und dritten Ebene (HAC und EAB) die Gerade A_1A_2, der dritten und ersten Ebene (EAB und FBC) die Gerade B_1B_2. Ist nun S der Schnittpunkt der drei projizierenden Ebenen FBC, HAC, EAB, so gehen auch die drei Schnittgeraden dieser Ebenen C_1C_2, A_1A_2, B_1B_2 durch einen gemeinsamen Punkt S, also geht insbesondere die Gerade B_1B_2 durch denselben Punkt wie die Geraden C_1C_2 und A_1A_2.

Ferner werden aufeinander projiziert:

II. in den Dreiecken $D_1C_1A_1$ u. $D_2C_2A_2$:

1. Seite D_1C_1 und Seite D_2C_2 durch die Ebene $C_1D_1ED_2C_2$;
2. Seite C_1A_1 und Seite C_2A_2 durch die Ebene $C_1A_1HA_2C_2$;
3. Seite A_1D_1 und Seite A_2D_2 durch die Ebene $D_1A_1FA_2D_2$.

Dabei ist die Schnittkante der ersten und zweiten Ebene (ECD und HAC) die Gerade C_1C_2, der zweiten und dritten Ebene (HAC und FAD) die Gerade A_1A_2, der dritten und ersten Ebene (FAD und ECD) die Gerade D_1D_2. Ist also diesmal S' der Schnittpunkt der drei projizierenden Ebenen ECD, HAC, FAD, so gehen auch die drei Schnittgeraden dieser Ebenen C_1C_2, A_1A_2, D_1D_2 durch einen gemeinsamen Punkt S', also geht insbesondere auch die Gerade D_1D_2 durch denselben Punkt wie die beiden Geraden C_1C_2 und A_1A_2.

und *SCD*, *SBC* und *SAD*, *SAC* und *SBD*, also fünfter Seitenfläche *SAC*, sechster Seitenfläche *SBD*. — Liegt endlich dem Beweise das vollständige Vierseit (*abcd*) zu Grunde, so geschieht die Projektion durch das vollständige räumliche Vierseit *S* (*abcd*) mit den vier Seiten *SAB*, *SBC*, *SCD*, *SDA* und den drei Nebenseiten *SEF*, *SAC*, *SBD*. — Der Gang des Beweises aber bleibt in allen drei Fällen genau der gleiche.

Erkl. 12. Die Figur 5 ist gezeichnet für diejenige Lage der Vierecke zur Geraden *EF*, welche in Figur 4 mit 0 und 1 bezeichnet ist. Der Beweis gilt aber selbstverständlich auch für zwei gleichartige Vierecke der Art 2 oder 3, und er gilt auch für zweierlei Vierecke wie 1 und 2 oder wie 1 und 3 oder wie 2 und 3. Der Unterschied liegt nur in der verschiedenen Lage der Ebenen zum Vierkant *S* (*ABCD*) bezw. ihrer Schnitte mit dem Vierkant. Sind nämlich beide Vierecke gleichartige im vorigen Sinne nach Figur 4, so liegen die Schnitte der Ebenen ε_1 und ε_2 im gleichen Winkelraum (bezw. in Scheitelwinkelräumen) des Strahlenbündels *S*. Sind dagegen die Vierecke ungleichartige, so liegen die aus dem Vierkant ausgeschnittenen Vierecke in Nebenwinkelräumen des Strahlenbündels S. Im ersten Falle liegen daher die Punktepaare A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 auf ihren Projektionsstrahlen alle auf gleicher (oder alle auf ungleicher) Seite des Scheitels *S*, im zweiten Falle dagegen liegen ein bis drei Paare auf gleicher, die andern drei bis ein Paar auf ungleicher Seite des Scheitels *S*; und durch letzteren Umstand ist es möglich, dass aus demselben Vierkant verschiedengestaltige Vierecke ausgeschnitten werden, bezw. dass durch dasselbe Vierkant verschiedengestaltige Vierecke projiziert werden können.

Erkl. 13. Der nebenstehende erste Beweis könnte auch aufgefasst werden als Nachweis des Satzes:

„Gehen durch zwei Punkte *EF* einer Geraden je zwei Gegenseiten und durch einen dritten Punkt *H* je die eine Diagonale zweier einfachen Vierecke in verschiedenen Ebenen, so sind die beiden Vierecke als Schnitte desselben Vierkants zu betrachten oder — so gibt es ein Vierkant, durch welches die beiden Vierecke aufeinander projiziert werden."

Betrachtet man dann die so behandelte räumliche Figur als ebene Zeichnung, so erhält man den Satz: „Zwei Vierecke sind kollinear, wenn je zwei Gegenseitenschnittpunkte und der Schnittpunkt der ersten Diagonalen auf einer Geraden liegen" — und wegen der Kollinearität muss auch der Schnittpunkt der zweiten Diagonalen auf derselben Geraden liegen.

Diese beiden Geraden C_1C_2 und A_1A_2 können einander aber nur in einem einzigen Punkte schneiden, also sind die Punkte *S* und *S'* identisch, und die vier Geraden A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 gehen durch einen einzigen gemeinsamen Schnittpunkt *S*. Von diesem Schnittpunkt *S* aus werden also die beiden Vierecke $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$ aufeinander projiziert durch ein Vierkant *S*(*ABCD*), und zwar projizieren die Ebenen dieses Vierkants die Seiten der Vierecke, und die Diagonalebenen des Vierkants die Diagonalen der Vierecke. Demnach werden auch die Diagonalen B_1D_1 und B_2D_2 der beiden Vierecke durch eine und dieselbe Ebene projiziert; und folglich müssen diese beiden Diagonalen B_1D_1 und B_2D_2, weil beide in der Ebene *SBD* liegen, die Kante *EFH* in demjenigen gemeinsamen Punkte schneiden, durch welchen die Ebene *SBD* hindurchgeht, d. h. beide Diagonalen B_1D_1 und B_2D_2 gehen durch einen und denselben Punkt *K*.

Beweis II.

Aus den Betrachtungen der Antwort 6. auf Frage 29 des I. Teils erhält man die Folgerungen, dass wenn die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten zweier Dreiecke auf einer Geraden liegen, dann die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch einen Punkt gehen, — und wenn umgekehrt die Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte durch einen Punkt gehen, dann die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden liegen. Betrachtet man nun Figur 5 als Figur in einerlei Ebene (also nicht in ε_1 und ε_2 und im Raume, sondern alles nur in der Zeichenebene), so liegen in den Dreiecken $B_1C_1A_1$ und $B_2C_2A_2$ bezw. $D_1C_1A_1$ und $D_2C_2A_2$:

1. die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten *BC*, *CA* und *AB* auf derselben Geraden *EF*, und

2. die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten *DC*, *CA* und *AD* ebenfalls auf derselben Geraden *EF*.

Erkl. 14. Der vorliegende Beweis gilt dem einzigen Satze der ebenen projektivischen Geometrie, welcher in derselben ohne Benutzung des Raumes nicht bewiesen werden kann. Ist dieser gewonnen, so braucht man für den allgemeinen Gang der Untersuchung niemals mehr aus der Ebene herauszugehen. Man kann die Schlussfolge des Beweises zwar nach dem Vorgang der vorigen Erkl. 13 aus Sätzen der ebenen Geometrie ableiten, aber jene Sätze sind eben nur durch räumliche Betrachtungen zu erweisen. — Umgekehrt könnte man aber auch fast behaupten, dass die Durchführung eigentlich gar kein Beweis sei, sondern nur die Konstatierung der projektivischen Verwandtschaft irgend zweier beliebigen Figuren, die zur Konstruktion harmonischer Punkte dienen.

Erkl. 15. Der zweite Beweis unterscheidet sich vom ersten insbesondere dadurch, dass er nicht unmittelbar räumliche Betrachtungen enthält. Jedoch ist dies nicht ein Vermeiden, sondern vielmehr nur ein Zurückschieben der räumlichen Untersuchungen in die grundlegenden Sätze über die Dreiecke. Der erste Beweis enthält diese Betrachtung der beiden Teildreiecke ABC und DBC selbst, der zweite verlegt dieselben in die Vorbereitungssätze. Darin liegt auch nur der wesentliche Unterschied beider Ableitungen. Denn wenn auch der Wortlaut verschieden klingt, so muss doch in jenen Dreiecks-Sätzen all das vorausgeschickt werden, was im ersten Beweise ohne Vorwegnahme jener Sätze eigens aufgebaut wird.

Folglich gehen nach dem ersten Satze die Verbindungsgeraden der entsprechenden Ecken C_1C_2, A_1A_2 und B_1B_2 durch einen gemeinsamen Punkt S, und die Verbindungsgeraden der entsprechenden Ecken C_1C_2, A_1A_2 und D_1D_2 durch einen gemeinsamen Punkt S'; demnach gehen sowohl B_1B_2 als D_1D_2 durch denselben Schnittpunkt S, wie die Geraden A_1A_2 und C_1C_2. Hiernach gehen aber für die Dreiecke $B_1D_1A_1$ und $B_2D_2A_2$ (oder $B_1D_1C_1$ und $B_2D_2C_2$):

3. die Verbindungsgeraden der entsprechenden Eckpunkte B_1B_2, D_1D_2 und A_1A_2 (oder C_1C_2) durch denselben Punkt S, folglich liegen nach dem zweiten Satze die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten B_1D_1 und B_2D_2 auf derselben Geraden, wie die Schnittpunkte der Seiten A_1B_1, A_2B_2 und A_1D_1, A_2D_2, nämlich auf der Geraden EF.

Frage 5. Welche Festsetzung unter den vier harmonischen Punkten muss wegen Satz 1 getroffen werden?

Antwort. 1. In Berücksichtigung der Definition der harmonischen Punkte und der Sätze 1 erkennt man die Notwendigkeit, unter den harmonischen Punkten eine Zusammenstellung zweier Paare vorzunehmen, nämlich eine Zuordnung einerseits derjenigen beiden Punkte, durch welche die Gegenseiten des Vierecks gehen, und anderseits derjenigen beiden Punkte, durch welche die Diagonalen gehen.

2. Aus der Figur erkennt man die Thatsache, dass die beiden Punkte des einen Paares stets (innen und aussen) getrennt sind durch die beiden Punkte des andern Paares, indem zwischen E und F stets einer der Punkte H, K, zwischen H und K stets einer der Punkte E, F liegen muss.

3. Die Zusammenstellung beider Paare ist dadurch eindeutig vollzogen,

Erkl. 16. Dass die beiden Punktepaare EF und HK einander völlig trennen, so dass man nicht von einem Punkte eines Paares zu seinem zugeordneten gelangen kann, ohne einen Punkt des andern Paares zu überschreiten, folgt aus der Betrachtung des Vierecks $ABCD$ nebst der Geraden EF. Es bilden nämlich die Punkte EF etwa mit dem Punkt A ein Dreieck mit Seiten EA, FA, EF (oder mit Punkt C ein Dreieck mit Seiten EC, FC, EF).

Nun müssen nach der Konstruktion des Vierecks die Punkte B und D äussere Punkte der Seiten des Dreiecks EFA sein (innere Punkte der Seiten des Dreiecks EFC) und folglich muss Punkt K ein äusserer Punkt der dritten Seite EF sein, denn eine Gerade kann nur entweder keine oder zwei Seiten eines Dreiecks innen schneiden, die andern drei oder eine aussen. Liegt also H zwischen EF, so muss K draussen liegen, und umgekehrt.

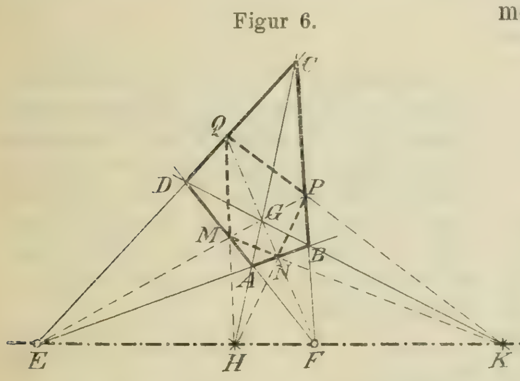
Erkl. 17. Dass die Punkte jedes Paares E und F bezw. H und K untereinander gleichwertig sind, geht ebenfalls aus dem Beweis der vorigen Antwort hervor. Denn die beiden Paare Gegenseiten sind ebenso gleichwertig, wie die beiden Diagonalen. Und wie der Beweis in der vorigen Antwort geführt wurde mittels Annahme des Punktes H und Aufsuchung des Punktes K, ebenso konnte er auch geführt werden unter Annahme des Punktes K und Aufsuchung von H. Die Zerlegung des Vierecks $ABCD$ geschieht einmal in die Dreiecke BCA und DCA, das andere Mal in die Dreiecke ADB und CDB.

dass von einem der vier Punkte festgestellt wird, welchem der drei übrigen er zugeordnet ist. Denn wenn zwei Punkte einander zugeordnet sind, so sind die beiden andern ebenfalls zugeordnet.

4. Durch drei gegebene Punkte ist folglich ein vierter Punkt als zugeordneter vierter harmonischer dann, aber auch nur dann eindeutig bestimmt, wenn noch angegeben ist, welchem der drei Punkte der vierte zugeordnet sein soll.

Frage 6. In welcher Beziehung stehen die beiden Paare zugeordneter Punkte unter vier harmonischen Punkten?

Figur 6.



Antwort. Die beiden Paare zugeordneter Punkte unter vier harmonischen Punkten sind miteinander völlig gleichwertig, d. h. es ist einerlei, welche Punktepaare man als Schnittpunkte der Gegenseiten oder als Schnittpunkte der Diagonalen auffasst.

Zum Beweise zieht man (siehe Figur 6) die Verbindungsgeraden der Punkte E und F nach G. Dadurch wird das Viereck $ABCD$ zerlegt in vier Teildreiecke, nämlich:

1. Viereck $ANGM$ mit Gegenseiten
   AN und MG durch E,
   AM und NG durch F,
   und einer Diagonale AG durch H;

folglich muss dessen zweite Diagonale MN durch K gehen.

2. Viereck $MGQD$ mit Gegenseiten
   MG und DQ durch E,
   MD und GQ durch F,
   und einer Diagonale DG durch K;

folglich muss dessen zweite Diagonale MQ durch H gehen.

3. Viereck $NBPG$ mit Gegenseiten
   NB und GP durch E,
   BP und NG durch F,
   und einer Diagonale GB durch K;

folglich muss dessen zweite Diagonale NP durch H gehen.

Erkl. 18. Auf Grund des letzten Teiles der vorhergehenden Antwort auf Frage 5 könnte die Aufsuchung des vierten harmonischen Punktes noch als verschiedene Aufgabe erscheinen, je nachdem der fehlende Punkt einer der beiden Schnittpunkte der Gegenseiten, oder einer der Diagonalenschnittpunkte sein sollte. Durch die nebenstehende Antwort wird gezeigt, dass dies völlig gleichwertig ist. Folglich wird man die Konstruktion stets so einrichten dürfen, wie in Figur 4 und 5 bezw. Erkl. 9, dass man den zu suchenden Punkt immer als Diagonalenschnittpunkt behandelt.

Erkl. 19. In der Zeichnung thut man gut daran, die zusammengehörigen Punkte auch durch die Bezeichnung von den andern zu unterscheiden. So sind in den Figuren 1 bis 5 stets durch Ringlein diejenigen beiden Punkte bezeichnet, durch welche die Gegenseiten gehen, durch Sternchen jene, durch welche die Diagonalen gehen. Man kann selbstverständlich die Beziehung auch vertauschen (wie für das

Viereck $MNPQ$ der Figur 6), wird aber jedenfalls immer für das eine Punktepaar die eine, für das andere Punktepaar eine andere Bezeichnung zu wählen haben.

4. Viereck $GPCQ$ mit Gegenseiten GP und QC durch E, PC und GQ durch F, und einer Diagonale CG durch H; folglich muss dessen zweite Diagonale PQ durch K gehen.

Erkl. 20. Betrachtet man die Punkte $ABCD$ der Figur 6 als Ecken eines vollständigen Vierecks, so sind EFG dessen Nebenecken, und man erhält durch nebenstehende Antwort zugleich den Beweis für den Satz (vergl. die Punkte HJM, HLN, JKN, KLM der Figur 1 und 2):

Satz. Im vollständigen Viereck liegen die Schnittpunkte der Seiten mit den Verbindungsgeraden der Nebenecken zu je dreien auf einer von vier Geraden.

Infolge dieser viermaligen Anwendung des Satzes 1 erhält man also ein neues Viereck $MNQP$; und von diesem gehen nun umgekehrt je zwei Gegenseiten durch H und K, die beiden Diagonalen durch E und F, und somit muss es gleichwertig sein, ob die Gegenseiten durch E, F und die Diagonalen durch H, K, oder die Gegenseiten durch H, K und die Diagonalen durch E, F hindurchgehen.

Frage 7. Welche Ortsveränderungen erfährt der vierte harmonische Punkt, wenn sein zugeordneter verschiedene Lagen gegen das festbleibende Paar der beiden andern einnimmt?

Antwort. Um die verschiedenen Lagen der Punktepaare HK gegen zwei Punkte EF zu untersuchen, kann man (siehe Figur 7) durch die zwei festen Punkte drei Geraden EAB, ECD und FBC festlegen, und dann je nach Lage des Punktes H die weiteren drei Geraden legen, welche den Punkt K liefern, nämlich:

erstens $CH\cdots$ liefert auf EAB den Punkt A;

zweitens $FA\cdots$ liefert auf ECD den Punkt D;

drittens $BD\cdots$ liefert auf EF den Punkt K.

Erkl. 21. In Figur 7 sind der Uebersichtlichkeit wegen die festen Geraden EAB, ECD und FBC stark ausgezogen, die beweglichen Geraden FAD als letzte Vierecksseiten schwach ausgezogen, CAH als erste Diagonale gestrichelt, BDK als zweite Diagonale punktiert. Zum gleichen Zwecke der Vermeidung der Buchstabenhäufung sind auf den Geraden EAB die Punkte A_1 bis A_{12}, auf ECD die Punkte D_1 bis D_{12} nur durch die entsprechenden Ziffern angegeben, und endlich die Punkte G_1 bis G_{12} nur angedeutet als Schnittpunkte zweier zusammengehörigen Diagonalen AC und BD. (Dass diese Punkte G sämtlich auf einer Geraden durch Punkt E liegen müssen, kommt später [s. Aufgabe 11 der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles] als sehr einfaches Ergebnis zur Besprechung.)

Dadurch erhält man folgende verschiedenen Fälle der gegenseitigen Lage von H und K, ausgehend von H ausserhalb EF jenseits F, wobei K zwischen E und F fällt:

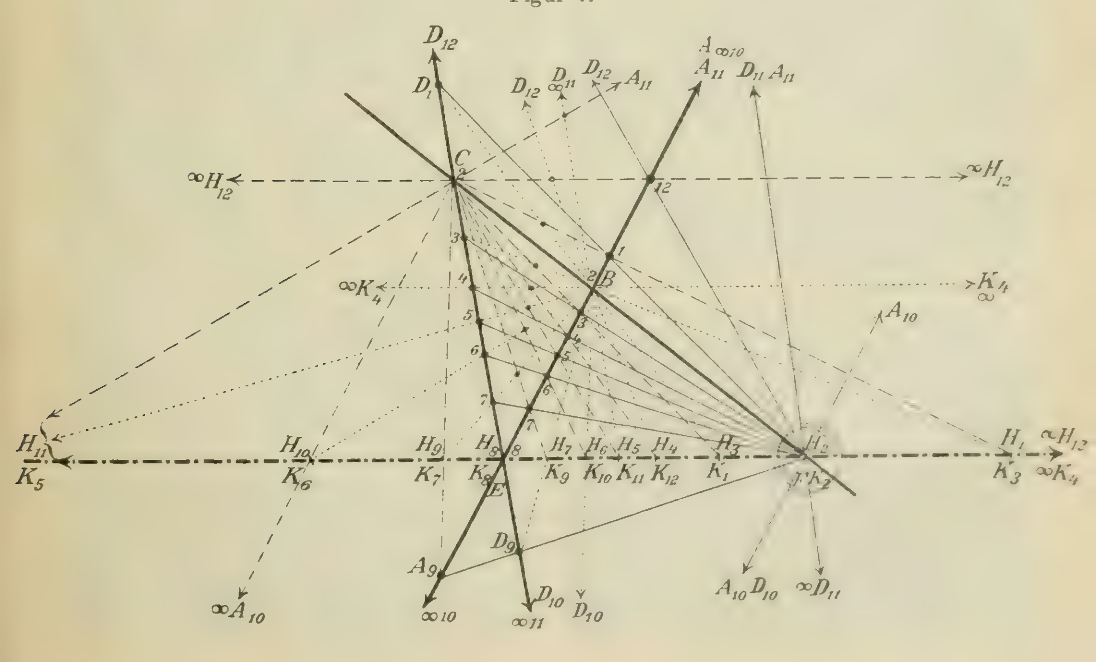
1. Rückt H_1 von aussen her gegen F hin, so verschieben sich: A_1 von aussen gegen B hin, D_1 von aussen gegen C hin, also rückt K_1 von innen gegen F hin.

Erkl. 22. Stellt man die verschiedenen Lagen der zusammengehörigen Punkte H, A, D, K sowie der zugehörigen Gestalten des Vierecks $ABCD$ nebeneinander, so erhält man folgende Uebersicht:

2. Fällt H_2 in F, so fällt A_2 in B, C_2 in D, D_2B in CB, K_2 fällt ebenfalls in F.

H_{12} ∞	A_{12} ($CA_{12} \parallel EF$)	D_{12}	K_{12}	Viereck erster Art: AD ausserhalb BC.
H_1 zwischen ∞ und F	A_1 zwischen A_{12} und B	D_1 zwischen D_{12} und C	K_1 zwischen K_{12} und F	
H_2 in F	A_2 in B	D_2 in C	K_2 in F	Viereck unendlich schmale Strecke BC.
H_3 zwischen F und H_4	A_3 zwischen B und A_4	D_3 zwischen C und D_4	K_3 zwischen F und ∞	Viereck erster Art: AD innerhalb BC.
H_4 ($BD_4 \parallel EF$)	A_4	D_4	K_4 ∞	
$H_{5,6,7}$ zwischen H_4 und E	$A_{5,6,7}$ zwischen A_4 und E	$D_{5,6,7}$ zwischen D_4 und E	$K_{5,6,7}$ zwischen ∞ und E	
H_8 in E	A_8 in E	D_8 in E	K_8 in E	Viereck im Punkt E.
H_9 zwischen E und H_{10}	A_9 zwischen E und ∞	D_9 zwischen E und D_{10}	K_9 zwischen E und K_{10}	Viereck dritter Art: BC einerseits, AD andererseits v. EF.
H_{10} ($CH_{10} \parallel EB$)	A_{10} ∞	D_{10}	K_{10}	Viereck Trapez (s. Figur 8).
H zwischen H_{10} und H_{11}	A zwischen ∞ und A_{11}	D zwischen D_{10} und ∞	K zwischen K_{10} und K_{11}	Viereck zweiter Art.
H_{11} ($FA \parallel EC$)	A_{11}	D_{11} ∞	K_{11}	Viereck Trapez (s. Figur 9): B innerhalb GA.
H zwischen H_{11} und ∞	A zwischen A_{11} und A_{12}	D zwischen ∞ und D_{12}	K zwischen K_{11} und K_{12}	Viereck erster Art: AD ausserhalb BC.
H_{12} ∞	A_{12} (zwischen A_{11} und B)	D_{12} (zwischen D_{11} und C)	K_{12}	

Figur 7.



Erkl. 23. Aus der vorigen Zusammenstellung erkennt man, dass bei den Uebergängen in der Figur 7 sämtliche drei Arten des Vierecks aus Figur 4 auftreten samt den Zwischenformen zwischen den einzelnen Arten, nämlich je nach dem Winkel am Punkte F, in welchen der veränderliche Strahl FAD hineinfällt. In Figur 7 ist durch ein, zwei oder drei Bögchen angedeutet, dass man erhält:

Viereck erster Art (mit AD innerhalb BC), wenn FA im Winkel EFB,

Viereck unendlich schmal zusammengeschrumpft zur Strecke BC, wenn FA auf FBC fällt,

Viereck erster Art (mit AD ausserhalb BC), wenn FA im Winkel BFA_{11},

Viereck als trapezartige Grenzfigur (s. Fig. 9 I, II), wenn FA auf FA_{11} fällt,

Viereck zweiter Art, wenn FA im Winkel $A_{11}FA_{10}$,

Viereck trapezartige Grenzfigur (s. Fig. 8 II, III), wenn FA auf FA_{10} fällt,

Viereck dritter Art, wenn FA im Winkel $D_{10}FE$,

Viereck unendlich klein zusammengeschrumpft zum Punkt E, wenn FA auf FE fällt.

Erkl. 24. Da nicht nur für die Betrachtung der harmonischen Punkte, sondern auch für die allgemeine Vierecks-Untersuchung die Grenzübergänge der dreierlei Vierecke von Wichtigkeit sind, so werden dieselben durch Figur 8 und 9 noch besonders zur Anschauung gebracht: Figur 8 gibt dasselbe Viereck $ABCD$ in doppelter Auffassung: als Viereck dritter Art (III) und zweiter Art (II). Im ersten Fall liegt Punkt A nach der einen, im zweiten nach der andern Richtung im Unendlichen, und die Rückführung aufs gewöhnliche Viereck der zugehörigen Art entsteht, wenn man den Schnitt der Parallelen aus der angegebenen Richtung ins Endliche hereinverlegt. Ebenso gibt Figur 9 das gleiche Viereck $ABCD$ in doppelter Auffassung: als Viereck zweiter Art (II) und erster Art (I) mit gleicher Unterscheidung der Richtung nach $D\infty$, wie vorhin für $A\infty$. Wieder entsteht das gewöhnliche Viereck der zugehörigen Art durch konvergente Strahlen statt der parallelen Geraden gegen die angegebene Richtung hin.

Erkl. 25. Man beachte in Figur 7 die wichtige Thatsache, dass wenn ein Punkt H_x einen zugeordneten Punkt K_x ergeben hat, auch zu diesem Punkt K_x, wenn er später als H_y aufgefasst wird, derselbe Punkt als K_y zugeordnet erscheint, welcher zuvor H_x gewesen. Man könnte glauben, dass diese Beziehung eines besondern Beweises bedürfte, doch ist dem nicht so; vielmehr ist diese Thatsache des sogenannten „doppelten Entsprechens“ je zweier Punkte eine selbstverständliche Folge der Definition harmonischer Punkte und des Satzes 1. Vergleiche man zu dem Zwecke z. B. das Viereck BCA_1D_1, durch welches H_1 und K_1, und das Viereck

3. Rückt H_3 von F einwärts gegen E zu, so rückt A_3 von B einwärts gegen E zu, D_3 von C einwärts gegen E zu. K_3 rückt von F an auswärts gegen den unendlich fernen Punkt der Geraden EF.

4. Für eine bestimmte Lage des Punktes H_4 zwischen E und F sind A_4 und D_4 gerade soweit von B und C abgerückt, dass BD_4 parallel EF wird, dass also der Schnittpunkt K_4 zum unendlich fernen Punkte der Geraden EF wird.

5. 6. 7. Rückt $H_{5,6,7}$ von H_4 noch weiter gegen E hin, so rücken $A_{5,6,7}$ und $D_{5,6,7}$ soweit gegen E hin, dass $BD_{5,6,7}$ die Gerade EF auf der andern Seite wieder trifft, folglich rückt Punkt $K_{5,6,7}$ aus dem Unendlichen herein gegen E hin.

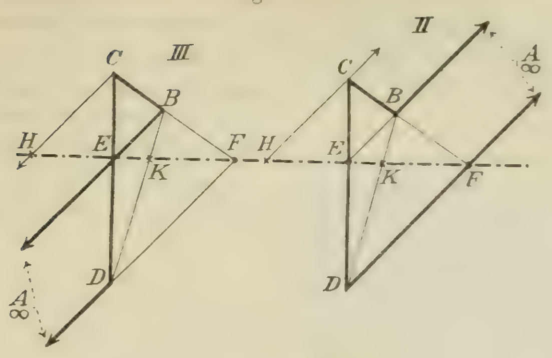
8. Fällt H_8 in den Punkt E, so fallen auch A_8 und D_8 beide in F, folglich BD in BE, und K_8 fällt ebenfalls in den Punkt E.

9. Rückt H_9 über den Punkt E hinaus, so rücken A_9 und D_9 auf ihren Trägern BE bezw. CE über E hinaus, die Gerade BD_9 trifft EF innerhalb, und Punkt K_9 rückt von E aus einwärts gegen F hin: das Viereck $ABCD$ ist von der ersten Art zur dritten Art der Figur 4 übergegangen.

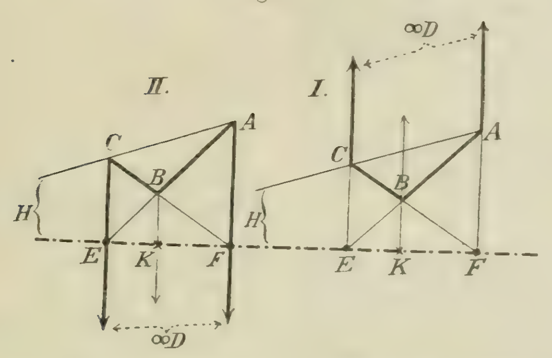
10. Für eine bestimmte Lage des Punktes H_{10} wird CH_{10} parallel mit EAB, A_{10} wird zum unendlich fernen Punkte von EAB, D_{10} ist Schnittpunkt von EDC mit der Parallelen zu EAB durch F, K_{10} fällt einwärts von K_9 gegen F hin: das Viereck $ABCD$ geht aus der dritten Art in eines der zweiten Art (siehe Figur 4) über.

11. Für eine bestimmte weitere Lage des Punktes H_{11} rückt A_{11} auf EBA aus dem Unendlichen wieder soweit gegen B herein, dass FA_{11} parallel ECD wird, also D_{11} zum unendlich fernen Punkte von ECD, und BD_{11} ebenfalls parallel ECD; Punkt K_{11} liegt einwärts von K_{10} gegen F hin: das Viereck $ABCD$ geht aus der zweiten Art wieder in eines der ersten Art über.

Figur 8.



Figur 9.



BCA_3D_3, durch welches H_3 und K_3 einander zugeordnet werden: Von den Diagonalen des Vierecks BCA_1D_1 geht eine durch H_1 und eine durch K_1. Folglich muss nach Satz 1 nicht nur in jedem Viereck, von dem je zwei Gegenseiten durch E und F und eine Diagonale durch H_1 geht, die andere Diagonale durch K_1 gehen, — sondern auch in jedem Viereck, von dem je zwei Gegenseiten durch E und F und eine Diagonale durch K_1 geht, die andere Diagonale durch H_1 gehen. Ein solches Viereck letztgenannter Art ist aber BCA_3D_3, also muss BD_3 durch H_1 gehen.

Erkl. 26. In Figur 7 sind absichtlich solche Punkte als H gewählt, welche mit schon vorher verwendeten Punkten K zusammenfallen, um die Häufung der Geraden nicht allzustark werden zu lassen. Auf Grund der Ueberlegung in voriger Erkl. 25 könnte man allerdings sagen, dass die erstmalige Konstruktion für alle Punkte zwischen E und F die zweitmaligen Konstruktionen für äussere Punkte schon liefere, also diese unnötig mache. Doch würden dann die einzelnen Besonderheiten äusserer Punkte, wie $H_{10}H_{11}H_{12}$ und die Uebergänge der Vierecke I, III, II verloren gehen. Umgekehrt sind eben dadurch innerhalb EF mehr Punkte $H_5H_6H_7$ aufgetreten, als für diese Strecke allein erforderlich gewesen.

12. Rückt Punkt H_{12} ins Unendliche auf EF, so wird CH_{12} parallel EF, A_{12} ist von A_{11} gegen B hereingerückt, D_{12} aus dem Unendlichen gegen C hereingerückt, und K_{12} erhält eine bestimmte Lage zwischen E und F.

13. Rückt Punkt H aus dem Unendlichen von der andern Seite wieder gegen Punkt F heran, so erhält man wieder dieselbe Punktfolge, wie oben von H_1 bis H_{12}.

Aus den sämtlichen Fällen geht die Bestätigung der Antwort auf Frage 5 hervor, dass jeweils das eine Paar zugeordneter Punkte innen und aussen getrennt ist durch die beiden Punkte des andern Paares. Als besondere Einzelheit entnimmt man aus den Fällen 2. und 3. die Aussage:

Wenn irgend zwei von vier harmonischen Elementen in ein gemeinsames Element zusammenfallen, so muss auch noch ein drittes

von den vier Elementen in dasselbe gemeinsame Element fallen.

Dabei sind eben in Fig. 7 die zwei Punkte eines Paares von beiden Seiten her in den von ihnen eingeschlossenen Punkt des andern Paares hineingerückt.

Erkl. 27. Fasst man die Punkte H bezw. K als Punktreihen h bezw. k desselben Trägers auf, und bezeichnet der Reihe nach C als S_1, EBA als t_1, F als S_0, ECD als t_2, B als S_2, so erkennt man in Figur 7 die Zuordnung:

$$h \wedge S_1 \overline{\wedge} t_1 \overline{\overline{\wedge}} S_0 \overline{\overline{\wedge}} t_2 \overline{\overline{\overline{\wedge}}} S_2 \wedge k.$$

Und man hat auf demselben Träger EF zwei projektivisch verwandte Punktreihen h und k, in denen je zwei Punktepaare einander doppelt entsprechen, nämlich die $H_1 K_1 = H_3 K_3$, $H_4 K_4 = K_{12} H_{12}$, $H_5 K_5 = K_{11} H_{11}$, $H_6 K_6 = K_{10} H_{10}$, $H_7 K_7 = K_9 H_9$ und mit zwei selbstentsprechenden Doppelpunkten $F = H_2 = K_2$, $E = H_8 = K_8$. Eine solche Zuordnung der Punkte eines und desselben Trägers tritt später als sehr wichtige Beziehung auf unter dem Namen „involutorische Reihe“, Involution, oder Paarung (auch Spiegelung, oder „Punktsystem“).

Frage 8. Was versteht man unter vier harmonischen Strahlen?

Antwort. Unter **vier harmonischen Strahlen** versteht man vier gerade Linien von einem Punkte (als Scheitel S) nach vier harmonischen Punkten.

Wie diese vier harmonischen Punkte in zwei Paare zugeordneter Punkte geteilt werden, so teilen sich auch die vier harmonischen Strahlen in zwei Paare zugeordneter Strahlen; und da die Punkte jedes Paares durch die Punkte des andern Paares getrennt werden, so werden auch die Strahlen des einen Paares getrennt durch die Strahlen des andern Paares. Entsprechend den Beziehungen der harmonischen Punkte sind ferner auch die Strahlen des einen Paares zugeordneter Strahlen gleichwertig mit den Strahlen des andern Paares; die Zuordnung beider Paare ist eindeutig festgelegt, wenn ein Strahl einem andern zugeordnet wird; und durch drei gegebene Strahlen ist ein vierter Strahl als zugeordneter vierter harmonischer Strahl dann, aber auch nur dann eindeutig bestimmt, wenn noch angegeben ist, welchem der vier Strahlen der vierte Strahl zugeordnet sein soll. Und wenn von vier harmonischen Strahlen irgend zwei in dieselbe Gerade zusammen-

Erkl. 28. Die vier harmonischen Strahlen bilden die Projektion der vier harmonischen Punkte aus dem Punkte S; und dementsprechend sind nicht nur die vom Scheitel ausgehenden Halbstrahlen als harmonische Geraden aufzufassen, sondern die ganzen Geraden. Daher hat man am gleichen Scheitel mehrfache Auswahl für vier zusammenzunehmende Halbstrahlen. Bezeichnet man nämlich für den Augenblick mit $efhk$ die vier zuerst gewählten Halbstrahlen, mit $e'f'h'k'$ ihre vier Scheitelstrahlen, so bilden die acht Gruppen

$$efhk, \quad fhke', \quad hke'f', \quad ke'f'h',$$
$$e'f'h'k', \quad f'h'k'e, \quad h'k'ef, \quad k'efh$$

jedesmal eine Gruppe von vier harmonischen Halbstrahlen: alle wegen derselben vier harmonischen Punkte $ABCD$ und mit Zuordnung derselben Geradenpaare, vergl. unten Figur 11, Seite 16.

Erkl. 29. Die nebenstehende Definition von vier harmonischen Geraden ist auf der schon behandelten Beziehung von vier harmonischen Punkten aufgebaut. Man könnte aber die harmonischen Strahlen auch selbständig definieren, indem man zu den Untersuchungen der sämtlichen Fragen 2 bis 7 die dualistischen Sätze aufstellte. Es ist leicht einzusehen, dass beiderlei Betrachtungsweisen dasselbe Ergebnis liefern müssen (vergl. die Aufgaben 4 u. ff. der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles). Eine dritte Definition, die wieder dasselbe Ergebnis liefert, ist endlich die auf der metrischen Beziehung aufgebaute (vergl. den nächsten Abschnitt 2 dieses Buches).

fallen, so muss auch noch ein dritter von den vier harmonischen Strahlen in dieselbe gemeinsame Gerade fallen (siehe Satz 2).

Frage 9. Welches ist die Fundamentaleigenschaft der harmonischen Strahlen, und wie wird dieselbe bewiesen?

Erkl. 30. In Fig. 10 haben die Schnittgerade q_2 und die Schnittebene ε_2 zum Vierkant $S(A_1 B_1 C_1 D_1)$ dieselbe Lage wie q_1 und ε_1, so dass auch das Viereck $A_2 B_2 C_2 D_2$ dieselbe Gestalt erhält wie $A_1 B_1 C_1 D$. Beides könnte aber auch anders gewählt sein: Durch dieselbe Gerade q_2 könnte man die Ebene ε_2 so legen, dass die Kanten $S(A_1 B_1 C_1 D_1)$ zum Teil oder sämtlich in ihren Verlängerungen über S hinaus getroffen würden; und die Gerade q_2 selbst könnte so gelegt werden, dass die Verbindungsgeraden $S(E_1 F_1 H_1 K_1)$ zum Teil oder sämtlich in ihren Verlängerungen über S hinaus getroffen würden. In beiden Fällen entsteht dennoch als Schnittfigur der Ebene ε_2 mit dem Vierkant $S(A_1 B_1 C_1 D_1)$ stets ein Viereck $A_2 B_2 C_2 D_2$ in irgend einer der drei Gestalten (vergl. Figur 3 und 4), von welchem je zwei Gegenseiten durch $E_2 F_2$, zwei Diagonalen durch H und K gehen, d. h. in jedem Fall sind $E_2 F_2 H_2 K_2$ vier harmonische Punkte.

Figur 10.

Antwort. Die wichtigste Eigenschaft der harmonischen Strahlen ist ausgesprochen in dem Satze:

Satz 2. Vier harmonische Strahlen werden von jeder Geraden in vier harmonischen Punkten geschnitten.

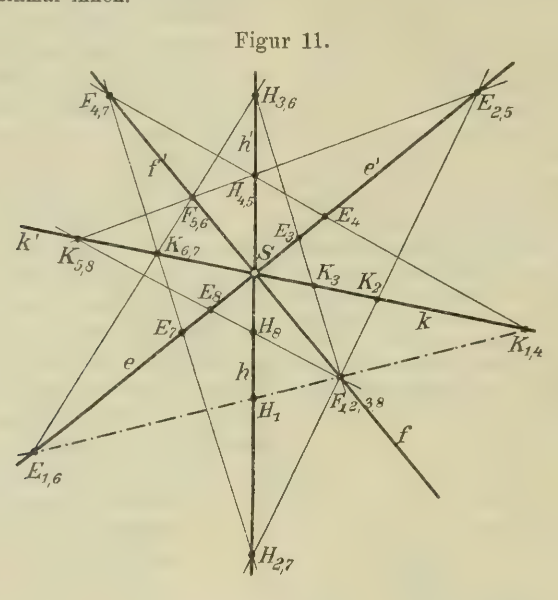
Zum Beweise schliesst man sich an das schon in der Antwort auf Frage 4 und Figur 5 verwendete Hilfsmittel der räumlichen Auffassungsweise an: Sind $E_1 F_1 H_1 K_1$ in Figur 10 vier durch das Viereck $A_1 B_1 C_1 D$ auf der Geraden q_1 erzeugte harmonische Punkte, *efhk* deren vier Verbindungsstrahlen mit dem Scheitel S, und $E_2 F_2 H_2 K_2$ die Schnittpunkte einer beliebigen Schnittgeraden q_2 mit *efhk*, so denkt man sich die Ebene ε_1 als Doppelebene, und ihre beiden Blätter drehbar um die Gerade q_1 oder $E_1 F_1 H_1 K_1$ als Achse. Diese beiden Blätter, deren eines als ε_1 das Viereck $A_1 B_1 C_1 D$, deren anderes als η den Punkt S und die Strahlen *efhk* nebst der Schnittgeraden $E_2 K_2$ enthält, dreht man dann um die Achse q_1 etwas auseinander und projiziert nun von S aus das Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ durch ein Vierkant. Legt man jetzt durch die Gerade q_2 eine ganz beliebige Ebene ε_2, so schneidet diese das Vierkant $S(A_1 B_1 C_1 D_1)$ in einem Viereck $A_2 B_2 C_2 D_2$, von welchem je zwei Gegenseiten durch E_2 und F_2, zwei Diagonalen durch H_2 und K_2 gehen. Daher werden auf q_2 durch das Viereck $A_2 B_2 C_2 D_2$ die Punkte $E_2 F_2 H_2 K_2$ genau ebenso als vier harmonische Punkte erzeugt, wie auf q_1 durch das Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ die Punkte $E_1 F_1 H_1 K_1$.

Erkl. 31. In Figur 11 sind die acht verschiedenen Lagen einer Schnittgeraden gegen vier harmonische Strahlen dargestellt: Die vier harmonischen Strahlen $efhk$ und ihre Verlängerungen $e'f'h'k'$ sind erzeugt durch die vier harmonischen Punkte $E_1 F_1 H_1 K_1$; und infolge dessen sind acht Gruppen von je vier harmonischen Punkten vorhanden, nämlich:

auf $ehfk$ die Punkte	$hfke'$	$fke'h'$	$ke'h'f'$	$e'h'f'k'$	$h'f'k'e$	$f'k'eh$	$k'ehf$
$E_1 H_1 F_1 K_1$	$H_2 F_2 K_2 E_2$	$F_3 K_3 E_3 H_3$	$K_4 E_4 H_4 F_4$	$E_5 H_5 F_5 K_5$	$H_6 F_6 K_6 E_6$	$F_7 K_7 E_7 H_7$	$K_8 E_8 H_8 F_8$.

Jeweils die Schnittgeraden $q_1 q_5$, $q_2 q_6$, $q_3 q_7$, $q_4 q_8$ schneiden vier entgegengesetzte Strahlrichtungen und haben daher gleiche Anordnung der vier Punkte; sonst aber ist jeder Punkt einmal aussen und einmal innen.

Figur 11.



Frage 10. Was für eine wichtige Folgerung ergibt sich aus dem vorigen Satze?

Erkl. 32. Man kann die nebenstehende Aussage auch in sehr verschiedener Weise in Worte fassen:

a) Werden vier Strahlen eines Punktes von einer Geraden in vier harmonischen Punkten geschnitten, so werden auf jeder Geraden vier harmonische Punkte durch die vier Strahlen ausgeschnitten.

b) Wenn in beliebig aufeinanderfolgenden perspektivisch liegenden Gebilden einmal vier bestimmte Elemente (Punkte oder Strahlen) eine harmonische Gruppe bilden, so bilden jedesmal die vier entsprechenden Elemente eine harmonische Gruppe.

Antwort. Aus dem vorigen Ergebnis erhält man die Folgerung, dass eine Gruppe von vier harmonischen Punkten aus jedem Punkte ausserhalb ihres Trägers durch eine Gruppe von vier harmonischen Strahlen projiziert wird und auch auf jeden weiteren Träger wieder als eine Gruppe von vier harmonischen Punkten projiziert wird. Daher ist jede Gruppe von vier Elementen, welche zu einer Gruppe von vier harmonischen Elementen perspektivisch liegt, wieder eine harmonische Gruppe.

Nun wurde aber die **projektivische** Verwandtschaft aufgebaut aus einer

c) Aus **einer** harmonischen Gruppe von Elementen ergeben sich durch Projizieren und Schneiden immer wieder harmonische Gruppen.

d) In projektivischen Gebilden entsprechen vier harmonischen Elementen immer wieder vier harmonische Elemente.

Erkl. 33. Man kann auch aus der Planimetrie den Begriff des „geometrischen Orts“ herübernehmen als Inbegriff der Gesamtheit der Lagen eines Punktes oder der Durchgangspunkte einer Geraden und erhält dann den dualistischen Doppelsatz:

Der geometrische Ort für

den vierten harmonischen Punkt zu den drei Schnittpunkten einer beliebigen Geraden mit drei bestimmten Strahlen eines Punktes ist die vierte harmonische Gerade durch diesen Punkt zu den drei gegebenen Geraden.	die vierte harmonische Gerade zu den drei Verbindungsgeraden eines beliebigen Punktes mit drei bestimmten Punkten einer Geraden ist der vierte harmonische Punkt auf dieser Geraden zu den drei gegebenen Punkten.

Aufeinanderfolge von Projektionen in perspektivischer Lage befindlicher Gebilde nach dem Musterbeispiel:

$$t_1 \barwedge S_1 \barwedge t_2 \barwedge S_2 \barwedge t_3 \barwedge S_3 \cdots \text{ u. s. w.}$$

Folglich muss nicht nur in perspektivisch liegenden, sondern auch in schief liegenden projektivisch verwandten Gebilden die harmonische Beziehung eine konstante sein (man sagt, die harmonische Beziehung sei eine Invariante für die projektivische Verwandtschaft). Und man erhält die Aussage:

Satz 3. Die harmonische Beziehung zwischen vier beliebigen Elementen bleibt bei jeder projektivischen Verwandtschaft erhalten als harmonische Beziehung zwischen den vier entsprechenden Elementen: Punkten oder Geraden.

Frage 11. Welche Umkehrung gestattet das vorige Ergebnis?

Erkl. 34. Die beiden Gruppen von harmonischen Elementen können sein: zwei Gruppen von je vier harmonischen Punkten, zwei Gruppen von je vier harmonischen Strahlen, oder eine Gruppe von vier harmonischen Punkten und eine Gruppe von vier harmonischen Strahlen. Jedesmal kann eine Vermittlung durch andere Strahlenbüschel und Punktreihen hergestellt werden, wodurch zu den vier gegebenen ersten Elementen die vier gegebenen zweiten Elemente als projektivisch verwandt zugeordnet werden. Auf Grund der Lösung der Aufgaben 17 bis 20 der Aufgabensammlung kann diese projektivische Verwandtschaft sogar jeweils nicht nur auf eine einzige, sondern auf mehrfache Weise entstehen, je nachdem man zwei beliebige Elemente und gleichzeitig die beiden andern miteinander vertauscht.

Erkl. 35. Sind die Elemente der beiden Gruppen bezeichnet durch $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$, so kann nach dem früheren jedenfalls projektivisch bezogen werden $A_1 B_1 C_1$ auf $A_2 B_2 C_2$. Da nun D_1 das vierte harmonische Element zu $A_1 B_1 C_1$ sein soll, so ist jede durch Projektion entstehende Gruppe wieder eine harmonische, also wird auch das zu $A_2 B_2 C_2$ hinzutretende vierte projektivische Element D kein anderes sein können als deren viertes harmonisches Element D_2. Es war demnach unwesentlich, ob man nur die drei Elementenpaare $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ zuordnete, oder gleich zu jedem das vierte harmonische zugesellte.

Antwort. Als eine Umkehrung des vorigen Ergebnisses kann man den Satz aussprechen, dass zwei ganz beliebige Gruppen von je vier harmonischen Elementen stets projektivisch sind, d. h. dass je vier beliebige harmonische Elemente sich stets in perspektivische Lage bringen lassen, oder dass sich eine Reihenfolge von Projektionen auffinden lässt, durch welche die eine Gruppe von harmonischen Elementen in die andere projektivisch übergeführt wird.

Die Richtigkeit dieser Behauptung beruht auf der Möglichkeit, dass drei beliebig gegebene Elemente stets mit einer zweiten Gruppe von drei andern beliebigen Elementen in projektivische Beziehung gebracht werden können. Dann muss dem vierten harmonischen Element zu den ersten dreien jedenfalls ein bestimmtes viertes Element zu den zweiten dreien entsprechen. Da aber in den projizierenden Strahlenbüscheln bezw. Punktreihen jenes vierte harmonische Element der ersten Gruppe immer durch ein viertes harmonisches Element weiterprojiziert wird, so muss auch das

zuletzt entstehende vierte Element das vierte harmonische zu der Gruppe der drei andern sein (vergl. auch die andere Beweisführung in Aufgabe 19 der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teils).

Erkl. 36. Die Ergebnisse der beiden Antworten auf Frage 10 und 11 sind auch benutzt worden zu einer ganz andern Einführung des Begriffes der projektivischen Verwandtschaft. Während nämlich in diesem Buche zwei Gebilde als projektivisch bezeichnet werden, wenn dieselben durch eine Reihe von perspektivischen Vermittlungsgebilden ineinander übergeführt werden, so kann nunmehr auch die andere Definition Platz greifen, dass zwei Gebilde projektivisch verwandt heissen, wenn ihre Elemente so geordnet sind, dass je vier harmonischen Elementen des einen Gebildes stets wieder vier harmonische Elemente des andern Gebildes entsprechen. Auf Grund der vorliegenden Beweisführungen erkennt man, dass diese beiden Definitionen gleichbedeutend sind, indem einerseits zweierlei harmonische Gruppen stets projektivisch sind, und andererseits projektivische Gebilde zu einer harmonischen Gruppe stets wieder harmonisch sind.

Frage 12. Zu welchem wichtigen Schluss führen die bisherigen Ueberlegungen?

Antwort. Man erhält aus den vorliegenden Erörterungen die grundlegenden Folgerungen über die Art und Weise der Festlegung einer projektivischen Verwandtschaft zweier Grundgebilde.

Satz 4. Die notwendige und zugleich hinreichende Voraussetzung für die Festlegung der projektivischen Beziehung zweier Grundgebilde ist die willkürliche Zuordnung von drei Elementen des einen Gebildes zu dreien des andern.

Beweis.

Notwendig ist diese Voraussetzung, d. h. weniger als drei Elemente genügen nicht zur Festlegung einer projektivischen Verwandtschaft, weil zu je zwei gegebenen Elementenpaaren $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ ein beliebiges drittes $C_1 C_2$ hinzugenommen werden konnte, so dass $A_1 B_1 C_1 \barwedge A_2 B_2 C_2$ wurde.

Hinreichend ist die Voraussetzung, d. h. mehr als drei Elemente dürfen nicht willkürlich gewählt werden, weil zu einem bestimmten vierten Element des ersten Gebildes auch immer ein bestimmtes viertes des zweiten Gebildes zugehört. Nimmt man nämlich als viertes Element im ersten Gebilde gerade das vierte harmonische zu den drei ersten, so darf das zugeordnete auch im zweiten Gebilde durchaus kein anderes sein, als eben wieder das vierte harmonische zu

Erkl. 37. Bei der Einführung des Begriffes der projektivischen Verwandtschaft werden bloss die Träger von Punktreihen bezw. Scheitel von Strahlenbüscheln willkürlich gewählt, und dann werden diejenigen Elemente als zugeordnete bezeichnet, welche eben als erste und letzte in der Reihe der Projektionen entstanden. Nunmehr aber soll ohne Rücksicht der Zwischenelemente auf dem ersten und letzten Träger bezw. durch den ersten und letzten Scheitel eine Anzahl von Elementen als zugeordnete willkürlich ausgewählt werden, so dass dadurch auch jedem andern Element ein ganz bestimmtes zugeordnet werde. Die nebenstehende Antwort zeigt, dass man willkürlich als zugeordnet wählen darf, aber auch zur Festlegung der projektivischen Verwandtschaft wählen muss, ein erstes Elementenpaar $A_1 A_2$, ein zweites Elementenpaar $B_1 B_2$ und auch noch ein drittes Elementenpaar $C_1 C_2$. Dann aber darf einem vierten Elemente D_1 nicht mehr ein beliebiges viertes Element D_2 zugeordnet werden. Vielmehr tritt hier die harmonische Beziehung in ihrer grundlegenden Bedeutung ein: dieselbe Aufeinanderfolge harmonischer Zuordnungen, welche zu $A_1 B_1 C_1$ das Element D_1 liefert, muss auch zu $A_2 B_2 C_2$ das Element D_2 liefern.

Erkl. 38. Man kann die Frage aufwerfen, ob es denn überhaupt stets möglich ist, dass eine solche Aufeinanderfolge harmonischer Zuordnungen existiert, durch welche ein ganz beliebiges viertes Element D aus den gegebenen drei Elementen $A B C$ hervorgeht. Diese Frage wird durch genaue Untersuchungen bejaht. Denn aus drei gegebenen Elementen kann man durch stets abgeänderte Zuordnung der Paare unbegrenzt viele neue Elemente hinzugewinnen. Und

wenn umgekehrt das Element D nicht zu erhalten wäre, so könnten auch alle die unbegrenzt vielen nicht erhalten werden, welche dadurch neu gewonnen werden, dass man das Element D zu je zweien der ersten hinzunimmt und jeweils die vierten harmonischen konstruiert. Die wirkliche Auffindung und Beweisführung gehört zu den sog. Aufgaben zweiten Grades.

Erkl. 39. Auf Grund der nebenstehenden Ausführungen wird bei allen Projektivitätsbeziehungen die Zuordnung stets bestimmt durch drei Elementenpaare, d. h. durch die Angabe je dreier Elemente des einen und des andern Gebildes, welche einander zugeordnet sein sollen. Man wählt also ganz beliebig drei Punkte $A_1 B_1 C_1$ auf einem Träger und ordnet ihnen zu drei ebenfalls ganz beliebig gewählte Punkte $A_2 B_2 C_2$ auf dem zweiten Träger, bezw. drei beliebige Strahlen eines Büschels. Die Grundlage für dieses Verfahren bildet aber die harmonische Beziehung unter je vier Elementen; und hierin liegt die äusserst wichtige Bedeutung der harmonischen Beziehung in der rein projektivischen Geometrie: Was in der messenden Geometrie oder auch in der metrischen Behandlungsweise der synthetischen Geometrie durch irgend eine Massgrösse bezw. einen Zahlenwert geleistet werden kann, das bedarf in der rein geometrischen Auffassungsweise einer anderweitigen Festlegung einer engeren Beziehung unter den Elementen eines Gebildes: und diese Rolle fällt hier der harmonischen Zuordnung von je vier Elementen zu.

den drei ersten. Ist das vierte Element im ersten Gebilde nicht durch einmalige, sondern erst durch mehrmalige Aufeinanderfolge harmonischer Zuordnungen aus den drei ersten entstanden, so darf auch das vierte Element im zweiten Gebilde kein anderes sein, als dasjenige, welches durch die genau entsprechende Aufeinanderfolge harmonischer Zuordnungen aus den dortigen drei ersten Elementen hervorgeht. Stimmt mit diesem Element das etwa willkürlich gewählte vierte Element gerade überein, so war es eben nicht mehr willkürlich, aber auch nicht nötig, sondern durch die andern schon bestimmt; stimmt es nicht überein, so wird dadurch unmöglich gemacht, eine projektivische Verwandtschaft unter beiden Gruppen von Elementen herzustellen.

Erkl. 40. Das obige Ergebnis lässt sich auch von einer ganz andern Seite betrachten: Da durch Zuordnung dreier Paare von Elementen zweier projektivischen Gebilde eine bestimmte Zuordnung sämtlicher Paare von Elementen der beiden Gebilde festgelegt wird, so können zwei auf gleichem Träger liegende projektivisch verwandte Gebilde höchstens zwei zugeordnete Elementenpaare gemeinsam haben: denn lägen drei Elemente des einen in den drei zugeordneten Elementen des andern, so müssten sämtliche Elemente des einen mit den entsprechenden Elementen des andern identisch liegen, da ja jedes vierte harmonische des einen auch mit dem vierten harmonischen des andern zusammenfallen müsste. Zwei projektivische Gebilde mit gemeinsamem Träger (Punktreihen auf derselben Geraden, Strahlenbüschel durch denselben Scheitel u. s. w.) können also gemeinsam liegend besitzen: kein Elementenpaar, oder ein Elementenpaar, oder zwei Elementenpaare. Wären drei Elementenpaare gemeinsam, so wären beide Gebilde gar nicht mehr verschieden, sondern durchweg identisch oder kongruent.

---

2. Ueber die Massbeziehungen harmonischer Gebilde.

Frage 13. Wie gelangt man in der metrischen Behandlungsweise der synthetischen Geometrie zum Begriff der harmonischen Gebilde?

Antwort. In der metrischen Behandlungsweise bildet den Ausgangspunkt für das Auftreten der harmonischen Gebilde die Lehre von den Doppelverhältnissen. Während nämlich im allgemeinen Falle das Doppelverhältnis unter denselben vier beliebigen

Erkl. 41. Unter sechs unabhängigen Werten liessen sich im allgemeinen fünfzehn Einzelgleichheiten ansetzen. Infolge der nahen Beziehungen unter den sechs Werten des Doppelverhältnisses wird aber ihre Vielseitigkeit sehr beschränkt. Man kann nämlich gleich setzen:

1) $\lambda = \frac{1}{\lambda}$; dann wird von selbst

$$1 - \lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \text{ und } \frac{1}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Man findet zur Bestimmung des dazu erforderlichen Wertes von λ jedesmal die Gleichung $\lambda^2 = 1$, also die zwei Längen $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$. Im ersten Falle sind die sechs Werte:

$$\lambda = 1 = \frac{1}{\lambda},\ 1 - \lambda = 0 = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

$$\frac{1}{1-\lambda} = \infty = \frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

also 1, 1, 0, ∞, 0, ∞. Im zweiten Falle wird

$$\lambda = -1 = \frac{1}{\lambda},\ 1 - \lambda = 2 = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

$$\frac{1}{1-\lambda} = \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

also sechs Werte: -1, -1, 2, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$.

2) $\lambda = 1 - \lambda$; dann wird von selbst

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} \text{ und } \frac{\lambda - 1}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Man erhält für den Wert von λ jedesmal die Gleichung $2\lambda = 1$, also die sechs Werte:

$$\lambda = \frac{1}{2} = 1 - \lambda,\ \frac{1}{\lambda} = 2 = \frac{1}{1-\lambda}$$

und $\frac{\lambda - 1}{\lambda} = -1 = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$, oder $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$, 2, -1, -1.

3) $\lambda = \frac{1}{1-\lambda}$; dann wird

$$\frac{1}{\lambda} = 1 - \lambda,\ \frac{\lambda - 1}{\lambda} = \lambda,\ \frac{\lambda}{\lambda - 1} = \frac{1}{\lambda},$$

folglich entstehen je drei gleiche Werte:

$$\lambda = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \text{ und}$$

$$\frac{1}{\lambda} = 1 - \lambda = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Die Gleichung für λ wird jedesmal $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, so dass:

$$\lambda = \frac{1}{2}(1 \pm i) = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda};$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}(1 \mp i) = 1 - \lambda = \frac{\lambda}{\lambda - 1};$$

also erscheinen die sechs Werte:

$$\frac{1 \pm i}{2},\ \frac{1 \mp i}{2},\ \frac{1 \mp i}{2},\ \frac{1 \pm i}{2},\ \frac{1 \pm i}{2},\ \frac{1 \mp i}{2}.$$

4) $\lambda = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$; dann wird

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda},\ 1 - \lambda = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Man erhält als Gleichung $\lambda(\lambda - 2) = 0$, folglich Elementen in sechs verschiedenen Werten gebildet werden kann, nämlich (s. Antwort auf Frage 35 u. 36 des I. Teils):

$$\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ 1 - \lambda,\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda - 1}{\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

so entsteht offenbar eine ganz besonders merkwürdige Beziehung unter den vier Elementen, wenn infolge ihrer gegenseitigen Lage von diesen sechs Werten einige identisch werden. Dabei stellt sich als einzig wichtiger von realer Bedeutung derjenige Fall heraus, in welchem $\lambda = -1$ ist. Der Vergleich mit den übrigen Werten lässt dabei gleichzeitig entstehen:

$$\lambda = -1 = \frac{1}{\lambda},\ 1 - \lambda = 2 = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

$$\frac{1}{1-\lambda} = \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Statt der im allgemeinen verschiedenen sechs Werte hat man also nunmehr nur noch die drei verschiedenen Werte:

$$-1,\ 2,\ \frac{1}{2}.$$

Jede Gruppe von vier Elementen, deren Doppelverhältnis den Wert -1 $\left(\text{oder bei anderer Zuordnung } 2 \text{ oder } \frac{1}{2}\right)$ hat, nennt man vier harmonische Elemente.

Nun bleibt nach den Sätzen 9 in Antwort auf Frage 42 des I. Teils schon das Doppelverhältnis von vier beliebigen Elementen bei allen Projektionen unverändert, und auch die Projektivität zweier Gebilde ist schon festgelegt, wenn sie ein gleiches Doppelverhältnis von sonst beliebigem Wert haben. Daher folgt für die harmonischen Gebilde, welche ja laut Definition stets das gleiche Doppelverhältnis (nämlich -1) besitzen, in der metrischen Behandlungsweise ganz von vornherein die Richtigkeit der in den Antworten auf Frage 10 und 11 geometrisch erwiesenen Sätze: dass nämlich einerseits die harmonische Beziehung zwischen vier Elementen bei allen Projektionen bestehen bleibt, und andererseits, dass eine Gruppe von vier harmonischen Elementen zu einer beliebigen andern Gruppe

die zwei Lösungen $\lambda = 0$ oder $\lambda = 2$. Im ersten Fall werden die sechs Werte

$$\lambda = 0 = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad \frac{1}{\lambda} = \infty = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

$$1 - \lambda = 1 = \frac{1}{1 - \lambda},$$

also 0, ∞, 1, 1, ∞, 0. Im zweiten Falle entsteht:

$$\lambda = 0 = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

$$1 - \lambda = -1 = \frac{1}{1 - \lambda},$$

also 2, $\frac{1}{2}$, -1, -1, $\frac{1}{2}$, 2.

von vier harmonischen Elementen stets projektivisch verwandt ist, — beides gültig für Punkte oder Strahlen untereinander oder in Wechselbeziehung.

Erkl. 42. Wie die vorige Erkl. 41 zeigt, entstehen aus sämtlichen Fällen der Gleichsetzung unter den sechs Werten des Doppelverhältnisses für besonders ausgezeichnete Lagen der vier Elemente nur die drei verschiedenen Gruppen, deren erste je zweimal die Werte 1, 0, ∞, deren zweite je zweimal die Werte -1, 2, $\frac{1}{2}$, und deren letzte je dreimal die Werte $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-1})$ und $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{-1})$ aufweist. Demnach ist also der erste Fall überhaupt kein allgemeiner, denn auf Grund der Antworten auf Frage 35 und 36 des I. Teils erkennt man, dass die Werte 1, 0, ∞ für das Doppelverhältnis immer nur dann auftreten, wenn eines der vier Elemente mit einem der drei andern zusammenfällt. Der dritte Fall zeigt nicht wie die andern drei doppeltgleiche, sondern zwei dreifachgleiche Werte, und zwar die beiden konjugiert komplexen Werte der dritten Wurzel aus -1. Diese Lagebeziehung (man nennt sie die „aequianharmonische“) ist daher durch reelle Elemente gar nicht herstellbar und besteht demnach ohne vorerst erkennbare geometrische Bedeutung. — Es bleibt nach allem als einzig ausgezeichneter reeller Fall des Doppelverhältnisses der zweite übrig mit den Werten -1, 2, $\frac{1}{2}$, nämlich der Ausdruck der harmonischen Beziehung.

Erkl. 43. Es liegt in der Natur der Sache, dass je nach der Behandlungsweise des Stoffes gewisse Ergebnisse sich leichter auf die eine oder auf die andere Art ergeben. So sind die am Schlusse obiger Antwort gegebenen Aussagen entstanden als einfachste Folgerung früherer Sätze, während dieselben Ergebnisse in der rein geometrischen Behandlungsweise erst umständlicher Erörterungen bedurften. Dies hängt hier zum guten Teil damit zusammen, dass dem Doppelverhältnis zwischen vier Elementen eine absolut geometrische Analogie nicht gegenübersteht, dass also der vierte Abschnitt des I. Teils für die metrische Behandlung auf Grund des Doppelverhältnisses schon ein gutes Stück Vorarbeit lieferte, die für die geometrische Durchführung erst mittels der harmonischen Beziehung im ersten Abschnitt des II. Teils geleistet werden konnte.

Frage 14. Welches ist nach dem vorigen der metrische Charakter von vier harmonischen Elementen?

Antwort. 1. Damit das Doppelverhältnis von vier Elementen den Wert -1 habe, muss das Teilungsverhältnis, nach welchem der Zwischenraum (Strecke bezw. Winkel) des ersten und zweiten Elementes durch das dritte geteilt wird, gleich dem negativen Wert desjenigen Teilungsverhältnisses sein, nach welchem dieselben beiden ersten Elemente durch das vierte getrennt werden. Zugleich lässt das entgegengesetzte Vorzeichen beider Werte erkennen, dass von den beiden Elementen des zweiten Paares (also den Teilpunkten bezw. Teilstrahlen) stets das eine innerhalb, das andere ausser-

Erkl. 44. Statt vom Doppelverhältnis auszugehen, könnte man die metrische Auffassung auch aus der geometrischen hervorgehen lassen, und zwar auf Grund der beiden Eigenschaften, dass zwei Gruppen harmonischer Elemente stets projektivisch sind; und dass sie eine harmonische Gruppe bleiben, wenn die Elemente eines der Paare vertauscht werden. Die erste dieser beiden Eigenschaften besagt nach Satz 9 des I. Teils, dass das Doppelverhältnis beliebiger harmonischen Gruppen, wenn nur die Elemente entsprechend geordnet werden, dasselbe sein muss, also einen konstanten Wert besitzt; die zweite lässt diesen Wert finden. Sind nämlich

ABCD vier harmonische Elemente, so sind es auch *BACD*. Schreibt man für beide Gruppen das Doppelverhältnis an in der entsprechenden Anordnung $(ACBD) = (BCAD)$, so erhält man:

$$\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = \frac{BA}{AC} : \frac{BD}{DC}.$$

Durch Kürzung mit den gleichen Stücken $DC = DC$ und $AB = -BA$ entsteht:

$$\frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = -1,$$

also wirklich:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1,$$

oder:

$$AC : CB = -AD : DB.$$

Man erkennt hieraus ausserdem, dass die Gleichwertigkeit der Elemente eines Paares eine ganz ausschliessliche charakteristische Eigenschaft der harmonischen Gebilde ist, und dass dieselbe also bei keinem andern Werte des Doppelverhältnisses, als eben dem der harmonischen Gebilde möglich ist.

Erkl. 45. Die Definition einerseits der harmonischen Punkte und andererseits der harmonischen Strahlen kommt auf Grund der Doppelverhältnisse ganz gemeinsam zu stande; in der geometrischen Behandlung konnte man ebenfalls die harmonischen Strahlen erhalten durch Aufstellung der dualistischen Erörterungen zu jenen über harmonische Punkte. Solche Ausführlichkeit konnte aber oben vermieden werden durch Grundlegung des Satzes 3, wonach harmonische Strahlen selbst entstehen als Projektionen harmonischer Punkte und bei jedem Schnitt wieder harmonischen Punkten Entstehung geben. Für diese wichtigste Eigenschaft kann man auch metrische Beweise aufstellen; der einfachste ist aber schon vorhanden in der Gleichheit der Doppelverhältnisse in projektivischen Strahlenbüscheln und Punktreihen (vergl. auch Antwort auf Frage 20).

halb der beiden ersten liegen muss (vergl. die Antworten auf Frage 35, 3 und 36, 3 des I. Teils). Man erhält somit die in der Planimetrie übliche Definition von vier harmonischen Punkten als solchen, von denen je zwei den Abstand der beiden andern innen und aussen im gleichen Verhältnis teilen: Unter Feststellung der Trennung je zweier Elemente durch die zwei andern kann man also das Vorzeichen — als selbstverständlich — weglassen und erlangt die Proportionen: $AC : CB = AD : DB$ und $CA : AD = CB : BD$ für Punkte, bezw. für Strahlen:

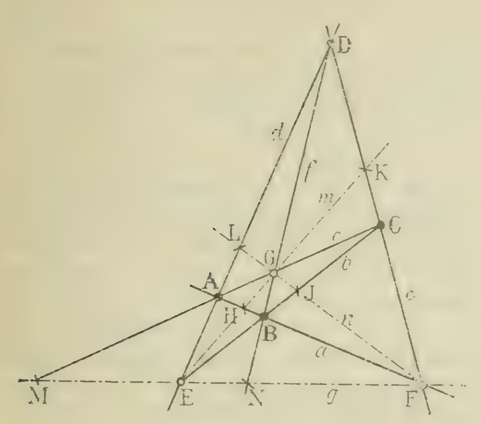
$$\sin(ac) : \sin(cb) = \sin(ad) : \sin(db)$$
$$\sin(ca) : \sin(ad) = \sin(cb) : \sin(bd).$$

2. Man erhält hiernach auf Grundlage der metrischen Begründung des Begriffes harmonischer Elemente als Fundamentaleigenschaften ebenso wie bei der rein geometrischen: Eindeutige Bestimmung des vierten Elementes durch die drei ersten (s. Antwort auf Frage 5, 4); Zusammenstellung der vier Elemente zu zwei zusammengehörigen Paaren, so dass jedes Paar Elemente durch das andere Paar Elemente getrennt ist; sowie eindeutige Feststellung dieser Zuordnung durch Wahl eines der Paare (s. die Antworten auf Frage 5 und 8); verschiedene Lagen des vierten Elementes je nach Lage des veränderlicheu dritten, wenn die beiden Elemente des ersten Paares festliegen (siehe die Antworten auf Frage 7, sowie 35, 36 des I. Teils); insbesondere auch Zusammenfallen dreier Elemente, wenn irgend zwei zusammenrücken (s. Antwort auf Frage 7). Aus Satz 6 des I. Teils folgt ferner wegen der Gleichheit von

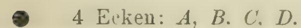
$$\lambda = -1 = \frac{1}{\lambda},$$

dass die Elemente je eines Paares sowohl miteinander als auch mit dem andern Elementenpaare gleichwertig sind (s. Antwort auf Frage 5 und 6), denn das Doppelverhältnis $\lambda = -1$ bleibt bestehen bei einmaliger Vertauschung zweier zugeordneten Elemente, sowie bei gleichzeitiger Vertauschung zweier Elementenpaare.

Figur 12.



Vollständiges Viereck.



4 Ecken: A, B. C. D.

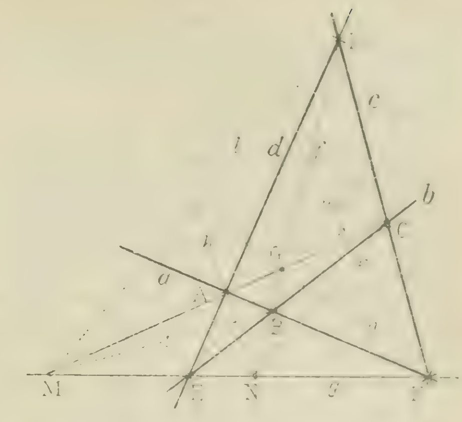
6 Seiten: a, b. c. d, e, f.

3 Nebenecken: E, F, G.

3 Verbindungsgeraden dieser Nebenecken: g, m, n.

6 Schnittpunkte der Seiten mit letzteren: H, J, K, L, M, N (zu je 3 auf einer von 4 Geraden HJM. HLN, IKN. KLM).

Figur 13.



Vollständiges Vierseit.

4 Seiten: a, b, c, d.

6 Ecken: A, B, C, D, E, F.

3 Nebenseiten: e, f, g.

3 Schnittpunkte dieser Nebenseiten: G. M, N.

6 Verbindungsgeraden der Ecken mit letzteren: h, i, k, l, m, n (zu je 3 durch einen von 4 Punkten him, hln, ikn, klm).

Frage 15. Wie gelangt man aus der metrischen Definition von harmonischen Punkten oder Strahlen zu den harmonischen Eigenschaften des Vierecks und Vierseits?

Antwort. Die metrische Definition gewährt folgende dualistische Durchführung für die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks und Vierseits.

1. Durch die Nebenecke E des vollständigen Vierecks $ABCD$ (s. Figur 12) gehen die drei Strahlen b, d, g (zwei Seiten und eine Verbindungsgerade zweier Nebenecken) und schneiden die Seiten e und f in den drei Punkten CAM bezw. BDN. Würde man also zu den drei Strahlen bdg den vierten harmonischen zu g zugeordneten Strahl aufsuchen, so müsste dessen Schnittpunkt sowohl auf e als auch auf f den vierten harmonischen Punkt zu C, A und M bezw. zu B, D und N ergeben.

2. Durch die Nebenecke F gehen ebenso drei Strahlen cag und schneiden dieselben Seiten e und f in denselben drei Punkten CAM bezw. BDN. Würde man also zu den drei Strahlen

1. Auf der Nebenseite f des vollständigen Vierseits $abcd$ (s. Figur 13) liegen die drei Punkte BDG (zwei Ecken und ein Schnittpunkt zweier Nebenseiten) und werden projiziert aus den Ecken F und E durch die drei Geraden can bezw. bdm. Würde man also zu den drei Punkten BDG den vierten harmonischen zu G zugeordneten Punkt aufsuchen, so müsste dessen Verbindungsgerade sowohl mit F als auch mit E den vierten harmonischen Strahl zu c, a und n bezw. zu c, b und m ergeben.

2. Auf der Nebenseite e liegen ebenso drei Punkte CAG und werden aus denselben Eckpunkten F und E durch dieselben drei Strahlen can bezw. bdm projiziert. Würde man also zu den

cag den vierten harmonischen zu *g* zugeordneten Strahl aufsuchen, so würde auch dieser sowohl auf *e* als auch auf *f* wieder den vierten harmonischen Punkt zu *C*, *A* und *M* bezw. *B*, *D* und *N* ausschneiden müssen.

3. Die beiden vierten harmonischen Strahlen zu *b*, *d*, *g* aus *E* bezw. zu *c*, *a*, *g* aus *F* liefern also einerseits als Schnittpunkt auf *e* denselben vierten harmonischen Punkt zu *CAM*, d. h. ihr Schnittpunkt liegt selbst auf *e*; andererseits als Schnittpunkt auf *f* denselben vierten harmonischen Punkt zu *BDN*, d. h. ihr Schnittpunkt liegt selbst auf *f*. Demnach muss der Schnittpunkt *G* der Geraden *e* und *f* auch der Schnittpunkt der beiden vierten harmonischen Strahlen sein; und demnach ist *EG*(*m*) der vierte harmonische Strahl zu *bdg*, *FG*(*n*) der vierte harmonische Strahl zu *cag*; *G* der vierte harmonische Punkt sowohl auf *e* zu *ACM*, als auch auf *f* zu *BDN*. Folglich sind auch vier harmonische Strahlen z. B. die Verbindungsgeraden mit *D*, nämlich *DC*, *DA*, *DG*, *DM*, und vier harmonische Punkte ihre Schnittpunkte mit *EF*(*g*), nämlich *EFMN*, und wieder deren Projektionsstrahlen aus *G*: *efmn*.

drei Punkten *CAG* den vierten harmonischen zu *G* zugeordneten Punkt aufsuchen, so würde auch dieser sowohl aus *F* als auch aus *E* wieder durch den vierten harmonischen Strahl zu *c*. *a* und *n* bezw. *b*. *d* und *m* projiziert werden müssen.

3. Die beiden vierten harmonischen Punkte zu *BDG* auf *f* bezw. zu *CAG* auf *e* liefern also einerseits als Verbindungsgerade mit *F* denselben vierten harmonischen Strahl zu *can*, d. h. ihre Verbindungsgerade geht selbst durch *F*; andererseits als Verbindungsgerade mit *E* denselben vierten harmonischen Strahl zu *bdm*, d. h. ihre Verbindungsgerade geht selbst durch *E*. Demnach muss die Verbindungsgerade *g* der Punkte *E* und *F* auch Verbindungsgerade der beiden vierten harmonischen Punkte sein; und demnach ist *fg*(*N*) der vierte harmonische Punkt zu *BDG*, *eg*(*M*) der vierte harmonische Punkt zu *CAG*; *g* der vierte harmonische Strahl sowohl aus *F* zu *acn*, als auch aus *E* zu *bdm*. Folglich sind auch vier harmonische Punkte z. B. die Schnittpunkte mit *d*, nämlich *dc*, *da*, *dg*, *dn*, und vier harmonische Strahlen ihre Verbindungsgeraden mit *G*, nämlich *efmn*, und wieder deren Schnittpunkte auf *g*: *EFMN*.

4. Man erhält also auch auf Grund der metrischen Definition der harmonischen Gebilde die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks bezw. Vierseits:

Satz 5. Die Seiten des vollständigen Vierecks mit den Verbindungsgeraden seiner Nebenecken bilden in jeder Nebenecke je vier harmonische Strahlen und erzeugen daher vier harmonische Punkte auf jeder Seite des Dreiecks der Nebenecken (sowie auch des vollständigen Vierecks selbst).

Satz 5a. Die Ecken des vollständigen Vierseits mit den Schnittpunkten seiner Nebenseiten bilden auf jeder Nebenseite je vier harmonische Punkte und erzeugen daher vier harmonische Strahlen in jeder Ecke des Dreiseits der Nebenseiten (sowie auch des vollständigen Vierseits selbst).

Erkl. 46. Man beachte wohl, dass in obenstehender Durchführung gar keine andern Voraussetzungen über die harmonischen Gebilde gemacht sind, als dass zu drei Elementen das vierte Element eindeutig zugeordnet sei mit Festhaltung der Paarung, und dass harmonische Punkte bezw. Strahlen bei jeder Projektion nur wieder harmonische Strahlen bezw. Punkte erzeugen. Im übrigen ist der ganze Beweisgang vollständig geometrisch gehalten (vergl. Antwort auf Frage 60 und 61 im VI. Teil in Kleyer-Sachs, Ebene Elementar-Geometrie). Aber eben jene Voraussetzungen sind es, welche aus der metrischen Definition entnommen werden

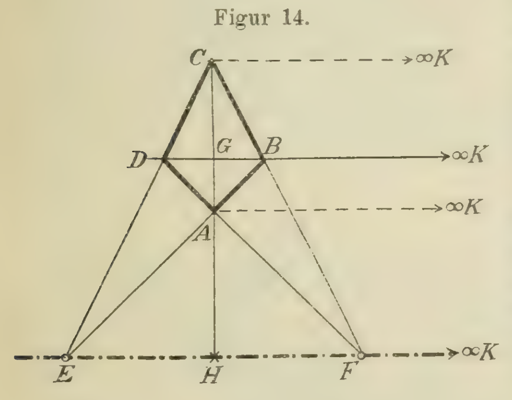
mussten. Denn gerade ihre Begründung war es, welche bei der rein geometrischen Definition der harmonischen Gebilde durch die Zuhilfenahme räumlicher Beweismittel bewerkstelligt werden musste.

Erkl. 47. Umgekehrt könnte man aber etwa, die Möglichkeit solcher Gruppierung voraussetzend (dass zu beliebigen drei Elementen ein viertes eindeutig zugeordnet sei, und dass diese Art der Zuordnung bei jeder Projektion erhalten bliebe), durch obenstehende Betrachtungsweise den Nachweis führen, dass im Viereck diese Eigenschaften erfüllt sind. Die Beweisführung an der Figur 5 (siehe Seite 5) würde dann etwa folgende Gestalt annehmen:

Der unbekannte vierte Punkt (K) zu EFH erzeugt aus B zu den drei Strahlen BE, BF, BH einen unbekannten BK, aus D zu den drei Strahlen DE, DF, DH einen unbekannten DK. Wegen der Eindeutigkeit erzeugen aber BE, BF, BH, BK auf AC denselben vierten Punkt zu ACH, wie auch DE, DF, DH, DK. Folglich müssen BK und DK durch denselben Punkt G auf AC gehen, d. h. K und G sind die Schnittpunkte von BD mit EF und AC.

Frage 16. Wie gelangt man umgekehrt von der rein geometrischen Definition der harmonischen Gebilde mittels des Vierecks zu den metrischen Eigenschaften der harmonischen Gebilde?

Figur 14.



Erkl. 48. Im Deltoid (siehe Figur 14) ist $AB = AD$ und $CB = CD$; folglich AC zugleich Mittelsenkrechte von BD und von EF, Winkelhalbierende von DCB und DAB bezw. EAF. Die Parallelen $AK \parallel EF \parallel CK \parallel DB$ gehen alle nach dem unendlich fernen Punkte der Geraden EF; AK und CK halbieren die Nebenwinkel von EAF bezw. ECF. Vier harmonische Punkte sind $EFHK$, $DGBK$, $CGAH$; vier harmonische Strahlen AE, AH, AF, AK und CE, CH, CF, CK.

Erkl. 49. Man erhält an dieser Stelle die äusserst wichtige Beziehung zwischen Mittelpunkt und unendlich fernem Punkte der Geraden EF, durch welche der Mittelpunkt einer Strecke definiert wird ganz ohne Rücksicht des gleichen Abstandes von den Endpunkten der Strecke. Somit wird der Mittelpunkt gewissermassen von seiner metrischen Eigenschaft (zwei gleichlange Strecken zu bilden) unabhängig gemacht und in gleiche Linie

Antwort. Um aus der Vierecksdefinition der harmonischen Gebilde die metrischen Eigenschaften derselben abzuleiten, macht man zunächst die Anwendung der allgemeinen Figur auf die besonderen Vierecke. Von diesen liefert insbesondere das Deltoid wichtige Ergebnisse. Bilden nämlich die vier Eckpunkte des Vierecks der ursprünglichen Figur 5 das Deltoid $ABCD$ in Figur 14, so ergibt die Symmetrie der Figur gegen AC als Achse, dass H Mittelpunkt von EF, K der unendlich ferne Punkt auf EF. Und von den vier harmonischen Strahlen nach $EFHK$ von A und C aus stehen zwei zugeordnete aufeinander senkrecht und halbieren Winkel und Nebenwinkel der beiden andern. Beide Ergebnisse sind auch anwendbar zur Konstruktion harmonischer Punkte und Strahlen. Man erhält demnach die Sätze:

Satz 6. Mittelpunkt und unendlich ferner Punkt einer Strecke bilden zugeordnete harmonische Punkte mit den Endpunkten der Strecke.

Und die Anwendungen dieses Satzes für Konstruktionen:

Satz 6a. Werden vier harmonische Strahlen geschnitten durch eine Parallele zu einem der Strahlen, so halbiert dessen zugeordneter Strahl den Abstand der Schnittpunkte des andern Strahlenpaares.

gestellt mit dem unendlich fernen Punkt einer Strecke. Wie dieser als „uneigentlicher Punkt“ der Strecke angesehen werden mag, ebenso der Mittelpunkt; aber auf Grund der metrischen Beziehung sind beide ohne Masseigenschaften durch rein geometrische Betrachtungsweise verknüpft.

Erkl. 50. Verbindet man einen ganz beliebigen Punkt der Zeichnungsebene (s. Fig. 14) mit den Punkten $EFHK$, so müssen nach Definition in Antwort auf Frage 8 vier harmonische Strahlen entstehen. Die entstehende Figur kann angesehen werden als ein Dreieck mit Grundseite EF, von dessen Spitze ausser den Seiten die Schwerlinie und die Parallele zur Grundseite ausgehen (s. Satz 6b). — Werden umgekehrt vier harmonische Strahlen durch eine Parallele zu einem davon geschnitten, so müssen nach Satz 2 vier harmonische Punkte entstehen. Wegen der Parallelität liegt aber einer dieser vier Punkte im Unendlichen, folglich muss dessen zugeordneter der Mittelpunkt der Strecke der beiden andern sein (siehe Satz 6a). — Und dieser letztere Umstand liefert wieder den Beweis zum Satz 7a. Denn schneidet man jene vier Strahlen durch eine Senkrechte zu einem der zugeordneten Normalstrahlen, so wird der andere im Unendlichen geschnitten; daher ist der Schnittpunkt mit dem ersten Normalstrahl Mittelpunkt der Grundseite eines Dreiecks: und dessen Mittelsenkrechte geht durch die Spitze und halbiert auch den Winkel daselbst.

Erkl. 51. Die Sätze 6 und 7 bezw. 6a und 7b zeigen nur noch teilweise Erinnerungen der Dualität; denn im Strahlenbüschel besteht kein Element von so absonderlichen Massverhältnissen wie der unendlich ferne Punkt in der Punktreihe. Lässt man aber Mittelpunkt einer Strecke und Halbierungsgerade eines Winkels einander entsprechen, so treten unendlich ferner Punkt und senkrecht zugeordneter Strahl ebenfalls als entsprechend gegenüberstehende Elemente auf. Umgekehrt erscheint aber auch wieder in der Punktreihe kein Element von so auffallenden Masseigenschaften wie im Strahlenbüschel der rechte Winkel. Daher kann bei der Aufstellung von Masseigenschaften die Dualität manchmal ganz verschwinden, manchmal (wie oben) nur andeutungsweise auftreten, und nur in seltenen Fällen ganz deutlich zur Durchführung gelangen.

Erkl. 52. Das Deltoid ist keineswegs das einzige der besonderen Vierecke, welches obige Masseigenschaften liefert, bloss treten sie dort am einfachsten zu Tage. Beim Trapez (siehe Figur 15) rückt der Punkt E selbst ins Unendliche, und so wird F der Mittelpunkt von H und K. (Nach planimetrischer Beweisführung verhalten sich

$HF : AB = FC : BC = FD : AD = FK : AB$,

also $HF = FK$). Vier harmonische Punkte

Satz 6b. Man erhält vier harmonische Strahlen, wenn man einen beliebigen Punkt verbindet mit den Endpunkten einer Strecke, ihrem Mittelpunkt und ihrem unendlich fernen Punkt.

Satz 7. Die Halbierungsgeraden des Winkels und Nebenwinkels zweier Geraden bilden zugeordnete harmonische Strahlen mit den Winkelschenkeln.

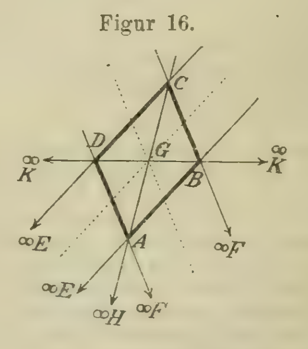
Oder mit andern Worten bezw. umgekehrt (vergl. Erkl. 49):

Satz 7a. Wenn von vier harmonischen Strahlen zwei zugeordnete aufeinander senkrecht stehen, so halbieren sie Winkel und Nebenwinkel der andern beiden Strahlen.

Satz 7b. Man erhält vier harmonische Punkte durch den Schnitt jeder Geraden mit zwei beliebigen Strahlen und den Halbierungsgeraden ihres Winkels und Nebenwinkels.

Figur 15.

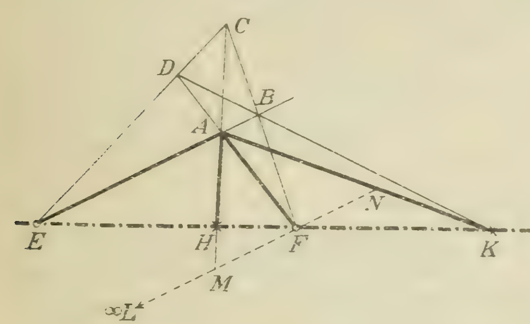
Figur 16.



sind auch hier $HAGC$ und $DGBK$. Wird das Trapez zum Antiparallelogramm, so weisen die Strahlen aus F oder G die im Satz 7 genannte Eigenschaft auf. — Beim Parallelogramm (s. Figur 16) fällt die Gerade $EFHK$ selbst ins Unendliche, so dass $EFHK$ zu vier harmonischen Punkten auf der unendlich fernen Geraden werden; die harmonischen Punkte $CGAH$ und $DGBK$ liefern wieder den Satz 6. Wird das Parallelogramm zum Rhombus bezw. Rechteck, so zeigen die vier harmonischen Strahlen in den Ecken bezw. jene im Punkte G die Eigenschaft des Satzes 7.

Frage 17. Wie erhält man aus den vorigen Ueberlegungen die Proportion für die harmonische Teilung unter vier beliebigen Punkten?

Figur 17.



Erkl. 53. Statt der Parallelen zu AE durch F kann man auch benützen die Parallele zu AH durch K, zu AF durch E oder zu AK durch H. Jedesmal erlangt man dieselben Proportionen, welche besagen, dass Strecke EF innen durch H und aussen durch K im gleichen Verhältnis geteilt ist, und ebenso Strecke HK innen durch F und aussen durch E im gleichen Verhältnis; dabei ist letzteres Teilungsverhältnis freilich von dem vorigen verschieden.

Erkl. 54. Um zwischen den Teilungsverhältnissen, nach denen die Strecken EF bezw. HK einander teilen, einen Zusammenhang herzustellen, lässt man am besten jede der Strecken am äussersten Punkte der Zeichnung anfangen: dann fällt jedesmal der äussere Teilpunkt jenseits des zweiten Streckenpunktes, der innere Teilpunkt näher dem zweiten als dem ersten Streckenpunkte, und das Teilungsverhältnis selbst wird (ohne Rücksicht auf Vorzeichen) jedesmal grösser als die Einheit. Bezeichnet man demnach mit x das Teilungsverhältnis von EF durch H und K, mit y das Teilungsverhältnis von KH durch F und E, so wird:

$$x = \frac{EH}{HF} = \frac{EK}{KF}; \quad y = \frac{KF}{FH} = \frac{KE}{EH}.$$

Antwort. Sind $EFHK$ in Figur 17 vier beliebige harmonische Punkte, erzeugt durch das Viereck $ABCD$, so sind AE, AF, AH, AK vier harmonische Strahlen. Legt man nun durch einen der vier harmonischen Punkte $EFHK$ eine Parallele zu dem Strahle von A nach dem zugeordneten Punkte (in Figur 17 durch F Parallele zu AE), so wird diese Parallele von den vier Strahlen aus A geschnitten in vier harmonischen Punkten, wovon wegen der Parallelität einer (L) unendlich fern liegt; folglich ist der Schnittpunkt des zugeordneten Strahles AF, nämlich F selbst der Mittelpunkt von MN, oder $FM = FN$. Nun entstehen wegen der Parallelität ähnliche Dreiecke, nämlich:

$$EAH \sim FMH \text{ und } EAK \sim FNK.$$

folglich:

$$EH : FH = EA : FM$$

und

$$EK : FK = EA : FN.$$

Wegen $FM = FN$ sind aber die rechten Seiten gleich, folglich auch die linken, und man hat:

$$EH : FH = EK : FK,$$

oder auch:

$$HE : EK = HF : FK.$$

Satz 8. Von vier harmonischen Punkten teilen je zwei zugeordnete die Strecke der beiden andern innen und aussen im gleichen Verhältnis.

Erweitert man etwa den ersten Ausdruck für y mit EK, so wird:

$$y = \frac{KF}{EK} \cdot \frac{EK}{FH} = \frac{1}{x} \cdot \frac{EK}{FH}$$
$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{KF + FH + HE}{FH}$$
$$= \frac{1}{x}\left(\frac{KF}{FH} + \frac{FH}{FH} + \frac{HE}{FH}\right)$$
$$= \frac{1}{x}(y + 1 + x).$$

Hieraus kommt:

$$xy = y + 1 + x,$$

also nebeneinander:

$$xy - y = x + 1, \quad xy - x = y + 1,$$
$$y = \frac{x+1}{x-1}. \qquad x = \frac{y+1}{y-1}.$$

Somit geht je das eine Teilungsverhältnis symmetrisch aus dem andern hervor; und die gleiche Grösse beider Teilungsverhältnisse kann nur eintreten für den Wert:

$$x = y = \sqrt{2} + 1,$$

d. h. für die symmetrische Anordnung der Strecken:

$$EH = FK = 2{,}414 \cdot HF.$$

Erkl. 55. Die folgende Figur 18 bietet Gelegenheit, einige Bestätigungen dieser Formeln zu bilden: In der ersten bezw. fünften Zeile ist zu setzen:

$$x = 2:1 = 6:3 \text{ bezw. } = 4:2 = 12:6 = 2,$$

also:

$$y = \frac{2+1}{2-1} = 3,$$

und in der That zeigt die Figur:

$$y = 3:1 = 6:2 \text{ bezw. } = 6:2 = 12:4 = 3.$$

Setzt man umgekehrt $y = 3$, so folgt wieder:

$$x = \frac{3+1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ebenso liefert etwa die letzte Zeile:

$$x = 5:3 = 20:12 = \frac{5}{3},$$

also:

$$y = \frac{\frac{5}{3}+1}{\frac{5}{3}-1} = \frac{8}{2} = 4,$$

nämlich:

$$y = 12:3 = 20:5;$$

und rückwärts:

$$x = \frac{4+1}{4-1} = \frac{5}{3}.$$

Frage 18. Weshalb heisst die Teilung die harmonische?

Antwort. Die Teilung einer Strecke im gleichen Verhältnis innen und aussen heisst die harmonische, weil die geteilte Strecke zum harmonischen Mittel wird zwischen den Abständen vom Anfangspunkt der Strecke nach je einem Teilpunkt, oder was dasselbe ist, weil die drei vom Anfangspunkt der Strecke ausgehenden Abstände eine stetige harmonische Proportion oder eine harmonische Reihe bilden.

Zum Beweise drückt man in der Proportion für die harmonische Teilung alle Strecken durch die Abstände vom Anfangspunkt aus.

$$\frac{EH}{HF} = \frac{EK}{KF}$$

gibt dann:

$$\frac{EH}{EF - EH} = \frac{EK}{EK - EF}.$$

Hieraus folgt:

$$EH \cdot EK - EH \cdot EF = EF \cdot EK - EH \cdot EK.$$

also:

$$2\,EH \cdot EK = EF(EH + EK),$$
$$EF = \frac{2 \cdot EH \cdot EK}{EH + EK}$$

oder:

$$\frac{1}{EF} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{EH} + \frac{1}{EK}\right).$$

Erkl. 56. Harmonisches Mittel zweier Grössen ist diejenige Grösse, deren reciproker Wert das arithmetische Mittel der Reciproken jener zwei Grössen ist. — Harmonische Reihe ist eine Reihe von Grössen, deren Reciproke eine arithmetische Reihe bilden, wobei also jedes Glied harmonisches Mittel des vorhergehenden und folgenden ist. — Stetige harmonische Proportion heisst die Gleichsetzung der beiden Differenzen zwischen dem Reciproken des Mittels und den Reciproken der beiden gegebenen Grössen. So ist 8 das harmonische Mittel von 6 und 12, weil

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right);$$

und dies lässt sich schreiben in Gestalt der harmonischen Proportion:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12}.$$

Sind die gegebenen Grössen a und b, so ist für das harmonische Mittel m:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{m} = \frac{1}{m} - \frac{1}{b},$$

oder:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

also:

$$m = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a + b},$$

wie nebenstehend für EF mit EH und EK.

Erkl. 57. In Figur 18 ist sechsmal dieselbe Strecke harmonisch geteilt, und zwar nach den Verhältnissen:

2 : 1, 3 : 2, 4 : 3, allg. $n : (n-1)$;

3 : 1, 4 : 2, 5 : 3, allg. $n : (n-2)$.

Es gibt im ganzen nur 14 unabhängige harmonische Teilungsverhältnisse, in denen vier ganze Zahlen unter 100 auftreten, nämlich (vergl. Kleyer-Sachs, Lehrbuch der Ebenen Elementar-Geometrie, VI. Teil, Aufgabe 145):

1 : 2 = 3 : 6	4 : 5 = 36 : 45	6 : 14 = 15 : 35	14 : 22 = 63 : 99
2 : 3 = 10 : 15	5 : 6 = 55 : 66	7 : 9 = 56 : 72	15 : 40 = 33 : 88.
3 : 4 = 21 : 28	5 : 7 = 30 : 42	10 : 18 = 35 : 63	
3 : 5 = 12 : 20	6 : 7 = 78 : 91	12 : 21 = 44 : 77	

Man bestätigt in Figur 18 in der ersten Zeile mit den Abständen 2, 3, 6 (von links) bezw. 3, 4, 6 (von rechts), dass:

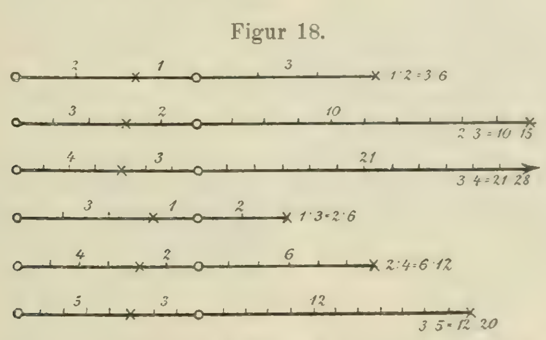
$$3 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 6}{2+6} \text{ und } \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right),$$

bezw.:

$$4 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 6}{3+6} \text{ und } \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right).$$

Der Name **harmonisches Mittel** rührt von den alten Pythagoreern her und steht im Zusammenhang damit, dass zu den Tönen zweier Saiten von beliebig gegebener Länge diejenige dritte Saite den am besten klingenden Mittelton gibt, deren Länge das harmonische Mittel der Längen der beiden andern Saiten ist (dabei alle drei Saiten aus gleichem Stoff und von gleicher Spannung vorausgesetzt).

Figur 18.



Erkl. 58. Bezeichnet l die Länge, n die Schwingungszahl einer Saite, so ist nach akustischer Theorie:

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{p}{\mu}},$$

wo p die Spannung der Saite (in Dynen), μ die Masse eines Saitenstücks von 1 cm Länge (in Grammen) bedeutet. Da nun zu zwei Tönen mit Schwingungszahlen n_1 und n_2 der bestklingende Zwischenton derjenige ist, dessen Schwingungszahl das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(n_1 + n_2)$ ist, so muss nach obiger Formel zu den Tönen zweier Saiten mit Längen l_1 und l_2, aber mit gleichen Werten p und μ, diejenige Saite den bestklingenden Zwischenton liefern, deren reciproke Länge das arithmetische Mittel aus den reciproken Längen $\frac{1}{l_1}$ und $\frac{1}{l_2}$ ist, d. h. deren Länge das harmonische Mittel aus den beiden Längen l_1 und l_2 ist. — Hat man z. B. wie in voriger Erkl. 57 die Längen $l_1 = 2$ und $l_2 = 6$, so wären die Schwingungszahlen der Töne proportional: n_1 mit $\frac{1}{2}$ und n_2 mit $\frac{1}{6}$, also ist der erste die Duodecime des zweiten; der beste Zwischenton, wofür n_3 proportional $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$, wird die Oktave des tiefern Tons, $l_3 = 3$; und ebenso liefert $m = \frac{2 \cdot 2 \cdot 6}{2+6} = 3$. Ist $l_1 = 3$, $l_2 = 6$,

so hat man Schwingungszahlen n_1 und n_2 proportional $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}$, und der erste Ton ist die Oktav des zweiten; der beste Zwischenton, wofür n_3 proportional $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{4}$, wird die Quinte des tiefern, $l_3 = 4$; und ebenso entsteht als harmonisches Mittel von 3 und 6:

$$m = \frac{2 \cdot 3 \cdot 6}{3+6} = 4;$$

ähnlich zwischen der Sext die Quart, zwischen der Quint die Terz u. s. w.

Frage 19. Welche analoge Beziehung entsteht unter vier harmonischen Strahlen?

Erkl. 59. Wenn:

$$\frac{\sin(eh)}{\sin(hf)} = -\frac{\sin(ek)}{\sin(kf)},$$

so muss von den Teilstrahlen h und k stets der eine den Innenwinkel, der andere den Nebenwinkel von (ef) teilen; also zeigt auch diese Definition, dass bei harmonischen Strahlen wieder jedes Paar zugeordneter Strahlen durch das andere Paar zugeordneter Strahlen getrennt ist. — Weil dabei auch:

$$\frac{\sin(he)}{\sin(ek)} = -\frac{\sin(hf)}{\sin(fk)},$$

so erkennt man, dass auch bei harmonischen Strahlen je zwei zugeordnete den Winkel der beiden andern innen und aussen im gleichen (Sinus-) Verhältnis teilen. — Dagegen besteht zwischen den beiderlei Teilungen wegen der irrationalen Funktionswerte nicht mehr eine so einfache rationale Beziehung, wie sie in Erkl. 54 für die Teilungen einer Strecke abgeleitet wurde. [Im Falle des Satzes 7 z. B. würde:

$$x = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{\sin(90+\alpha)}{-\sin(90-\alpha)} = 1;$$

dagegen:

$$y = \frac{\sin(90-\alpha)}{\sin\alpha} = -\frac{\sin(90+\alpha)}{-\sin\alpha} = ctg\,\alpha]$$

Erkl. 60. Bei Zeichenwechsel des Winkels wechseln die ungeraden Funktionen *sin*, *tg*, *ctg* ebenfalls das Zeichen, die einzige gerade Funktion *cos* behält gleiches Zeichen. — Die Funktionen *cos*, *tg*, *ctg* sind zwischen 90° und 180° negativ, *sin* positiv; dagegen im dritten Quadranten *sin* und *cos* negativ, *tg* und *ctg* positiv. — Für Winkel $180 \pm \alpha$ bleibt das Funktionszeichen dasselbe wie für α, für Winkel $90 \pm \alpha$ geht es in das Zeichen der Kofunktion über. Also:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(90 \mp \alpha) = +\cos\alpha$	$\sin(180 \mp \alpha) = \pm\sin\alpha$
$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$	$\cos(90 \mp \alpha) = \pm\sin\alpha$	$\cos(180 \mp \alpha) = -\cos\alpha$
$tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$	$tg(90 \mp \alpha) = \pm ctg\,\alpha$	$tg(180 \mp \alpha) = \mp tg\,\alpha$
$ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$	$ctg(90 \mp \alpha) = \pm tg\,\alpha$	$ctg(180 \mp \alpha) = \mp ctg\,\alpha.$

(Vergl. das Lehrbuch der Goniometrie von Kleyer.)

Antwort. Da das Doppelverhältnis von vier Strahlen $abcd$ angegeben wird durch den Quotienten:

$$(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)},$$

und bei harmonischen Strahlen der Wert des Doppelverhältnisses gleich -1 ist, so erhält man für die durch die Punkte $EFHK$ gehenden Strahlen $efhk$ das Doppelverhältnis:

$$(efhk) = -1 = \frac{\sin(eh)}{\sin(hf)} : \frac{\sin(ek)}{\sin(kf)}$$

oder:

$$\frac{\sin(eh)}{\sin(hf)} = -\frac{\sin(ek)}{\sin(kf)}$$

oder:

$$\frac{\sin(he)}{\sin(ek)} = -\frac{\sin(hf)}{\sin(fk)}.$$

Drückt man auch hier alle Winkel durch die Winkel der Strahlen mit dem Anfangsstrahl e aus, so wird (stets unter Berücksichtigung der Vorzeichen je nach der Drehungsrichtung des Winkels):

$$\sphericalangle(hf) = (he) + (ef),$$
$$\sphericalangle(fk) = (fe) + (ek),$$

also:

$$\frac{\sin(eh)}{\sin(ek)} = \frac{\sin[(he)+(ef)]}{\sin[(fe)+(ek)]}$$
$$= \frac{\sin(he)\cos(ef) + \cos(he)\sin(ef)}{\sin(fe)\cos(ek) + \cos(fe)\sin(ek)}.$$

Hieraus entsteht:

$$\sin(eh)\sin(fe)\cos(ek) + \sin(eh)\cos(fe)\sin(ek)$$
$$= \sin(ek)\sin(he)\cos(ef) + \sin(ek)\cos(he)\sin(ef),$$

und durch Zusammenfassung nach den Funktionen des Winkels $(ef) = -(fe)$,

Erkl. 61. Das nebenstehende Ergebnis zeigt, dass zwar nicht für die Winkel selbst, auch nicht für die in der Proportion und im Doppelverhältnisse auftretenden Sinusfunktionen, wohl aber für die Tangenten die Beziehung besteht, dass die tg des geteilten Winkels (ef) harmonisches Mittel ist zwischen den Tangenten der Winkel des Anfangsstrahles e mit den beiden Teilungsstrahlen h und k. Denn $tg\,(ef)$ entsteht aus den $tg\,(eh)$ und $tg\,(ek)$, wie in Antwort auf Frage 18 EF aus EH und EK. Die Gleichung der reciproken Werte nimmt allerdings eine etwas veränderte Form an, weil $\frac{1}{tg}$ durch ctg ersetzt wird.

Erkl. 61a. Die Formel:

$$ctg\,(ef) = \frac{1}{2}\,[ctg\,(eh) + ctg\,(ek)]$$

gilt laut Ableitung für beliebige vier harmonische Strahlen in der Weise, dass deren Anfangsstrahl einen kleinsten, einen mittleren und einen grössten Winkel in gleicher Drehungsrichtung bildet mit den drei übrigen Strahlen, und dass die tg des mittleren Winkels (zwischen dem Anfangsstrahl und dem zugeordneten Strahl) harmonisches Mittel ist zwischen den Tangenten der beiden andern Winkel (zwischen dem Anfangsstrahl und den nicht zugeordneten Strahlen). Nun kann aber nach Erkl. 28 und 31 und Figur 11 bei vier harmonischen Strahlen jeder als Anfangsstrahl gewählt werden, indem jeder Strahl nicht nur nach seiner einen Richtung, sondern auch in Richtung seines Scheitelstrahls genommen werden kann. Dadurch erhält man die Beziehung nebenstehender Antwort in vier verschiedenen Anordnungen, nämlich $\sphericalangle (ef)$ als Winkel der zugeordneten mit Anfang in e oder in f, und $\sphericalangle (hk)$ als Winkel der zugeordneten mit Anfang in k oder h. Man erhält also nach Figur 19 zunächst für dieselben Strahlen $efhk$:

1. mit Anfangsstrahl e die Gleichung:

$$ctg\,(ef) = \frac{1}{2}\,[ctg\,(eh) + ctg\,(ek)].$$

2. mit Anfangsstrahl k die Gleichung:

$$ctg\,(kh) = \frac{1}{2}\,[ctg\,(kf) + ctg\,(ke)]:$$

dann:

3. für die Strahlen $fhek'$ mit Anfangsstrahl f die Gleichung:

$$ctg\,(fe) = \frac{1}{2}\,[ctg\,(fh) + ctg\,(fk')]$$

und

$$= \frac{1}{2}\,[ctg\,(fh) - ctg\,(kf)].$$

4. für die Strahlen $hfke'$ mit Anfangsstrahl h die Gleichung:

$$ctg\,(hk) = \frac{1}{2}\,[ctg\,(hf) + ctg\,(he')]$$

$$= \frac{1}{2}\,[ctg\,(hf) - ctg\,(eh)].$$

für welchen $sin\,(ef) = -\,sin\,(fe)$, aber $cos\,(ef) = +\,cos\,(fe)$ ist:

$$-sin\,(ef)\,sin\,(eh)\,cos\,(ek) - sin\,(ef)\,cos\,(eh)\,sin\,(ek)$$
$$= -\,cos\,(ef)\,sin\,(eh)\,sin\,(ek)$$
$$-\,cos\,(ef)\,sin\,(eh)\,sin\,(ek),$$

also:

$$sin\,(ef)\,[sin\,(eh)\,cos\,(ek) + cos\,(eh)\,sin\,(ek)]$$
$$= 2\,cos\,(ef)\,sin\,(eh)\,sin\,(ek).$$

Dividiert man beide Seiten mit $sin\,(ef)$ und mit $2\,sin\,(eh)\,sin\,(ek)$, so entsteht:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{sin\,(eh)\,cos\,(ek)}{sin\,(eh)\,sin\,(ek)} + \frac{cos\,(eh)\,sin\,(ek)}{sin\,(eh)\,sin\,(ek)}\right] = \frac{cos\,(ef)}{sin\,(ef)}$$

oder:

$$ctg\,(ef) = \frac{1}{2}\,[ctg\,(eh) + ctg\,(ek)].$$

Dies gibt analog der Antwort auf Frage 18:

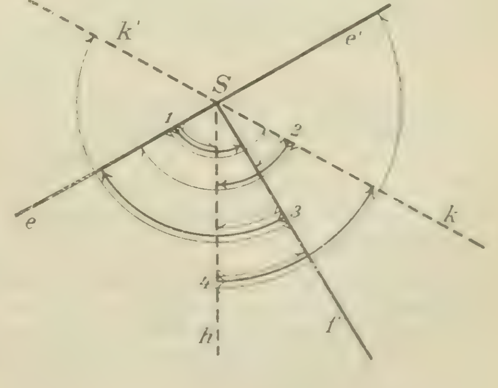
$$\frac{1}{tg\,(ef)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{tg\,(eh)} + \frac{1}{tg\,(ek)}\right]$$

oder:

$$tg\,(ef) = \frac{2\,tg\,(eh)\,tg\,(ek)}{tg\,(eh) + tg\,(ek)}.$$

Also ist die trigonometrische Tangente des geteilten Winkels (ef) auch das harmonische Mittel der Tangenten von (eh) und (ek), die Kotangente von (ef) das arithmetische Mittel der Kotangenten von (eh) und (ek), wie bei den Punkten die Strecke EF das harmonische Mittel von EH und EK war.

Figur 19.



Erkl. 62. Die Beziehung:

$$ctg\,(ef) = \frac{1}{2}\,[ctg\,(eh) + ctg\,(ek)]$$

liefert auch den algebraischen Beweis für die Aussage des Satzes 7 bezw. 7a. Denn wenn man

1. den $\sphericalangle (ef) = 90^0$ setzt, so wird:

$$ctg\,(ef) = ctg\,90^0 = 0,$$

folglich:

$$ctg\,(eh) = -\,ctg\,(ek),$$

und hiernach entweder:

$$\sphericalangle (eh) = -\,(ek),$$

also:

$$(ke) = (eh),$$

oder:

$$(eh) = 180 - (ek).$$

Beides ergibt aber an der Figur das gleiche Ergebnis, dass nämlich die Strahlen h und k gleiche Winkel bilden einerseits mit f, anderseits mit e. Setzt man umgekehrt:

2. $(eh) = \frac{1}{2}(ef)$, so wird:

$$ctg\,(ef) = \frac{1}{2}\left[ctg\,\frac{(ef)}{2} + ctg\,(ek)\right].$$

Nun ist bei Umsetzung nach dem halben Winkel:

$$ctg\,(ef) = \frac{cos\,(ef)}{sin\,(ef)} = \frac{cos^2\frac{(ef)}{2} - sin^2\frac{(ef)}{2}}{2\,sin\,\frac{(ef)}{2}\cdot cos\,\frac{(ef)}{2}} = \frac{1}{2}\,ctg\,\frac{(ef)}{2} - \frac{1}{2}\,tg\,\frac{(ef)}{2}.$$

Folglich wird eben diese linke Seite wie vorhin:

$$\frac{1}{2}\,ctg\,\frac{(ef)}{2} - \frac{1}{2}\,tg\,\frac{(ef)}{2} = \frac{1}{2}\,ctg\,\frac{(ef)}{2} + \frac{1}{2}\,ctg\,(ek),$$

und unter beiderseitigem Fortfall von $\frac{1}{2}\,ctg\,\frac{(ef)}{2}$ wird:

$$ctg\,(ek) = -\,tg\,\frac{(ef)}{2} = ctg\left[90 + \frac{(ef)}{2}\right],$$

also wieder:

$$(ek) = 90 + \frac{(ef)}{2} = 90 + (eh),$$

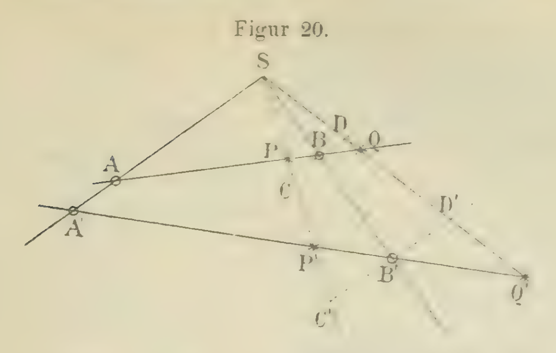
d. h. der Strahl k senkrecht auf dem Strahl h.

Frage 20. Wie erlangt man die Haupteigenschaft der harmonischen Strahlen, wenn bloss die Definition der harmonischen Punkte durch die Proportion der harmonischen Teilung vorausgesetzt wird?

Erkl. 63. Das erste Ergebnis der nebenstehenden Ueberlegung, dass $CB = DB$, ist als Beweis des Satzes 6 anzusehen auf Grund der in der obigen Frage genannten Voraussetzung. Der Satz würde dann auszusprechen sein in der Form des Satzes 6a, dass nämlich zwei gleiche Abschnitte entstehen auf einer Parallelen zu einem von vier harmonischen Strahlen.

Antwort. Die Haupteigenschaft harmonischer Strahlen, dass sie nämlich auf jeder beliebigen Geraden vier harmonische Punkte ausschneiden, kann folgendermassen bewiesen werden. Es seien in Figur 20 $ABPQ$ vier harmonische Punkte, definiert durch die Proportion $AP : PB = AQ : QB$; und die vier Strahlen SA, SB, SP, SQ treffen eine beliebige andere Gerade in den Punkten

Figur 20.



Erkl. 64. Die Aehnlichkeit der Dreiecke folgt jeweils aus der Gleichheit der drei Winkel (als gemeinsame Winkel und korrespondierende bezw. als Scheitelwinkel und Wechselwinkel). — Dass wegen $CB = DB$ auch $C'B' = D'B'$ sein muss, folgt aus dem planimetrischen Satze, dass eine Transversale durch eine Ecke eines Dreiecks jede Parallele zur Gegenseite im gleichen Verhältnis teilt, wie die Gegenseite selbst. Es verhält sich nämlich:

$$CB : C'B' = SB : SB'$$

und ebenso:

$$BD : B'D' = SB : SB',$$

also allgemein:

$$CB : C'B' = BD : B'D'$$

oder:

$$CB : BD = C'B' : B'D'.$$

Ist also insbesondere dies Verhältnis $= 1$, so ist gleichzeitig:

$$CB = BD \text{ und } C'B' = B'D'.$$

Erkl. 65. Die vorliegende Antwort auf Frage 20 bildet gewissermassen den Abschluss der Identitätsbeweise, durch welche gezeigt wird, dass die nach den verschiedensten Behandlungsweisen als harmonische definierten Gebilde doch sämtlich identisch sind: In den Antworten auf die Fragen 13 bis 15 erhielt man aus der Definition mit Doppelverhältnissen die Proportion der harmonischen Teilung und die Viereckseigenschaften (dualistisch); in den Antworten auf die Fragen 16 und 17 lieferten umgekehrt die Viereckseigenschaften die Proportion und sonstige metrische Beziehungen; Antwort auf Frage 20 zeigt, dass die Proportion allein genügt, um die Lehre der harmonischen Strahlen zu begründen. Im Folgenden können also jeweils nach Bedarf die am besten geeigneten Grundlagen zur Untersuchung ausgewählt werden (vergl. auch Aufgabe 58 der Aufgabensammlung am Ende dieses Teiles).

$A'B'P'Q'$. Dann zieht man durch die entsprechenden Punkte B und B' Parallelen mit dem zu SBB' zugeordneten Strahl SA. Hierbei entstehen wegen der Parallelen die ähnlichen Dreiecke:

1. $APS \sim BPC$,

folglich:

$$AP : PB = AS : CB;$$

2. $AQS \sim BQD$,

folglich:

$$AQ : QB = AS : DB;$$

hier sind aber wegen der Definition der Punkte $ABPQ$ die linken Seiten einander gleich, daher auch die rechten:

$$AS : CB = AS : DB,$$

d. h.:

$$CB = DB.$$

Hiernach ist der Strahl SBB' Mittellinie im Dreieck SCD, und folglich wegen der parallelen Grundseiten auch im Dreieck $CC'D'$; also ist auch:

$$C'B' = D'B'.$$

Nun sind aber weitere ähnliche Dreiecke an der Schnittlinie $A'B'P'Q'$:

3. $A'P'S \sim B'P'C'$,

folglich:

$$A'P' : P'B' = A'S : C'B';$$

4. $A'Q'S \sim B'Q'D'$,

folglich:

$$A'Q' : Q'B' = A'S : D'B'.$$

Hier sind aber wegen des vorigen Ergebnisses die rechten Seiten einander gleich, daher auch die linken, und man erhält so auch für die v Punkte $A'B'P'Q'$ die Proportion d harmonischen Teilung:

$$A'P' : P'B' = A'Q' : Q'B'.$$

Frage 21. Welche Beziehungen zwischen vier harmonischen Elementen ergeben sich durch Berücksichtigung derjenigen Werte ihres Doppelverhältnisses, welche nicht der negativen Einheit gleich sind?

Antwort. Von den sechs im allgemeinen verschiedenen Werten des Doppelverhältnisses sind bei den harmonischen Gebilden:

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} = -1,$$

$$1 - \lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda} = 2,$$

$$\frac{1}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} = \frac{1}{2}.$$

Wenn man die letzteren beiden in Rücksicht zieht, so entsteht in jedem Falle dieselbe einzige Beziehung:

$$\underline{AD \cdot CB = AC \cdot BD = \frac{1}{2} AB \cdot CD,}$$

bezw. für die Winkelfunktionen:

$$\underline{\sin(ad)\sin(cb) = \sin(ac)\sin(bd)}$$
$$\underline{= \frac{1}{2}\sin(ab)\sin(cd).}$$

Setzt man nämlich:

$$(ACBD) = (ADBC) = 2,$$

bezw.:

$$(ACDB) = (ADCB) = \frac{1}{2},$$

so erhält man:

$$\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = 2 \text{ und } \frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = 2,$$

bezw.:

$$\frac{AD}{DC} : \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \text{ und } \frac{AC}{CD} : \frac{AB}{BD} = \frac{1}{2}.$$

Bildet man die Produktengleichheiten, so entsteht j e d e s m a l in irgend einer umgestellten Form der Faktorenstrecken das Produkt $AB \cdot CD$; und dasselbe erhält als Gegenwert in den beidemale v o r a n s t e h e n d e n Fällen:

$$2 \cdot AD \cdot CB,$$

in den beidemale n a c h s t e h e n d e n Fällen:

$$2 \cdot AC \cdot BD.$$

Diese Produkte $AD \cdot CB = AC \cdot BD$ sind nun hier nichts anderes als die aus der Proportion der harmonischen Teilung hervorgehenden Produkte der äusseren und inneren Glieder.

Da aber für die Sinus der Winkel der Strahlen und die Teilstrecken der Punkte ganz die gleichen Proportionen

Erkl. 66. Die Werte des Doppelverhältnisses, welche gleich $1 - \lambda$ sind, gehen aus den mit λ gleichwertigen hervor durch Vertauschung des Mittelgliedes, also $(abcd)$, $(bdac)$, $(cadb)$, $(dbca)$; die gleich $\frac{\lambda}{\lambda - 1}$ sind, durch Vertauschung des zweiten und vierten Gliedes, oder ersten und dritten, also $(adcb)$, $(bcda)$, $(cbad)$, $(dabc)$; die gleich $\frac{\lambda - 1}{1}$ bezw. gleich $\frac{1}{1 - \lambda}$ sind, durch Vertauschung erst zweier zugeordneten und dann der mittleren bezw. erst der mittleren und dann zweier zugeordneten, also $(adbc)$, $(bcad)$, $(cbda)$, $(dacb)$ bezw. $(acdb)$, $(bdca)$, $(cabd)$, $(dbac)$. Und wenn man für alle sechzehn Fälle die Produkte aufstellt, so entsteht achtmal die eine und achtmal die andere der beiden Gleichheiten, wie nebenstehend.

Erkl. 67. Das Formelergebnis in Satz 9 und 9a der nebenstehenden Antwort lässt sich folgendermassen umsetzen in die Angabe in Satz 9b über Teilungsverhältnisse. Setzt man:

$$AD \cdot CB = \frac{1}{2} AB \cdot CD,$$

so entsteht:

$$\frac{AB}{BC} = 2 \cdot \frac{AD}{DC}$$

oder:

$$\frac{BA}{AD} = 2 \cdot \frac{BC}{CD};$$

ebenso liefert:

$$AC \cdot BD = \frac{1}{2} AB \cdot CD$$

die Beziehung:

$$\frac{AB}{BD} = 2 \cdot \frac{AC}{CD}$$

oder:

$$\frac{BA}{AC} = 2 \cdot \frac{BD}{DC}.$$

Analog entstehen in den Sinusquotienten:

$$\frac{\sin(ab)}{\sin(bc)} = 2 \cdot \frac{\sin(ad)}{\sin(dc)}$$

oder:

$$\frac{\sin(ba)}{\sin(ad)} = 2 \cdot \frac{\sin(bc)}{\sin(cd)},$$

und ebenso:

$$\frac{\sin(ab)}{\sin(bd)} = 2 \cdot \frac{\sin(ac)}{\sin(cd)}$$

oder:

$$\frac{\sin(ba)}{\sin(ac)} = 2 \cdot \frac{\sin(bd)}{\sin(dc)}.$$

Nun ist aber $\frac{AB}{BC}$ bezw. $\frac{\sin(ab)}{\sin(bc)}$ das Teilungsverhältnis der Strecke AC oder des Winkels (ac) durch Punkt B oder Strahl b, und ebenso die andern; also erhält man die andere Ausdrucksweise des nebenstehenden Satzes 9 b. Dabei ergibt die gegenseitige Lage der Elemente auf Grund der Betrachtungen in den Antworten auf die Fragen 33 und 34 des I. Teiles, welches der beiden Teilungsverhältnisse den grösseren und welches den kleineren Wert hat.

Erkl. 68. Vier harmonische Punkte bilden immer eine geschlossene Gruppe mit zwei äussersten und zwei mittleren Punkten; bei vier harmonischen Strahlen dagegen kann für die Gruppierung jede der in Erkl. 31 und Figur 11 betrachteten Anordnungen gewählt werden, ohne dass die Gültigkeit der nebenstehenden Sätze irgend beeinflusst wird.

Erkl. 69. Als Bestätigung nebenstehender Sätze von vier harmonischen Punkten nehme man etwa aus Figur 18 die letzte Zeile; man findet (siehe Satz 9):

$$AD \cdot CB = 20 \cdot 3, \quad AC \cdot BD = 5 \cdot 12.$$
$$AB \cdot CD = 8 \cdot 15,$$

erstere beiden gleich 60, letzteres 120.

gelten, so erhält man für diese gleichen Produkte der Strecken bezw. der Sinus einen neuen Wert, nämlich wie oben gleich dem halben Produkt aus der grössten und mittleren Strecke der Punkte bezw. aus den Sinuswerten des grössten und des mittleren Winkels der Strahlen. Betrachtet man als benachbarte Elemente jeweils AC, CB, BD und (durch den unendlich fernen Punkt vereinbar) AD, so erhält man:

Satz 9. Bei vier harmonischen Punkten sind die beiden Produkte der Streckenlängen zwischen je zwei benachbarten Punktepaaren einander gleich und gleich dem halben Produkt der Streckenlängen zwischen getrennten Punktepaaren.

Satz 9a. Bei vier harmonischen Strahlen sind die beiden Produkte der Sinus der Winkel zwischen je zwei benachbarten Strahlenpaaren einander gleich und gleich dem halben Produkt der Sinus der Winkel zwischen getrennten Strahlenpaaren.

Oder in anderer Ausdrucksweise (vergl. Erkl. 67):

Satz 9b. Der Abstand zweier nicht zugeordneten von vier harmonischen Elementen (Strecke bei Punkten, Winkel bei Strahlen) wird durch die beiden andern Elemente geteilt nach zwei Teilungsverhältnissen, wovon das eine den doppelten Wert des andern hat.

Ebenso entsteht (siehe Satz 9b):

Teilung von AC durch B im Verhältnis $8:3$, durch D im Verhältnis $20:15 = 4:3$;
AD durch B im Verhältnis $8:12 = 2:3$, durch C im Verhältnis $5:15 = 1:3$;
BC durch A im Verhältnis $8:5$, durch D im Verhältnis $12:15 = 4:5$;
BD durch A im Verhältnis $8:20 = 2:5$, durch C im Verhältnis $3:15 = 1:5$.

Hier ist also jedesmal das erste Teilungsverhältnis das doppelte des zweiten.

Erkl. 70. Zur Bestätigung der Sätze von vier harmonischen Strahlen kann man wieder den Spezialfall der Erkl. 62 wählen. Setzt man:

$$\sphericalangle(ac) = (cb) = \alpha, \quad (bd) = 90 - \alpha,$$

so wird in Satz 9a:

$$\sin(ad)\sin(cb) = \sin(90 + \alpha)\sin\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\alpha,$$

ferner:

$$\sin(ac) \cdot \sin(bd) = \sin\alpha \sin(90 - \alpha) = \sin\alpha \cos\alpha$$

und

$$\sin(ab)\sin(cd) = \sin 2\alpha \cdot \sin 90^0 = 2 \sin\alpha \cos\alpha,$$

also das Doppelte des vorigen. Wird gesetzt (vergl. Erkl. 68):

$$\sphericalangle(ac) = \beta, \quad \sphericalangle(cb) = (bd) = 90 - \beta.$$

so wird:

$$\sin(ad)\sin(cb) = \sin(180-\beta)\sin(90-\beta) = \sin\beta\cos\beta,$$

ferner:

$$\sin(ac)\sin(bd) = \sin\beta\sin(90-\beta) = \sin\beta\cos\beta$$

und

$$\sin(ab)\sin(cd) = \sin 90^0 \sin(180-2\beta) = \sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta.$$

Ebenso entsteht für Satz 9b nach dem ersten Beispiel:

Teilung von $\sphericalangle(ac)$ durch b im Verhältnis $\sin 2\alpha : \sin\alpha = 2\cos\alpha$,
durch d im Verhältnis $\sin(90+\alpha) : \sin 90 = \cos\alpha$;

$\sphericalangle(ad)$ durch b im Verhältnis $\sin 2\alpha : \sin(90-\alpha) = 2\sin\alpha$,
durch c im Verhältnis $\sin\alpha : \sin 90 = \sin\alpha$;

$\sphericalangle(bc)$ durch a im Verhältnis $\sin 2\alpha : \sin\alpha = 2\cos\alpha$,
durch d im Verhältnis $\sin(90-\alpha) : \sin 90 = \cos\alpha$;

$\sphericalangle(bd)$ durch a im Verhältnis $\sin 2\alpha : \sin(90+\alpha) = 2\sin\alpha$,
durch c im Verhältnis $\sin\alpha : \sin 90 = \sin\alpha$.

Frage 22. Welche Beziehungen entstehen, wenn man die Punkte berücksichtigt, welche die Strecken zwischen zwei zugeordneten von vier harmonischen Punkten halbieren?

Figur 21.

A M B P N Q

Erkl. 71. Ist AB die zu teilende Strecke, so sind PQ die Teilpunkte, also PQ die Strecke der Teilpunkte, oder die Teilpunktestrecke. Wird umgekehrt QP als geteilte Strecke betrachtet, so werden B und A innerer und äusserer Teilpunkt, also BA die Teilpunktestrecke. Alles, was bewiesen wird für die Punkte A und B und ihren Mittelpunkt M in Bezug auf P und Q, kann also ohne einen Beweis auch niedergeschrieben werden — bloss in veränderter Bezeichnungsweise derselben Figurenelemente — als gültig für die Punkte Q und P und ihren Mittelpunkt N in Bezug auf B und A. In den beiden ersten Fällen ist die Uebertragung nebenstehend bereits durchgeführt, im dritten und vierten entstehen:

$$QB \cdot PB = BA \cdot BN,$$
$$QA \cdot PA = BA \cdot NA,$$
$$QB \cdot PB + QA \cdot PA = \overline{BA}^2.$$

Der Inhalt der Sätze 10 [illegible] 11 bleibt dabei völlig ungeändert.

Erkl. 72. Die Unterscheidung der Strecken nach Richtung und Vorzeichen durch ihre Schreibung wurde bereits in Erkl. 115 des I. Teiles behandelt. Die Gesetze über Proportionen, welche im Nebenstehenden angewandt

Antwort. Es seien die vier harmonischen Punkte zur Erhöhung der Deutlichkeit und zur leichteren Unterscheidung der Zugehörigkeit der Paare für die jetzige Betrachtung statt mit $ABCD$ bezeichnet mit $ABPQ$, der Mittelpunkt von AB mit M, der Mittelpunkt von PQ mit N.

1. Dann ist:

$$AP = AM + MP,$$
$$PB = PM + MB,$$
$$AQ = AM + MQ,$$
$$QB = QM + MB.$$

Die ursprüngliche Definition:

$$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB} = \frac{AQ}{BQ}$$

wird dann zu:

$$\frac{AM+MP}{PM+MB} = \frac{AM+MQ}{BM+MQ}.$$

Verfährt man mit dieser Proportion nach dem Lehrsatz, dass aus $a:b = c:d$ auch folgt:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d},$$

so entsteht:

$$\frac{AM+MP+PM+MB}{AM+MP-PM-MB} = \frac{AM+MQ+BM+MQ}{AM+MQ-BM-MQ}.$$

Hier aber ist:

$$AM = MB = -BM,$$

also:

$$AM + MB = AM - BM = AB$$
$$= 2AM = 2BM,$$

sind, können folgendermassen kurz zusammengestellt und bewiesen werden:

Hat man $a:b = c:d$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ergibt zunächst beiderseitige Multiplikation mit $\frac{b}{c}$ die Vertauschbarkeit der inneren Glieder $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Ferner folgt durch Addition von ± 1 die Gleichung:

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$$

oder:

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d},$$

also durch Gliedervertauschung:

$$\frac{b}{d} = \frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a + b}{c + d} = \frac{a - b}{c - d}.$$

Und hieraus wieder mit Gliedervertauschung:

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}.$$

Ebenso folgt aus $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$:

$$\frac{a}{c} + 1 = \frac{b}{d} + 1,$$

$$\frac{a + c}{c} = \frac{b + d}{d},$$

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Endlich liefert $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ auch:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

$$\frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1,$$

$$\frac{b + a}{a} = \frac{d + c}{c}$$

und reciprok:

$$\frac{a}{a + b} = \frac{c}{c + d}.$$

Alles sind nur spezielle Fälle der allgemeinen Sätze von der sog. „korrespondierenden Addition und Subtraktion".

dagegen:

$$MP = -PM.$$

also:

$$MP + PM = 0.$$

$$MP - PM = 2\,MP.$$

Demnach entsteht oben:

$$\frac{2\,AM}{2\,MP} = \frac{2\,MQ}{2\,AM},$$

also:

$$\underline{MP \cdot MQ = \overline{AM}^2 = \overline{MB}^2} = \frac{1}{4}\,\overline{AB}^2.$$

Auf dieselbe Weise entsteht, wenn man von PQ ausgeht:

$$\underline{NA \cdot NB = \overline{QN}^2 = \overline{NP}^2} = \frac{1}{4}\,\overline{QP}^2.$$

2. Aus der vorigen Schlussgleichung ergibt sich die Proportion:

$$\frac{MP}{AM} = \frac{AM}{MQ}.$$

Verfährt man mit dieser Proportion nach dem Lehrsatz, dass aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ auch folgt:

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

so entsteht links:

$$\frac{AM + MP}{AM + MQ} \text{ oder } \frac{AP}{AQ},$$

was nach Definitionsgleichung auch:

$$= \frac{PB}{BQ}.$$

Also wird:

$$\frac{MP}{AM} = \frac{AM}{MQ} = \frac{AP}{AQ} = \frac{PB}{BQ}$$

und auch:

$$= \frac{MP}{MB} = \frac{MB}{MQ}.$$

Demnach muss es zu gleichen Werten führen, ob man von diesen gleichen Grössen die eine mit einer andern, oder mit sich selbst multipliziert. Geschieht ersteres mit den beiden ersten, so folgt:

$$\underline{\frac{MP}{MQ} = \begin{matrix} \left(\frac{MP}{AM}\right)^2 = \left(\frac{AM}{MQ}\right)^2 \\ \left(\frac{MP}{MB}\right)^2 = \left(\frac{MB}{MQ}\right)^2 \end{matrix} = \left(\frac{AP}{AQ}\right)^2 = \left(\frac{PB}{BQ}\right)^2.}$$

Vertauscht man wieder $AMPBQ$ mit $QNBPA$, so entsteht auf gleiche Weise:

$$\frac{NB}{NA} = \begin{matrix} \left(\frac{NB}{QN}\right)^2 = \left(\frac{QN}{NA}\right)^2 \\ \left(\frac{NB}{NP}\right)^2 = \left(\frac{NP}{NA}\right)^2 \end{matrix} = \left(\frac{QB}{QA}\right)^2 = \left(\frac{BP}{PA}\right)^2.$$

Erkl. 73. Das Ergebnis $\overline{MB}^2 = MP \cdot MQ$ besagt, dass die Hälfte der geteilten Strecke mittlere Proportionale ist zwischen den Abständen des Mittelpunktes von je zwei harmonischen Teilpunkten der Strecke, oder dass das Rechteck aus den Abständen je zweier Teilpunkte vom Mittelpunkt der geteilten Strecke gleich ist dem Quadrat der halben Strecke. Diese Eigenschaft ist nächst der Proportion der harmonischen Teilung die wichtigste aller metrischen Beziehungen unter vier harmonischen Punkten. Sie wird daher ebenso wie jene auch geradezu zur Definition der harmonischen Punkte benutzt. Und zwar ergibt sie besonders einfach die verschiedenen Lagen des vierten Punktes, wenn man zwischen zwei festen Punkten den dritten wandern lässt. Denn da das obige Quadrat stets gleichgross bleibt, so muss an dem Rechteck die eine Seite stets gross sein, wenn die andere klein, und umgekehrt; sie wird unendlich gross, wenn die andere Null wird, und umgekehrt; beide Teilpunkte müssen stets auf der gleichen Seite des Mittelpunktes der geteilten Strecke liegen u. s. w. Man vergleiche hiezu besonders auch Figur 7 (auf Seite 11), woselbst nach diesem Gesetze stets $\overline{H_4F}^2$ oder $\overline{K_{12}E}^2 = H_4H_n \cdot H_4K_n$ oder $= K_{12}K_n \cdot K_{12}H_n$ sein muss für jeden beliebigen Wert, welchen man dem Index n beilegen mag.

Erkl. 74. Ist $\frac{AP}{PB} = x$, so ist nach Erkl. 54:

$$\frac{QB}{BP} = \frac{QA}{PA} = y = \frac{x+1}{x-1},$$

und dadurch liesse sich der Schluss des Satzes 10 auch ausdrücken nach dem Teilungsverhältnis der ursprünglichen Strecke durch die Teilpunkte. — Aus denselben Formeln, welche diesem Satze 10 zu Grunde liegen, ergeben sich auch hiezu merkwürdige Beziehungen über die Teilungen der an Figur 21 entstehenden Strecken untereinander: Im gleichen Verhältnis, nach welchem die Teilpunktestrecke QP durch die ursprünglichen Streckenpunkte geteilt wird $\left(\text{also } \frac{x+1}{x-1}\right)$, werden auch geteilt durch jeweils denselben Punkt M als Teilpunkt: innerlich die Strecken AP und QA, äusserlich die Strecken BP und QB. Und im gleichen Verhältnis, nach welchem die ursprüngliche Strecke AB durch die Teilpunkte geteilt wird (also x), werden auch geteilt durch jeweils denselben Punkt N als Teilpunkt: innerlich die Strecken AQ und QB, äusserlich die Strecken AP und PB.

Erkl. 75. Es ist immer ein bemerkenswerter Fall, wenn man für zwei unbekannte Grössen, wie hier MP und MQ, die Werte von Produkt und Quotient kennt. Denn man kann dann leicht beide Grössen selbst berechnen als Wurzel aus Produkt bezw. Quotient der gegebenen Werte. Soll hier z. B. eine gegebene

3. Entnimmt man der letzten Entwicklung die Proportion:

$$\frac{MP}{AM} = \frac{PB}{BQ}$$

und verfährt damit nach dem Lehrsatz, dass aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ auch folgt:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d},$$

so entsteht:

$$\frac{MP}{AM+MP} = \frac{PB}{PB+BQ}$$

oder:

$$\frac{MP}{AP} = \frac{PB}{PQ},$$

also:

$$AP \cdot PB = PQ \cdot MP$$

oder:

$$\underline{AP \cdot BP = PQ \cdot PM.}$$

Ebenso entsteht aus der Proportion:

$$\frac{MQ}{BM} = \frac{AQ}{PA}$$

nach demselben Vorgange:

$$\frac{MQ}{BM+MQ} = \frac{AQ}{PA+AQ}$$

oder:

$$\frac{MQ}{BQ} = \frac{AQ}{PQ},$$

also:

$$\underline{AQ \cdot BQ = PQ \cdot MQ.}$$

4. Bildet man endlich die Summe der beiden letzten Gleichungen, so folgt:

$$\underline{AP \cdot BP + AQ \cdot BQ} = PQ(PM + MQ) = \underline{\overline{PQ}^2}.$$

Man erhält also die Sätze:

Satz 10. Die Abstände zweier harmonischen Teilpunkte vom Mittelpunkt der geteilten Strecke ergeben als Produkt das Quadrat der Hälfte dieser Strecke; und als Quotienten das Quadrat des Teilungsverhältnisses der Teilpunktestrecke durch die Streckenpunkte.

Satz 11. Die beiden Teilstrecken (deren Quotienten das Verhältnis der harmonischen Teilung angeben) ergeben jeweils dasselbe Produkt als wie die Teilpunktestrecke mit dem Abstand des

Strecke a geteilt werden im gegebenen Verhältnis x, so hat man:

$$MP \cdot MQ = \frac{a^2}{4},$$

$$\frac{MP}{MQ} = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2,$$

also durch Multiplikation beider Gleichungen:

$$MP = \frac{a}{2} \cdot \frac{x-1}{x+1},$$

durch Division beider Gleichungen:

$$MQ = \frac{a}{2} \cdot \frac{x+1}{x-1}.$$

gewählten Teilpunktes vom Mittelpunkt der geteilten Strecke. — Die Summe beider Produkte ist gleich dem Quadrat der Teilpunktestrecke.

Frage 23. Welche analogen Beziehungen entstehen, wenn man die Strahlen m und n berücksichtigt, welche den Winkel zwischen zwei zugeordneten von vier harmonischen Strahlen halbieren?

Antwort. Denkt man sich in Figur 21 die Punkte AB, PQ mit einem äusseren Punkte durch Gerade verbunden, so kann man bezeichnen mit a, b die Strahlen des ursprünglichen Winkels, mit p, q die Teilungsstrahlen, und ferner mit m und n die Halbierungsstrahlen der Winkel (ab) und (pq). (Vergl. Figur 22 bei der folgenden Antwort auf Frage 24, sowie Erkl. 83.)

1. Dann ist:

$$\sphericalangle(ap) = (am) + (mp), \quad \sphericalangle(pb) = (pm) + (mb);$$
$$\sphericalangle(aq) = (am) + (mq), \quad \sphericalangle(qb) = (qm) + (mb).$$

und

$$\sphericalangle(am) = (mb) = -(ma) = -(bm),$$

also z. B.:

$$sin(am) = -sin(ma),$$

ebenso:

$$tg(am) = -tg(ma) \text{ oder } ctg(am) = -ctg(ma), \text{ aber } cos(am) = cos(ma).$$

Hiernach wird die ursprüngliche Definitionsgleichung:

$$\frac{sin(ap)}{sin(pb)} = -\frac{sin(aq)}{sin(qb)} = \frac{sin(aq)}{sin(bq)}$$

zu:

$$\frac{sin[(am)+(mp)]}{sin[(pm)+(mb)]} = \frac{sin[(am)+(mq)]}{sin[(bm)+(mq)]}.$$

Durch Entwicklung der Sinus der Summe nach der Formel:

$$sin(\alpha+\beta) = sin\,\alpha\, cos\,\beta + cos\,\alpha \cdot sin\,\beta$$

entsteht:

$$\frac{sin(am)\,cos(mp) + cos(am)\,sin(mp)}{sin(pm)\,cos(mb) + cos(pm)\,sin(mb)} = \frac{sin(am)\,cos(mq) + cos(am)\,sin(mq)}{sin(bm)\,cos(mq) + cos(bm)\,sin(mq)}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner beiderseits mit:

$$cos(am) = cos(bm) = cos(mb),$$

so folgt:

$$\frac{tg(am)\,cos(mp) + sin(mp)}{sin(pm) + cos(pm)\,tg(mb)} = \frac{tg(am)\,cos(mq) + sin(mq)}{tg(bm)\,cos(mq) + sin(mq)}.$$

Dividiert man nochmals Zähler und Nenner links mit $cos(mp) = cos(pm)$, rechts mit $cos(mq) = cos(qm)$, so entsteht:

$$\frac{tg(am) + tg(mp)}{tg(pm) + tg(mb)} = \frac{tg(am) + tg(mq)}{tg(bm) + tg(mq)}.$$

Führt man jetzt für (am) bezw. (bm) stets $\pm(mb)$ ein und für (pm) auch $-(mp)$, so wird:

$$\frac{tg\,(mb)+tg\,(mp)}{tg\,(mb)-tg\,(mp)}=\frac{tg\,(mq)+tg\,(mb)}{tg\,(mq)-tg\,(mb)}.$$

Verfährt man mit dieser Proportion nach dem Lehrsatze, dass aus $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ auch folgt $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, so erhält man:

$$\frac{2\,tg\,(mb)}{2\,tg\,(mp)}=\frac{2\,tg\,(mq)}{2\,tg\,(mb)},$$

also:

$$\underline{tg\,(mp)\cdot tg\,(mq)=tg^2\,(mb)=tg^2\,(am)}=tg^2\,\frac{(ab)}{2}.$$

Und ebenso entsteht mit Vertauschung der $ampbq$ mit $qnbpa$:

$$\underline{tg\,(na)\cdot tg\,(nb)=tg^2\,(np)=tg^2\,(qn)=tg^2\,\frac{(qp)}{2}}.$$

2. Aus der vorigen **Definitionsgleichung** ergibt sich nach dem Lehrsatze, dass aus $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ auch folgt $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, die Proportion:

$$\frac{sin\,(ap)}{sin\,(aq)}=\frac{sin\,(pb)}{sin\,(bq)}=\frac{sin\,(ap)\pm sin\,(pb)}{sin\,(aq)\pm sin\,(bq)}.$$

Nun ist aber:

α) $sin\,(ap)+sin\,(pb)=sin\,(ap)-sin\,(bp)=sin\,[(am)+(mp)]-sin\,[(bm)+(mp)]$

$$=2\,cos\,\frac{(am)+(mp)+(bm)+(mp)}{2}\cdot sin\,\frac{(am)+(mp)-(bm)-(mp)}{2}$$

$$=2\,cos\,\frac{2\,(mp)}{2}\cdot sin\,\frac{2\,(am)}{2}=2\,cos\,(mp)\,sin\,(am),$$

β) $sin\,(ap)-sin\,(pb)=sin\,(ap)+sin\,(bp)$ nach demselben Vorgange gleich $2\,sin\,(mp)\,cos\,(am)$,

γ) $sin\,(aq)+sin\,(bq)=sin\,[(am)+(mq)]+sin\,[(bm)+(mq)]$

$$=2\,sin\,\frac{(am)+(mq)+(bm)+(mq)}{2}\cdot cos\,\frac{(am)+(mq)-(bm)-(mq)}{2}$$

$$=2\,sin\,\frac{2\,(mq)}{2}\cdot cos\,\frac{2\,(am)}{2}=2\,sin\,(mq)\,cos\,(am),$$

δ) $sin\,(aq)-sin\,(bq)$ auf gleiche Weise gleich $2\,cos\,(mq)\,sin\,(am)$.

Man hat also:

$$\frac{sin\,(ap)}{sin\,(aq)}=\frac{sin\,(pb)}{sin\,(bq)}=\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta},$$

und zwar:

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{2\,cos\,(mp)\,sin\,(am)}{2\,sin\,(mq)\,cos\,(am)}=tg\,(am)\cdot\frac{cos\,(mp)}{sin\,(mq)}$$

und ebenso:

$$\frac{\beta}{\delta}=\frac{2\,sin\,(mp)\,cos\,(am)}{2\,cos\,(mq)\,sin\,(am)}=ctg\,(am)\cdot\frac{sin\,(mp)}{cos\,(mq)}.$$

Demnach muss es zu gleichen Werten führen, ob man von diesen gleichen Grössen die eine mit einer andern oder mit sich selbst multipliziert. Geschieht ersteres mit den beiden letzten, so fällt $tg\,(am)\cdot ctg\,(am)=1$ fort, und es entsteht:

$$\frac{cos\,(mp)\cdot sin\,(mp)}{sin\,(mq)\cdot cos\,(mq)}\quad\text{oder}\quad\frac{2\,sin\,(mp)\,cos\,(mp)}{2\,sin\,(mq)\,cos\,(mq)}=\frac{sin\,2\,(mp)}{sin\,2\,(mq)}.$$

Und dies wird nach voriger Ueberlegung:

$$\underline{\frac{sin\,2\,(mp)}{sin\,2\,(mq)}=\left[\frac{sin\,(ap)}{sin\,(aq)}\right]^2=\left[\frac{sin\,(pb)}{sin\,(bq)}\right]^2}.$$

3. Entnimmt man der letzten Entwicklung die Beziehung:

$$(ap)+(bp)=(am)+(mp)+(bm)+(mp)=2(mp)+(am)-(mb)=2(mp),$$

so erhält man zuerst:

$$\sin 2(mp)=\sin[(ap)+(bp)],$$

folglich entsteht durch Entwicklung von $\sin[(ap)+(bp)]$:

$$\sin 2(mp)=\sin(ap)\cos(bp)+\cos(ap)\sin(bp)$$

$$=\sin(ap)\sin(bp)\left[\frac{\cos(bp)}{\sin(bp)}+\frac{\cos(ap)}{\sin(ap)}\right]=\sin(ap)\sin(bp)[ctg(bp)+ctg(ap)],$$

also nach Antwort auf Frage 19 und Erkl. 80:

$$\sin 2(mp)=\sin(ap)\cdot\sin(bp)\cdot 2\,ctg(qp).$$

Und somit wird unter gleichzeitiger Vertauschung von (mp) und (qp) mit $-(pm)$ und $-(pq)$:

$$\underline{\sin(ap)\sin(bp)=\frac{1}{2}tg(pq)\cdot\sin 2(pm).}$$

Ebenso muss entstehen:

$$(aq)+(bq)=(am)+(mq)+(bm)+(mq)=2(mq)+(am)-(mb)=2(mq),$$

folglich:

$$\sin 2(mq)=\sin[(aq)+(bq)]$$

$$=\sin(aq)\cos(bq)+\cos(aq)\sin(bq)=\sin(aq)\sin(bq)\left[\frac{\cos(bq)}{\sin(bq)}+\frac{\cos(aq)}{\sin(aq)}\right]$$

$$=\sin(aq)\sin(bq)[ctg(bq)+ctg(aq)]=\sin(aq)\sin(bq)\cdot 2\,ctg(pq).$$

Also wird auch:

$$\underline{\sin(aq)\sin(bq)=\frac{1}{2}tg(pq)\sin 2(mq).}$$

4. Bildet man endlich die Summe der beiden letzten Gleichungen, so folgt:

$$\sin(ap)\sin(bp)+\sin(aq)\sin(bq)=\frac{1}{2}tg(pq)[\sin 2(pm)+\sin 2(mq)]$$

$$=\frac{1}{2}tg(pq)\cdot 2\sin\frac{2(pm)+2(mq)}{2}\cdot\cos\frac{2(pm)-2(mq)}{2}=tg(pq)\sin(pq)\cos[(pm)-(mq)]$$

$$=\frac{\sin(pq)}{\cos(pq)}\cdot\sin(pq)\cos[(pm)-(mq)]=\sin^2(pq)\cdot\frac{\cos[(mp)+(mq)]}{\cos(pq)}$$

$$=\sin^2(pq)\cdot\frac{\cos[(mp)+(mq)]}{\cos[(mp)-(mq)]}=\sin^2(pq)\cdot\frac{\cos(mp)\cos(mq)-\sin(mp)\sin(mq)}{\cos(mp)\cos(mq)+\sin(mp)\sin(mq)}$$

$$=\sin^2(pq)\cdot\frac{1-tg(mp)\,tg(mq)}{1+tg(mp)\,tg(mq)}=\sin^2(pq)\cdot\frac{1-tg^2(am)}{1+tg^2(am)}\text{ (vergl. Erkl. 80)}$$

$$=\sin^2(pq)\cdot\cos 2(am)=\sin^2(pq)\cos(ab).$$

Also wird:

$$\underline{\sin(ap)\sin(bp)+\sin(aq)\sin(bq)=\sin^2(pq)\cos(ab).}$$

Erkl. 76. In vorstehenden Entwicklungen treten mehrfach die in Erkl. 72 genannten Sätze über Proportionen auf, und die in Erkl. 126 des I. Teiles dieses Lehrbuches sowie in Erkl. 60 zusammengestellten Beziehungen über die Vorzeichen der geraden ($\cos$) und ungeraden Funktionen ($\sin$, tg, ctg) beim Wechsel des Vorzeichens des Winkels, also z. B.:

$$\sin(pm)=-\sin(mp),\text{ aber }\cos(pm)=\cos(mp)\text{ u. s. w.}$$

Ausserdem gelangen zur Anwendung die Formeln über Funktionen der Summen und über Summen der Funktionen, nämlich:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

sowie:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\qquad \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},\qquad \cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\beta+\alpha}{2}.$$

Man sehe über diese trigonometrischen Formeln Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.

Erkl. 77. Die Gleichung:

$$tg\,(mp)\,tg\,(mq) = tg^2\,\frac{(ab)}{2}$$

erlaubt die Bestimmung der Lage des Strahles q bei festen Strahlen a und b und beweglichem Strahle p in noch vorteilhafterer Weise, als die ursprüngliche Definitionsgleichung:

$$\frac{sin\,(ac)}{sin\,(cb)} = \frac{sin\,(ad)}{sin\,(bd)},$$

welche den Strahl d zweimal enthält, und auch einfacher als die Gleichung in Antwort auf Frage 19:

$$ctg\,(ef) = \frac{1}{2}\,[ctg\,(eh) + ctg\,(ek)] \text{ bezw. hier } ctg\,(ab) = \frac{1}{2}\,[ctg\,(ap) + ctg\,(aq)].$$

Fällt nämlich:

1. p in a, $\sphericalangle(mp) = -\frac{(ab)}{2}$, so muss auch $tg(mq) = -tg\frac{(ab)}{2}$ sein, $\sphericalangle(mq) = 180 - \frac{(ab)}{2}$, d. h. q fällt in die Verlängerung von a;

2. p zwischen a und m, $-\frac{(ab)}{2} > (mp) > 0$, so muss $-tg\frac{(ab)}{2} < tg\,(mq) < \mp\infty$, also $\sphericalangle(mq)$ zwischen $180 - \frac{(ab)}{2}$ und 90^0, d. h. q liegt zwischen der Verlängerung von a und dem Halbierungsstrahl des Nebenwinkels von (ab);

3. p in m, $(mp) = 0$, $tg\,(mp) = 0$, also $tg(mq) = \infty$, $\sphericalangle(mq) = 90^0$, d. h. wenn p den Winkel (ab) halbiert, so halbiert q dessen Nebenwinkel (vgl. Satz 7);

4. p zwischen m und b, $0 < (mp) < \frac{(ab)}{2}$, $0 < tg\,(mp) < tg\,\frac{(ab)}{2}$, also auch:

$$\infty > tg\,(mq) > tg\,\frac{(ab)}{2},\quad 90^0 > (mq) > \frac{(ab)}{2},$$

d. h. q zwischen der Halbierungsgeraden des Nebenwinkels und dem Strahle b;

5. p in b, $\sphericalangle\,(mp) = \frac{(ab)}{2}$, $tg\,(mp) = tg\frac{(ab)}{2}$, also auch $tg\,(mq) = tg\,\frac{(ab)}{2}$, $(mq) = \frac{(ab)}{2}$, q ebenfalls in b. Während also der eine der zugeordneten Strahlen den Winkel (ab) durchläuft in der Richtung von a über die Winkelhalbierende nach b, so durchläuft der zugeordnete Strahl den Nebenwinkel in der entgegengesetzten Drehungsrichtung von der Verlängerung des Schenkels a über die Winkelhalbierende des Nebenwinkels und ebenfalls zum Schenkel b. Fällt der eine bewegliche Strahl in einen der festen Strahlen, so fällt der andere in denselben Strahl.

Erkl. 78. Aber auch zur wirklichen ziffernmässigen Berechnung von Winkeln harmonischer Strahlen ist die Gleichung:

$$tg\,(mp)\,tg\,(mq) = tg^2\,\frac{(ab)}{2}$$

den beiden andern Gleichungen bedeutend vorzuziehen, weil man sofort anschreiben kann:

$$tg\,(mq) = tg^2\,\frac{(ab)}{2}\cdot ctg\,(mp).$$

Man hat also eine einfache und logarithmierbare Beziehung für $tg\,(mq)$, wenn (ab) und (mp) gegeben sind. Beides war bei der ersten der andern Gleichungen gar nicht der Fall, bei der zweiten nicht in logarithmierbarer Form.

Erkl. 79. Die zweite Entwicklung obenstehender Antwort konnte man auch ihren Ausgang nehmen lassen vom Ergebnis der ersten. Diese liefert:

$$tg^2\,(am) = tg\,(mp)\,tg\,(mq),$$

also:

$$\frac{tg\,(mp)}{tg\,(am)} = \frac{tg\,(am)}{tg\,(mq)} \text{ oder } \frac{sin\,(mp)}{cos\,(mp)\,tg\,(am)} = \frac{cos\,(mq)\,tg\,(am)}{sin\,(mq)},$$

folglich auch durch Vertauschung der beiderseitigen Faktoren:

$$\frac{sin\,(mp)}{cos\,(mq)}\cdot ctg\,(am) = \frac{cos\,(mp)}{sin\,(mq)}\cdot tg\,(am).$$

So findet man, dass $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ (Seite 40) ist; dann muss aber nachträglich noch bewiesen werden, dass beides auch gleich ist:

$$\frac{\sin(ap)}{\sin(aq)} = \frac{\sin(pb)}{\sin(bq)},$$

und dazu braucht man doch wieder die Zerlegung der Winkel $(ap) = (am) + (mp)$ und die Proportion $\frac{a+b}{c+d}$ u. s. w.

Erkl. 80. Das Ergebnis der Antwort auf Frage 19 war:

$$ctg(ef) = \frac{1}{2}[ctg(eh) + ctg(ek)];$$

es lautet in der hier angenommenen Bezeichnungsweise:

$$ctg(ab) = \frac{1}{2}[ctg(ap) + ctg(aq)].$$

und kann mit Vertauschung der Elementepaare a und b bezw. q und p auch geschrieben werden:

$$ctg(qp) = \frac{1}{2}[ctg(qb) + ctg(qa)].$$

Nach Erkl. 61 a hat man aber hierzu auch noch die zwei andern Gleichungen:

$$ctg(ba) = \frac{1}{2}[ctg(bp) + ctg(bq)] \text{ und } ctg(pq) = \frac{1}{2}[ctg(pa) + ctg(pb)].$$

Ausserdem finden in der dritten und vierten Entwicklung der vorigen Antwort Anwendung die Formeln:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

sowie:

$$\cos[(pm) - (mq)] = \cos[-(mp) - (mq)] = \cos[+(mp) + (mq)]$$

und

$$\cos(pq) = \cos[(pm) + (mq)] = \cos[-(pm) - (mq)] = \cos[(mp) - (mq)].$$

Endlich wird verwendet die Entwicklung:

$$\frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} = \frac{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}.$$

Hier ist aber der Nenner $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. der Zähler $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$. also hiernach:

$$\frac{1 - tg^2(am)}{1 + tg^2(am)} = \cos 2(am) = \cos(ab).$$

Erkl. 81. Vergleicht man die Ergebnisse der vorstehenden Antwort auf Frage 23 mit denen der vorhergehenden Antwort auf Frage 22. so findet man ein regelmässiges Entsprechen der Beziehungen, nämlich:

in Antwort auf Frage 22:	in Antwort auf Frage 23:
1. zwischen den Strecken MP, MQ, $\frac{1}{2}AB$, bezw. NA, NB, $\frac{1}{2}QP$;	1. zwischen den Winkeln (mp), (mq), $\frac{1}{2}(ab)$, bezw. (na), (nb), $\frac{1}{2}(qp)$;
2. zwischen den Strecken MP, MQ und AP, AQ; PB, BQ;	2. zwischen den Winkeln (mp), (mq) und (ap), (aq); (pb), (bq);
3. zwischen den Strecken AP, BP; PQ, PM, bezw. AQ, BQ; PQ, MQ;	3. zwischen den Winkeln (ap), (bp); (pq), (pm), bezw. (aq), (bq); (pq), (mq);
4. zwischen den Strecken AP, BP, AQ, BQ; PQ.	4. zwischen den Winkeln (ap), (bp), (aq), (bq); (pq), (ab).

Man sieht also, dass die Dualität zwar nicht ganz verloren gegangen ist, aber doch sich auf das Auftreten der gleichen Elemente in beiderlei Beziehungen beschränkt. Während aber dort stets die Längen der Strecken in die Formeln eintreten, so findet man hier nicht die Winkel selbst, sondern in verschiedenen Zusammenstellungen Sinus der Winkel, Tangenten der Winkel, auch Cosinus; aber doch fast immer trigonometrische Funktionen der Winkel derselben Gruppen von Elementen wie zuvor für die Strecken.

Erkl. 82. Fasst man die Ergebnisse in Worte, so erhält man als Gegenüberstellung zu den Sätzen 10 und 11:

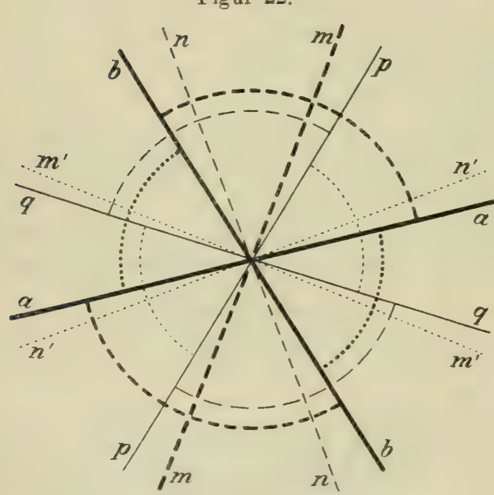
Satz 10 a. Die Winkel zweier harmonischen Teilstrahlen mit dem Halbierungsstrahl des geteilten Winkels ergeben als Produkt ihrer Tangenten

das Quadrat der Tangente der Hälfte dieses Winkels; und als Quotienten der Sinus der doppelten Winkel das Quadrat des Teilungsverhältnisses des Teilstrahlenwinkels durch die ursprünglichen Winkelstrahlen.

Satz 11a. Die Sinus der beiden Teilwinkel (deren Sinusquotienten das Verhältnis der harmonischen Teilung ergeben) ergeben jeweils dasselbe Produkt, als wie die halbe Tangente des Teilstrahlenwinkels mit dem Sinus des doppelten Neigungswinkels zwischen dem gewählten Teilstrahl und dem Halbierungsstrahl des geteilten Winkels. — Die Summe beider Produkte ist gleich dem Produkt aus dem Quadrat des Sinus des Teilstrahlenwinkels mit dem Cosinus des geteilten Winkels.

Frage 24. Zu was für Ergebnissen führt die Einbeziehung der Strecke der beiden Halbierungspunkte MN bezw. des Winkels der beiden Halbierungsstrahlen mn in die Untersuchung?

Figur 22.



Erkl. 83. In Figur 21 sind die Punkte AB, PQ, MN angegeben, nicht aber die Strahlen ab, pq, mn. Nun sind für die Strahlen ab, pq in der Figur 22 vier Verbindungsstrahlen eines ganz beliebigen Punktes S der Ebene mit $ABPQ$ zu wählen, nicht aber für mn auch dessen Verbindungsgerade mit MN. Vielmehr könnten die Halbierungsstrahlen mn nur in dem Ausnahmefall die Projektionsstrahlen für M und N sein, dass gleichzeitig ASB und PSQ gleichschenklige Dreiecke wären; dies ist aber ganz allgemein unmöglich und kann auch im Grenzfall nur erfüllt werden, wenn S als unendlich

Antwort. 1. Führt man die Strecke MN in die Rechnung ein, so entsteht aus der Gleichung:

$$\overline{AM}^2 = MP \cdot MQ$$

in Antwort 1 auf Frage 22 die folgende:

$$\overline{AM}^2 = (MN + NP)(MN + NQ),$$

also:

$$\overline{AM}^2 = \overline{MN}^2 + MN \cdot NP + MN \cdot NQ + NP \cdot NQ$$
$$= MN^2 + MN(NP + NQ) + NP \cdot NQ.$$

Nun ist (siehe Figur 21):

$$NP = QN = -NQ,$$

also:

$$NP + NQ = 0,$$

und ferner:

$$NP \cdot NQ = -\overline{NP}^2 = -\overline{QN}^2.$$

Dadurch wird:

$$\overline{AM}^2 = \overline{MN}^2 - \overline{QN}^2$$

oder:

$$\underline{\overline{AM}^2 + \overline{QN}^2 = \overline{MN}^2.}$$

Hiefür kann man auch schreiben:

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{QP}{2}\right)^2 = \overline{MN}^2,$$

oder endlich durch beiderseitige Multiplikation mit 4 und Ersetzung von $\overline{QP}^2$ durch $\overline{PQ}^2$:

$$\underline{(2\,MN)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{PQ}^2.}$$

2. Führt man den Winkel (mn) in die Gleichung der Antwort 1 auf Frage 23 ein, so liefert die Gleichung:

$$tg^2(am) = tg(mp)\, tg(mq)$$

die folgende:

ferner Schnittpunkt der in M und N auf AQ errichteten Senkrechten gewählt wird. Dabei wird der Strahlenbüschel SA, SB, SP, SQ, SM, SN ein Parallelstrahlenbüschel senkrecht zur Geraden AB, und dies ist der einzig mögliche Fall, dass m und n durch die Punkte M und N hindurchgehen. Dann aber kann von Winkelgrössen in diesem Büschel nicht mehr gesprochen werden.

Erkl. 84. Der Schluss der zweiten Ableitung in nebenstehender Antwort könnte auch gemacht werden, indem man die Gleichung:

$$tg^2(am) = \frac{tg^2(mn) - tg^2(qn)}{1 - tg^2(mn)\, tg^2(qn)}$$

als Proportion behandelt:

$$tg^2(am) : 1 = \text{u. s. w.},$$

und diese Proportion als:

$$a : b = c : d$$

umgestaltet nach:

$$\frac{b-a}{b+a} = \frac{d-c}{d+c}.$$

Dadurch entsteht sofort:

$$\frac{1 - tg^2(am)}{1 + tg^2(am)} = \frac{1 - tg^2(mn)\, tg^2(qn) - tg^2(mn) + tg^2(qn)}{1 - tg^2(mn)\, tg^2(qn) + tg^2(mn) - tg^2(qn)} = \frac{[1 - tg^2(mn)]\,[1 + tg^2(qn)]}{[1 + tg^2(mn)]\,[1 - tg^2(qn)]},$$

und weiter wie nebenstehend.

Erkl. 85. Ueber die Dualität der beiden Ergebnisse nebenstehender Antwort gilt dasselbe, was in Erkl. 81 ausgeführt wurde; als Einzelheit erscheint dabei die gleichzeitige Umwandlung von dem Quadrat von QP in das von PQ. und von dem Cosinus von (qp) in den von (pq). Beidemale bringt die Umkehrung der Strecke bezw. des Winkels keinen Vorzeichenwechsel des Ergebnisses, weil einmal das Quadrat, das andere Mal der Cosinus als gerade Funktionen bei Umkehrung des Arguments gleichen Wert behalten.

Erkl. 86. In Worten ausgedrückt nehmen die nebenstehenden Ergebnisse folgende Form an:

Satz 12. Die Summe der Quadrate einer harmonisch geteilten Strecke und der Strecke der Teilpunkte ist gleich dem Quadrat der doppelten Strecke der Halbierungspunkte beider Strecken.

Satz 12a. Das Produkt der Cosinuse eines harmonisch geteilten Winkels und des Winkels der Teilstrahlen ist gleich dem Cosinus des doppelten Winkels der Halbierungsstrahlen beider Winkel.

$$tg^2(am) = tg[(mn) + (np)] \cdot tg[(mn) + (nq)]$$
$$= tg[(mn) + (qn)]\, tg[(mn) - (qn)]$$
$$= \frac{tg(mn) + tg(qn)}{1 - tg(mn)\, tg(qn)} \cdot \frac{tg(mn) - tg(qn)}{1 + tg(mn)\, tg(qn)},$$

also:

$$tg^2(am) = \frac{tg^2(mn) - tg^2(qn)}{1 - tg^2(mn)\, tg^2(qn)}.$$

Bildet man Summe und Differenz jeder Seite dieser Gleichung mit der Grösse Eins, so wird:

$$1 + tg^2(am) = \frac{1 - tg^2(mn)\, tg^2(qn) + tg^2(mn) - tg^2(qn)}{1 - tg^2(mn)\, tg^2(qn)} = \frac{[1 + tg^2(mn)]\,[1 - tg^2(qn)]}{1 - tg^2(mn)\, tg^2(qn)},$$

$$1 - tg^2(am) = \frac{1 - tg^2(mn)\, tg^2(qn) - tg^2(mn) + tg^2(qn)}{1 - tg^2(mn)\, tg^2(qn)} = \frac{[1 - tg^2(mn)]\,[1 + tg^2(qn)]}{1 - tg^2(mn)\, tg^2(qn)}.$$

Durch Division der letzten dieser beiden Gleichungen durch die erste entsteht unter Wegfall des gemeinsamen Nenners:

$$\frac{1 - tg^2(am)}{1 + tg^2(am)} = \frac{1 - tg^2(mn)}{1 + tg^2(mn)} \cdot \frac{1 + tg^2(qn)}{1 - tg^2(qn)}$$

oder mit Umstellung:

$$\frac{1 - tg^2(am)}{1 + tg^2(am)} \cdot \frac{1 - tg^2(qn)}{1 + tg^2(qn)} = \frac{1 - tg^2(mn)}{1 + tg^2(mn)},$$

also mit Anwendung der letzten Formel in Erkl. 80:

$$\underline{\cos 2(am) \cdot \cos 2(qn) = \cos 2(mn).}$$

Da nun hierin:

$$2(am) = ab, \quad 2(qn) = qp = -pq,$$

aber:

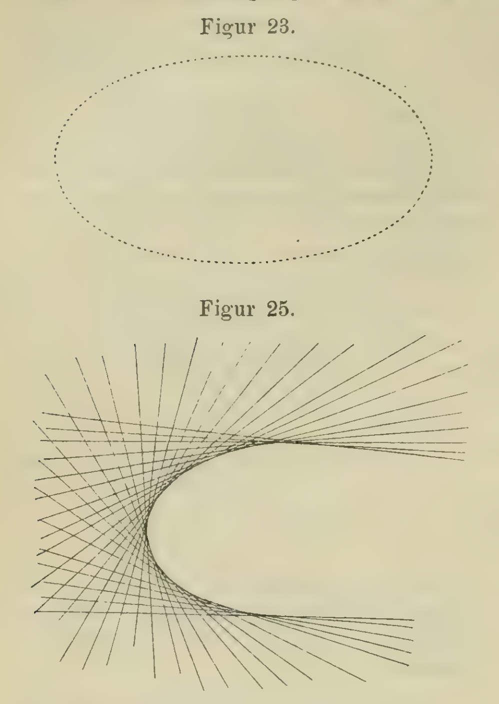
$$\cos(pq) = \cos[-(pq)],$$

so kann man dieses Ergebnis auch in der Form schreiben:

$$\underline{\cos 2(mn) = \cos(ab) \cdot \cos(pq).}$$

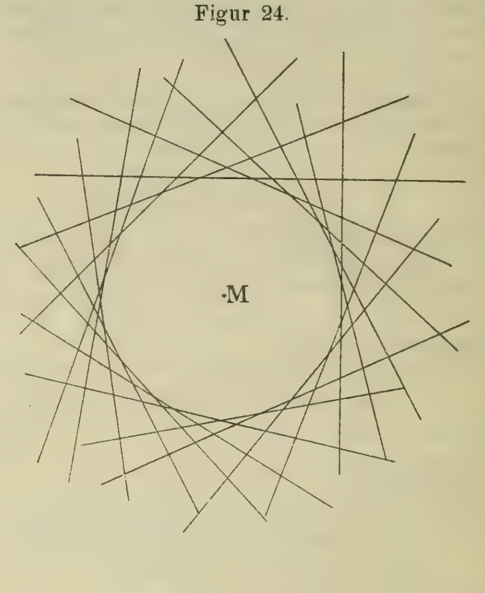
3. Ueber die Erzeugung von Kurven durch projektivisch verwandte Grundgebilde.

Figur 23.



Figur 25.

Figur 24.



Frage 25. Auf welche beiden Arten kann man sich eine Kurve überhaupt entstanden denken?

Erkl. 87. Die einfachsten Beispiele für nebenstehende Definitionen bilden die Punktreihe erster Ordnung und der Strahlenbüschel erster Klasse. Im ersten Falle ist die Gerade selbst die Kurve, im zweiten Falle der Punkt; in beiden Fällen sind Gerade und Punkt auch Träger der Gebilde im bisherigen Sinne. Die Durchlaufung der Punktreihe erster Ordnung geschieht bloss durch Verschiebung des Punktes ohne Richtungsänderung dieser Verschiebung, d. h. ohne Drehung des Punktes um sich selbst während der Verschiebung; die Durchlaufung des Strahlenbüschels erster Klasse geschieht bloss durch Drehung der Geraden ohne Wechsel des Drehungspunktes, d. h. ohne Verschiebung der Geraden in sich selbst während der Drehung.

Erkl. 88. Der Begriff der stetigen Aufeinanderfolge ist für Punktreihen ohne weiteres aus der Anschauung klar, indem man sich eben (s. Fig. 23) jeden folgenden Punkt unendlich nahe beim vorhergehenden vorstellt. Ebenso muss man sich auch beim Strahlenbüschel (siehe Figur 24 u. 25) jeden einzelnen Strahl als unendlich nahe benachbart einerseits

Antwort. 1. Eine Kurve kann man sich erstens entstanden denken als eine stetige oder ununterbrochene, sonst aber vollständig beliebige Aufeinanderfolge von Punkten, oder als Weg eines veränderlichen Punktes. Die Kurve ist in diesem Falle erzeugt als Punktreihe von beliebiger Ordnung, als Punktkurve oder Ordnungskurve; ihre Elemente sind die einzelnen Punkte, welche auf der Kurve liegen; die Kurve ist Träger der Punktreihe oder der geometrische Ort des Punktes.

2. Eine Kurve kann man sich aber zweitens auch entstanden denken als eine stetige oder ununterbrochene, sonst aber beliebige Aufeinanderfolge von Geraden, oder als Einhüllungsfigur oder Enveloppe eines veränderlichen Strahles. Die Kurve ist in diesem Falle erzeugt als Strahlenbüschel von beliebiger Klasse, als Strahlenkurve oder Klassenkurve; ihre Elemente

seinem vorhergehenden und anderseits seinem folgenden vorstellen. Nimmt man dazu Massvorstellungen zu Hilfe, so wird man dem unendlich kleinen Längenabstand zwischen zwei benachbarten Punkten der Punktreihe gegenüberstellen einen unendlich kleinen Neigungswinkel zwischen zwei benachbarten Strahlen des Strahlenbüschels. Vermeidet man die Massbeziehungen, so führt man die neu einzuführende stetige Aufeinanderfolge der Strahlen eines **Strahlenbüschels von beliebiger Klasse zurück auf die als bekannt anzunehmende stetige Aufeinanderfolge von Punkten der Punktreihe, indem man die Strahlen als stetig aufeinanderfolgend auffasst, wenn ihre Schnittpunkte auf einer beliebigen Schnittgeraden und zugleich die Schnittpunkte je zweier aufeinander folgenden Büschelstrahlen stetig aufeinanderfolgen, wohl auch wenn ihre Berührungspunkte mit einer Ordnungskurve stetig aufeinanderfolgen.**

Erkl. 89. Schon früher (im I. Teil dieses Lehrbuches) wurde genannt, dass Ordnung einer Punktkurve die Anzahl der Punkte ist, welche sie mit einer Punktreihe erster Ordnung gemeinsam haben kann, also die Höchstzahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden; dagegen Klasse einer Strahlenkurve die Anzahl der Strahlen, welche sie mit einem Strahlenbüschel erster Klasse gemeinsam haben kann, also die Höchstzahl ihrer Tangenten aus einem beliebigen Punkte. Soll die Art einer Kurve ohne Unterscheidung zwischen Punkt- und Strahlengebilde bezeichnet werden, so gebraucht man das Wort Grad. — Beide Unterscheidungen werden hinfällig, wenn die Anzahl der abzuzählenden Elemente unendlich wird, z. B. bei einer Spirallinie sowohl Ordnung als Klasse. Solchen Kurven kann kein bestimmter Grad zugeschrieben werden: sie werden dann in der geometrischen Auffassung wie in der analytischen als transcendent bezeichnet.

sind die einzelnen Strahlen oder Geraden, welche die Kurve berühren, oder welche die Kurve einhüllen, oder welche in stetiger Aufeinanderfolge sich der Kurve anschmiegen: die Kurve ist Träger des Strahlenbüschels oder in übertragenem Sinne auch wieder der geometrische Ort des Strahles.

Erkl. 90. In der Zeichnung ergibt sich ein merkbarer Unterschied für Ordnungskurve und Klassenkurve. Während nämlich die Ordnungskurve, dargestellt durch einen kontinuierlichen Linienzug, ihre sämtlichen Punkte zur Anschauung bringt, so kann man nicht sämtliche Strahlen der Klassenkurve zeichnen, sondern muss immer Zwischenräume lassen, solange die Geraden als getrennte aufgefasst werden sollen. In Figur 23 kann man jeden Punkt der ganzen Kurve als gegeben ansehen: in Figur 24 und 25 erfordert es schon weit mehr Aufmerksamkeit, andere als die gezeichnet vorliegenden Strahlen des Büschels einzutragen. (Nur beim Strahlenbüschel erster Klasse besteht auch hiefür gleiche Leichtigkeit wie für die Punktreihe.) Hat man gar zwei verschiedene Kurven, so sind die Schnittpunkte als gemeinsame Punkte zweier kontinuierlich gezeichnet vorliegenden Punktreihen ohne weiteres aus der Zeichnung erkennbar: dagegen die gemeinsamen Tangenten als gemeinsame Elemente der beiden Strahlenbüschel erfordern auch in diesem Falle besondere Konstruktion.

Frage 26. Wie lässt sich Uebereinstimmung herstellen zwischen den beiden vorigen allgemeinen Erzeugungsweisen einer Kurve?

Antwort. Man kann von den beiden vorigen Erzeugungsweisen einer Kurve entweder je eine auf die andere zurückführen, oder beide gleichwertig nebeneinanderstellen:

1. Ist die Kurve als Punktreihe entstanden, und verbindet man einen ihrer Punkte der Reihe nach mit jedem andern, so entsteht als Verbindungsgerade jedesmal eine Sehne der Kurve. Verbindet man aber den Kurvenpunkt mit dem unendlich nahe benachbarten, so erhält man eine Gerade, welche die Kurve in diesen beiden unendlich naheliegenden, also zusammenfallenden Punkten trifft: Dies ist aber eine Tangente der Kurve. Und eine solche ist in jedem Punkte der Kurve vorhanden, so dass die Gesamtheit der Tangenten der Kurve auch hier eine ebensolche stetige Aufeinanderfolge bilden muss, wie die ihrer Punkte. Demnach kann man sich auch umgekehrt die Punktkurve erzeugt denken nicht nur als Gebilde ihrer Punkte, sondern auch als Einhüllungsfigur ihrer Tangenten.

2. Ist die Kurve als Strahlenbüschel entstanden (siehe Figur 25), und bringt man einen der Strahlen der Reihe nach zum Schnitt mit jedem andern, so entsteht als Schnittpunkt jedesmal ein Punkt ausserhalb der Kurve. Schneidet man aber den Büschelstrahl mit dem unendlich nahe benachbarten, so erhält man einen Schnittpunkt, von welchem an die Kurve nur diese beiden unendlich naheliegenden, also zusammenfallenden Tangenten möglich sind: Das ist aber ein Punkt der Kurve selbst. Und ein solcher Kurvenpunkt ist auf jedem Büschelstrahle vorhanden, so dass die Gesamtheit der Kurvenpunkte wieder eine ebenso stetige Aufeinanderfolge bilden muss, wie die ihrer Tangenten. Demnach kann man sich auch umgekehrt die Strahlenkurve erzeugt denken nicht nur als Gebilde ihrer Tangenten, sondern auch als Linienzug ihrer Berührungspunkte.

3. Endlich erscheinen beide Erzeugungsweisen der Kurven als gleichwertig nebeneinander, wenn man dieselben dualistisch gegenüberstellt und demnach auffasst:

die Ordnungskurve als Punktreihe beliebigen Grades, wobei jedem erzeugenden Punkte der Punktkurve ein erzeugender Strahl der Strahlenkurve zugehört.

die Klassenkurve als Strahlenbüschel beliebigen Grades, wobei jedem erzeugenden Strahle der Strahlenkurve ein erzeugender Punkt der Punktkurve zugehört.

Erkl. 91. In den vorstehenden Ueberlegungen sind die wichtigen Erklärungen enthalten über Kurvenpunkt und Tangente einer Kurve. Hiernach ist:

Kurvenpunkt einer Kurve entweder

1. einer der die Kurve erzeugenden Punkte der Punktreihe,

oder

2. der Schnittpunkt zweier unendlich nahe benachbarten Tangenten der Klassenkurve,

oder endlich

3. ein Punkt, durch welchen eine, aber auch nur eine einzige der die Kurve berührenden Geraden (Büschelstrahlen) hindurchgeht.

Tangente einer Kurve entweder

1. einer der die Kurve erzeugenden Strahlen des Büschels,

oder

2. die Verbindungsgerade zweier unendlich benachbarten Punkte der Ordnungskurve,

oder endlich

3. eine Gerade, auf welcher einer, aber auch nur ein einziger der die Kurve bildenden Punkte (Kurvenpunkte) liegt.

Erkl. 92. In Erweiterung des letzteren Gedankens stellt man ferner schon für einen engbegrenzten Teil (ein Bogenstück) einer Kurve die Unterscheidungen auf:

1. Ein Punkt, durch welchen keine Tangente hindurchgeht, liegt innerhalb der Kurve; alle Strahlen durch diesen Punkt schneiden die Kurve.

2. Ein Punkt, durch welchen eine einzige Tangente der Kurve hindurchgeht, liegt auf der Kurve (als Kurvenpunkt).

Legt man durch diesen Punkt eine Gerade als Träger einer Punktreihe, so bildet der Kurvenpunkt einen Grenzpunkt in der Punktreihe, auf dessen einer Seite die Punkte innerhalb, auf dessen anderer Seite die Punkte ausserhalb der Kurve liegen.

3. Ein Punkt, durch welchen zwei Tangenten der Kurve hindurchgehen, liegt ausserhalb der Kurve: der Strahlenbüschel, welcher diesen Punkt zum Scheitel hat, wird durch die beiden Tangenten in zwei Winkelräume getrennt, in deren einem alle Strahlen die Kurve schneiden, während im anderen alle Strahlen ausserhalb der Kurve liegen.

1. Eine Gerade, auf welcher kein Kurvenpunkt der Kurve liegt, liegt ganz ausserhalb der Kurve; durch jeden Punkt dieser Geraden gehen Tangenten der Kurve.

2. Eine Gerade, auf welcher ein einziger Kurvenpunkt liegt, berührt die Kurve (als Tangente).

Wählt man auf dieser Geraden einen Punkt als Scheitel eines Strahlenbüschels, so bildet die Tangente einen Grenzstrahl im Strahlenbüschel, auf dessen einer Seite die Strahlen ausserhalb der Kurve verlaufen, auf dessen anderer Seite die Strahlen die Kurve schneiden.

3. Eine Gerade, auf welcher zwei Punkte der Kurve liegen, schneidet die Kurve: die Punktreihe, welche diese Gerade zum Träger hat, wird durch die beiden Kurvenpunkte in zwei Streckenräume getrennt, in deren einem alle Punkte ausserhalb der Kurve liegen, während im anderen alle Punkte innerhalb der Kurve liegen.

Erkl. 93. Auch die Durchlaufungen der Punktreihe und des Strahlenbüschels von beliebigem Grade (vergl. Erkl. 87) können dualistisch gegenübergestellt werden unter Anwendung unendlich kleiner Strecken und Winkel, und zwar tritt bei jeder der beiden Erzeugungsweisen beiderlei Art von unendlich kleinen Grössen auf. Wird nämlich einerseits die Punktkurve durchlaufen, so wird der veränderliche Punkt verschoben: aber nach jeder Verschiebung um eine unendlich kleine Strecke auf der die Richtung der Verschiebung angebenden Geraden wird diese Gerade auch wieder um einen unendlich kleinen Winkel um den Punkt gedreht, so dass jede der aufeinanderfolgenden unendlich geringen Verschiebungen des Punktes in einer von der vorhergehenden unendlich wenig verschiedenen Richtung erfolgt. Wird anderseits die Strahlenkurve durchlaufen, so wird der bewegte Strahl gedreht: aber nach jeder Drehung um einen unendlich kleinen Winkel um den als Drehungsmittelpunkt dienenden Punkt wird dieser auch wieder um eine unendlich kleine Strecke auf der Geraden verschoben, so dass jede der aufeinanderfolgenden unendlich geringen Drehungen des Strahles um einen vom vorhergehenden unendlich wenig entfernten Drehungspunkt erfolgt.

Frage 27. Wie entstehen Kurven als Erzeugnisse projektivischer Gebilde?

Antwort.

1. Hat man zwei projektivisch verwandte Punktreihen in schiefer Lage und verbindet jeden Punkt der einen mit dem zugeordneten Punkt der andern, so erhält man eine stetige Aufeinanderfolge von Verbindungsgeraden, und zwar einen Strahlenbüschel zweiter Klasse.

2. Werden nämlich die beiden Punktreihen von einem beliebigen Punkte aus projiciert, so entstehen durch diesen Punkt als gemeinsamem Scheitel zwei projektivisch verwandte Strahlenbüschel: und von den zugeordneten Strahlenpaaren dieser beiden Büschel können nach Antwort auf Frage 12 zusammenfallen kein Paar oder ein Paar oder zwei Paar, aber nicht mehr. Denn wenn drei Paar zusammenfielen, so müssten alle zusammenfallen, und dann könnten die beiden gegebenen Punktreihen sich nicht, wie vorbestimmt, in schiefer, sondern müssten sich in perspektivischer Lage befinden mit diesem Büschelscheitel als Perspektivitätsscheitel.

Nun sind aber die in eine Gerade zusammenfallenden Strahlenpaare dieser beiden Strahlenbüschel mit gemeinsamem Scheitel nichts anderes als Verbindungsgeraden entsprechender Punkte der beiden gegebenen Punktreihen; und folglich können von den Verbindungsgeraden entsprechender Punkte jener zwei Punktreihen entweder keine oder nur eine oder höchstens zwei durch

1. Hat man zwei projektivisch verwandte Strahlenbüschel in schiefer Lage und bringt jeden Strahl des einen zum Schnitt mit dem zugeordneten Strahle des andern, so erhält man eine stetige Aufeinanderfolge von Schnittpunkten, und zwar eine Punktreihe zweiter Ordnung.

2. Werden nämlich die beiden Strahlenbüschel mit einer beliebigen Geraden geschnitten, so entstehen auf dieser Geraden als gemeinsamem Träger zwei projektivisch verwandte Punktreihen; und von den zugeordneten Punktepaaren dieser beiden Punktreihen können nach Antwort auf Frage 12 zusammenfallen kein Paar oder ein Paar oder zwei Paar, aber nicht mehr. Denn wenn drei Paar zusammenfielen, so müssten alle zusammenfallen, und dann könnten die beiden gegebenen Strahlenbüschel sich nicht, wie vorbestimmt, in schiefer, sondern müssten sich in perspektivischer Lage befinden mit diesem Träger der Punktreihen als Perspektivitätsachse.

Nun sind aber die in einen Punkt zusammenfallenden Punkte dieser beiden Punktreihen mit gemeinsamem Träger nichts anderes als Schnittpunkte entsprechender Strahlen der beiden gegebenen Strahlenbüschel: und folglich können von den Schnittpunkten entsprechender Strahlen jener zwei Strahlenbüschel nur entweder keiner oder einer oder höchstens zwei auf eine be-

einen beliebig gewählten Punkt gehen oder von diesem Punkte ausgehen: Das heisst aber in anderer Ausdrucksweise, dass die Gesamtheit der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier projektivisch verwandten Punktreihen in schiefer Lage einen Strahlenbüschel zweiter Klasse bilden.

liebig gewählte Gerade fallen oder auf dieser Geraden enthalten sein: Das heisst aber in anderer Ausdrucksweise, dass die Gesamtheit der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektivisch verwandten Strahlenbüschel in schiefer Lage eine Punktreihe zweiter Ordnung bilden.

3. Da die perspektivische und ebenso die vereinigte Lage je als ein besonderer Fall der schiefen Lage anzusehen sind, so werden auch die Erzeugnisse projektivisch verwandter Gebilde in perspektivischer Lage und ebenso die Erzeugnisse projektivisch verwandter Gebilde in vereinigter Lage, also mit zusammenfallendem oder gemeinsamem Träger, als besondere oder singuläre Fälle der Kurven zweiten Grades aufgefasst. Man nennt dieselben dann degenerierte oder entartete oder ausgeartete Kurven.

Durch solche Erweiterung des Begriffs der Kurven zweiten Grades gelangt man dazu (vergl. Erkl. 98), als Strahlenkurve zweiter Klasse mitzuzählen eine einzelne Gerade (vielfach gezählt) oder zwei getrennte Punkte („eingehüllt" durch die Gesamtheit aller Strahlen der Strahlenbüschel, welche diese Punkte als Scheitel haben), und als Punktkurve zweiter Ordnung einen einzelnen Punkt (vielfach gezählt) oder zwei getrennte Gerade (erfüllt durch die Gesamtheit aller Punkte der Punktreihen, welche diese Geraden als Träger haben).

Erkl. 94. Die Untersuchungen des vorliegenden Abschnitts dieses Lehrbuches zeichnen sich aus durch eine weitgehende Durchführbarkeit der dualistischen Gegenüberstellung. Daher könnten die meisten Antworten in doppelter Ausführung nebeneinandergestellt werden; manchmal (z. B. im dritten Abschnitt der vorstehenden Antwort) kann sogar die Ausdrucksweise so gewählt werden, dass sie für beide Auffassungsweisen in gleichem Wortlaut Geltung hat.

Erkl. 95. Der Begriff der stetigen Aufeinanderfolge der Verbindungsgeraden bezw. Schnittpunkte, welche die Kurve zweiten Grades bilden, wird erfüllt nach den Ausführungen der vorhergehenden Antworten und Erklärungen. Sowohl die Strahlen des Strahlenbüschels zweiter Klasse als die Punkte der Punktreihe zweiter Ordnung folgen in ebenso unendlich enger Nachbarschaft aufeinander, wie die Punkte bezw. Strahlen der erzeugenden Punktreihen bezw. Strahlenbüschel, insbesondere ist also auch die Aufeinanderfolge der Strahlen des Strahlenbüschels zweiter Klasse zurückgeführt auf die Punktfolge in der Punktreihe; sie ist nämlich eine ebenso stetige, wie diejenige ihrer Schnittpunkte mit der erzeugenden Punktreihe.

Erkl. 96. Die Erzeugnisse der projektivischen Grundgebilde sind Gebilde zweiten Grades, weil der Nachweis erbracht werden kann, dass von den

Verbindungsstrahlen der entsprechenden Punkte zweier projektivischen Punktreihen in schiefer Lage nicht mehr als zwei durch einen beliebig gegebenen Punkt gehen können, oder mit andern Worten, dass an die Kurve zweiter Klasse von einem beliebigen Punkte aus nicht mehr als zwei Tangenten gelegt werden können.

Schnittpunkten der entsprechenden Strahlen zweier projektivischen Strahlenbüschel in schiefer Lage nicht mehr als zwei auf einer beliebigen Geraden liegen können, oder mit andern Worten, dass die Kurve zweiter Ordnung mit einer beliebigen Geraden nicht mehr als zwei Schnittpunkte haben kann.

Erkl. 96a. Es steht in Uebereinstimmung mit den früheren Ausführungen der Erkl. 92, und wird später noch zum Gegenstand besonderer Erörterung, dass

ein Punkt, aus welchem an eine Klassenkurve keine, eine oder zwei Tangenten gehen, innerhalb, auf oder ausserhalb der Kurve liegt, und ebenso

eine Gerade, welche mit einer Ordnungskurve keinen, bezw. einen, oder zwei Schnittpunkte hat, ganz ausserhalb verläuft, bezw. die Kurve berührt oder schneidet.

Erkl. 97. Ueber ausgeartete Kurven zweiten Grades erhält man folgende Feststellungen:

1. Liegen zwei projektivische Punktreihen perspektivisch, so sind Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte erstens sämtliche Strahlen durch den Perspektivitätsscheitel, und zweitens jede Gerade durch den wegen der perspektivischen Lage sich selbstentsprechenden Schnittpunkt beider Träger. An Stelle des Strahlenbüschels zweiter Klasse entstehen also zwei Strahlenbüschel erster Klasse, und diese umhüllen (als Kurve) ihre Scheitelpunkte, nämlich den Perspektivitätsscheitel und den Schnittpunkt der Träger der erzeugenden Punktreihen, — also zwei getrennte Punkte.

2. Liegen zwei Punktreihen auf gemeinsamem Träger, so fällt jede Verbindungsgerade entsprechender Punkte mit dem Träger zusammen, diese einzelne Gerade selbst gilt als Kurve.

1. Liegen zwei projektivische Strahlenbüschel perspektivisch, so sind Schnittpunkte entsprechender Strahlen erstens sämtliche Punkte auf der Perspektivitätsachse, und zweitens jeder Punkt auf der wegen der perspektivischen Lage sich selbstentsprechenden Verbindungsgeraden beider Scheitel. An Stelle der Punktreihe zweiter Ordnung entstehen also zwei Punktreihen erster Ordnung, und diese erfüllen (als Kurve) ihre Träger, nämlich die Perspektivitätsachse und die Verbindungsgerade der Scheitel der erzeugenden Strahlenbüschel, also zwei getrennte Geraden.

2. Gehen zwei Strahlenbüschel durch einen gemeinsamen Scheitel, so fällt jeder Schnittpunkt entsprechender Strahlen mit dem Scheitel zusammen, dieser einzelne Punkt selbst gilt als Kurve.

Allgemeine Sätze über Kurven zweiten Grades müssen also auch für diese singulären Fälle Geltung behalten.

Frage 28. Welche Bestimmungsstücke sind für eine Kurve zweiter Klasse erforderlich, und wie kann man daraus beliebig viele Elemente (Tangenten) einer solchen auffinden?

Antwort. 1. Da eine Kurve zweiter Klasse bestimmt wird durch zwei Punktreihen erster Ordnung, so sind zur Bestimmung der Kurve erforderlich die beiden Träger der Punktreihen und drei Paare einander zugeordneter Punkte auf beiden Reihen, denn hierdurch ist dann die Verwandtschaft zwischen allen Punktepaaren der Punktreihen festgelegt. Die drei gegebenen zugeordneten Punktepaare liefern aber durch ihre Verbindungsgeraden drei Tangenten der Kurve; und so kann man auch sagen, die Kurve sei bestimmt durch Angabe der beiden Träger und dreier Tangenten der Kurve, oder der beiden Träger und dreier Strahlen des Strahlenbüschels zweiter Klasse.

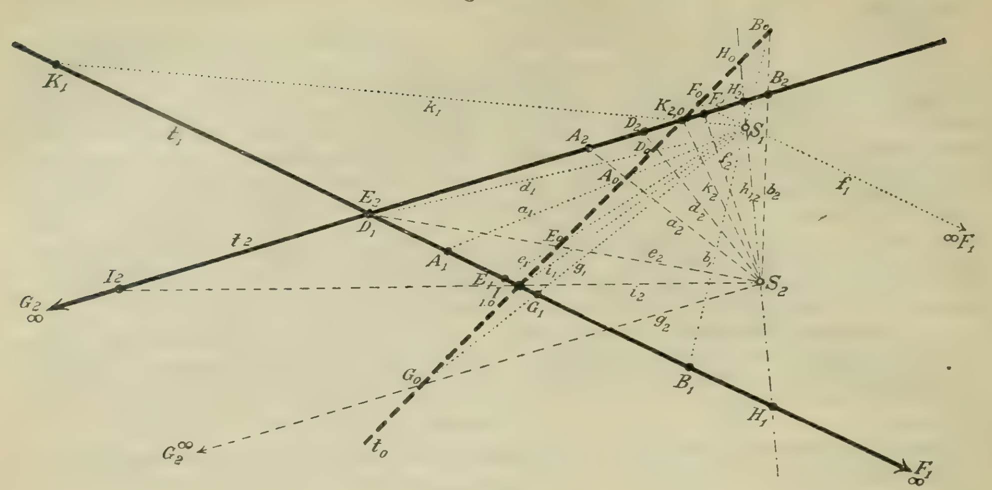
Um nun aus diesen gegebenen Stücken t_1 mit $A_1 B_1 H_1$ und t_2 mit $A_2 B_2 H_2$ (siehe Figur 26) beliebig viele weitere Elemente (Tangenten) der Kurve zu finden, hat man noch zu jedem weiteren Punkte der einen Punktreihe den entsprechenden der anderen zu suchen und beide Punkte zu verbinden.

2. Zu dem Zwecke wählt man zunächst auf einem beliebigen der drei gegebenen Verbindungsstrahlen $A_1 A_2$, $B_1 B_2$,

Erkl. 98. Sind $t_1\, t_2$ die beiden Träger (siehe Figur 26), und dem Punkte A_1 zugeordnet Punkt A_2, ebenso B_2 zu B_1 und H_2 zu H_1, so ist in der Auswahl des zu einem ganz beliebigen A_1 zugehörigen Punktes A_2 eine erste Willkürlichkeit, in der Wahl des zu beliebigem B_1 zugehörigen Punktes B_2 die zweite, in der Wahl von H_2 (zu H_1) die dritte Willkürlichkeit. Dazu kommt die Wahl der beiden Träger, also im ganzen fünffache Auswahl. Zu gleichem Ergebnis gelangt man, wenn man erst die Träger und dann die drei Tangenten $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $H_1 H_2$ je als willkürliche Elemente auswählt, indem dann die Schnittpunkte dieser drei Tangenten auf den Trägern als zugeordnete Punkte der Punktreihen zu nehmen sind. Man schliesst hieraus sofort, dass es fünffach unendlich viele Kurven zweiter Klasse in einer Ebene geben muss.

Erkl. 99. Die in den Teilen 2 bis 5 nebenstehender Antwort ausgeführten Konstruktionsweisen liegen durchaus im Rahmen der schon im vorigen I. Teile dieses Lehrbuches enthaltenen Methoden. Aber eines ist erst durch die Hinzunahme der Lehre von den harmonischen Punkten ermöglicht, nämlich die Eindeutigkeit (Antwort der Fragen 10 bis 12 dieses Bandes) der Zeichnung je nach verschiedener Wahl der Hilfselemente. So konnte schon auf Grund des vorigen Bandes gewählt werden ein Scheitelpaar S_1 und S_2 auf $H_1 H_2$, und dann mittels t_0 zu jedem Punkt auf t_1 der zugeordnete auf t_2 gefunden werden. Nicht möglich war aber inner-

Figur 26.



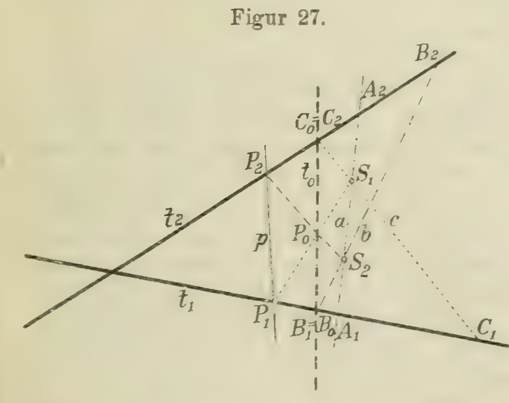
halb des Rahmens der rein geometrischen Betrachtungen des vorigen Bandes der Nachweis, dass bei Wahl anderer Scheitelpunkte als S_1 und S_2 — ob auf $H_1 H_2$ verändert, oder auf $A_1 A_2$ oder $B_1 B_2$ verlegt — dennoch zu jedem Punkt auf t_1 derselbe Punkt auf t_2 gefunden würde, als wie zuvor. Vielmehr musste dazu entweder die metrische Beweisführung mittels der Doppelverhältnisse zur Anwendung gelangen (Erkl. 152 im I. Bande dieses Lehrbuches), oder es musste zurückgehalten werden, bis durch die Theorie der harmonischen Beziehung auch auf rein geometrischem Wege die Eindeutigkeit der projektivischen Zuordnung auf Grund dreier zugeordneten Elementenpaare gezeigt werden konnte. Dieser einzige Punkt ist die Veranlassung, dass nicht das vorliegende dritte Kapitel dieses Lehrbuches vor dem ersten (und zweiten) abgehandelt wird; die Kurventheorie als solche könnte thatsächlich vorangestellt werden

Erkl. 100. Die nebenstehende Ausführung bildet die schon in Erkl. 112 des I. Teils dieses Lehrbuchs angekündigte Umänderung jener Konstruktion, in welcher nicht gegeben $t_1 t_2 S_1 S_2 t_0$ und gesucht A_{12}, B_{12} etc., sondern gegeben $t_1 t_2 A_{12} B_{12} C_{12}$, gesucht die zur Vermittlung nötigen Elemente $S_1 S_2 t_0$. Die wichtigste Stelle dieser Ueberlegung bildet dann die Erkennung der perspektivischen Lage der Büschel S_1 und S_2 und ihrer Perspektivitätsachse t_0. Man hat also in der Figur stets sorgfältig darauf zu achten, wo die Strahlen $S_1 A_1$, $S_2 A_2$; $S_1 B_1$, $S_2 B_2$; $S_1 C_1$, $S_2 C_2$ verlaufen und einander schneiden — auch wenn diese Strahlen nicht alle selbst eingezeichnet werden. So ist in Figur 27 $S_1 B_1$ und $S_2 B_2$ nicht ausgezogen, weil auch so erkannt werden kann, dass B_1 der Schnittpunkt der ersteren mit $S_2 B_2$, und C_1 jener der letzteren mit $S_1 C_1$.

$H_1 H_2$ zwei beliebige Punkte $S_1 S_2$ als Scheitel zweier Büschel, durch welche die Reihen t_1 und t_2 projiziert werden; und da nach Voraussetzung $t_1 \barwedge t_2$, so muss auch $S_1 \barwedge S_2$ werden. Nimmt man S_1 für t_1 und S_2 für t_2 auf $H_1 H_2$, so sind die Strahlen des Büschels S_1 die Geraden $S_1 A_1$, $S_1 B_1$, $S_1 H_1$ und die projektivisch zugeordneten Strahlen des Büschels S_2 die Geraden $S_2 A_2$, $S_2 B_2$, $S_2 H_2$. Da aber S_1 und S_2 auf $H_1 H_2$ liegen, so fallen $S_1 H_1$ und $S_2 H_2$ in dieselbe Gerade, sind also selbstentsprechend; und deshalb ist nicht nur $S_1 \barwedge S_2$, sondern $S_1 \barwedge S_2$, d. h. die Büschel S_1 und S_2 sind projektivisch verwandt in perspektivischer Lage.

3. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen der beiden Büschel, nämlich $S_1 A_1$ und $S_2 A_2$, $S_1 B_1$ und $S_2 B_2$, $S_1 H_1$ und $S_2 H_2$ müssen also auf einer Geraden t_0 liegen; und als Punkte dieser Geraden kennt man schon die Schnittpunkte der beiden ersten Paare, also ist auch die Gerade t_0, nämlich die Perspektivitätsachse der Büschel $S_1 S_2$, bekannt, sie ist nämlich die Verbindungsgerade der Schnittpunkte der Strahlenpaare $S_1 A_1$ und $S_2 A_2$, sowie $S_1 B_1$ und $S_2 B_2$. Als Schnittpunkt der Strahlen $S_1 H_1$ und $S_2 H_2$ gilt dann auch der Schnittpunkt von $H_1 H_2$ mit t_0; und die Reihe der auf t_0 entstehenden Schnittpunkte

Figur 28.



Figur 27.

Erkl. 101. In Figur 26 und 27 sind jeweils nur für einige wenigen Punkte die entsprechenden konstruiert und verbunden, z. B. zu gegebenem P_1 auf t_1 der Punkt P_2 auf t_2 oder zu gegebenem Q_2 auf t_2 der Punkt Q_1 auf t_1. In Figur 28 dagegen ist für eine grössere Zahl von Punkten dasselbe geschehen mittels derselben Grundelemente $S_1 S_2 t_0$, wie in Figur 27, so dass man einen Einblick erhält in die wirkliche Entstehung des Strahlenbüschels zweiter Klasse bezw. der Kurve. Weitere Einzelheiten über verschiedene Lage der Elemente u. s. w.

bildet eine Punktreihe, welche sowohl mit S_1 als S_2 projektivisch in perspektivischer Lage ist.

4. Die Auffindung weiterer zugeordneten Punktepaare auf t_1 und t_2 geschieht also nach der Zeichnungsvorschrift:

$$t_1 \barwedge S_1 \barwedge t_0 \barwedge S_2 \barwedge t_2$$

oder umgekehrt (s. Antwort auf Frage 31 des I. Teiles dieses Lehrbuches). Und die Tangenten der Kurve sind die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte beider Reihen.

5. Die Figur wird besonders einfach, wenn man für S_1 und S_2 gerade auf $A_1 A_2$ die Schnittpunkte mit den beiden andern Tangenten $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ wählt (siehe Figur 27): dann wird der Schnittpunkt von $S_1 B_1$ und $S_2 B_2$ selbst zu B_1, der Schnittpunkt von $S_1 C_1$ und $S_2 C_2$ zu C_2, und t_0 wird zur Verbindungsgeraden von $B_1 C_2$, so dass das Einzeichnen neuer Linien möglichst vermieden wird.

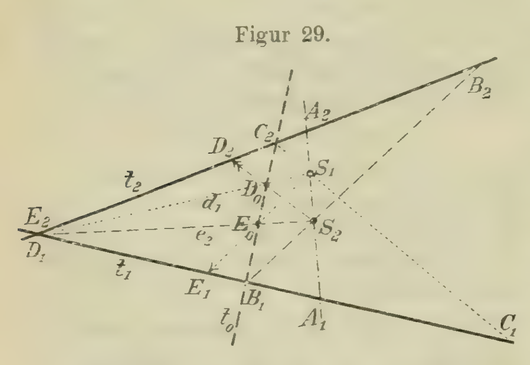
findet man in der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles. Man vergleiche auch Erkl. 113 und 114.

6. Als Ergebnis der Konstruktion erhält man dann zu jedem Punkt der einen Reihe den entsprechenden Punkt der andern, bezw. die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte, oder mit andern Worten, zu jedem beliebigen Punkte eines Trägers die von ihm ausgehende Tangente der Kurve. Man findet also nicht ganz beliebige Tangenten der Kurve, sondern nur solche Tangenten, deren Ausgangspunkt auf einem der Träger voraus gegeben ist.

Frage 29. Welche Beziehung zur Kurve haben die Träger der Punktreihen $t_1 t_2$ und ihr Schnittpunkt?

Erkl. 102. Nach der ursprünglichen Definition (Antwort auf Frage 27) besteht der Strahlenbüschel zweiter Klasse aus der Gesamtheit der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte beider Träger $t_1 t_2$. Wenn also Träger t_1 selber die Punkte E_1 und E_2, Träger t_2 die Punkte D_1 und D_2 verbindet, so muss der Träger auch eine Tangente der Kurve sein. — Dass umgekehrt auch jede der vorher gegebenen Tangenten der Kurve als Träger aufgefasst werden kann, ist damit noch nicht nachgewiesen. Der Beweis dafür, dass auch diese Umkehrung richtig ist, wird in der Antwort der nächsten Frage 30 erbracht.

Figur 29.



Erkl. 103. Lässt man die Tangente $A_1 A_2$ längs der Kurve wandern, so erhält man jeweils einen Schnittpunkt auf dem Träger t_1. Nur einmal ist dieser Schnittpunkt unbestimmt, indem die Tangente mit dem Träger selbst zusammenfällt. Da aber der Schnittpunkt unmittelbar vor dem Zusammenfallen auf der einen Seite des Punktes E_1, unmittelbar nach dem Zusammenfallen auf der andern Seite desselben Punktes gelegen ist, so wird man für das Zusammenfallen selber den Punkt E_1 als

Antwort. 1. Bezeichnet man mit $D_1 E_2$ den Schnittpunkt beider Träger, je nachdem derselbe als Punkt von t_1 oder t_2 aufgefasst wird, so hat

Punkt D_1 auf t_1 auch einen entsprechenden Punkt D_2 auf t_2, und

Punkt E_2 auf t_2 auch einen entsprechenden Punkt E_1 auf t_1.

Und die Verbindungsgerade der Punkte $D_1 D_2$ fällt zusammen mit t_2, die Verbindungsgerade von $E_1 E_2$ fällt zusammen mit t_1. Demnach sind auch die Träger t_1 und t_2 selbst Verbindungsgerade entsprechender Punkte beider Punktreihen, und somit Tangenten der Kurve oder Strahlen des Strahlenbüschels zweiter Klasse, wie jeder andere der Strahlen $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ u. s. w.

2. Betrachtet man der Reihe nach die Punkte auf dem Träger t_1, welcher nach vorigem Ergebnis eine Tangente der Kurve ist, so findet man, dass

durch Punkt A_1 zwei Tangenten gehen, nämlich erstens der Träger t_1 und zweitens $A_1 A_2$,

durch Punkt B_1 zwei Tangenten gehen, nämlich erstens der Träger t_1 und zweitens $B_1 B_2$,

durch Punkt C_1 zwei Tangenten gehen, nämlich erstens der Träger t_1 und zweitens $C_1 C_2$, u. s. w.

Dagegen geht durch Punkt E_1 nur eine Tangente, indem nach vorigem der Träger t_1 und $E_1 E_2$ zusammenfallen. Demnach ist Punkt E_1 ein solcher Punkt auf einer Tangente, durch

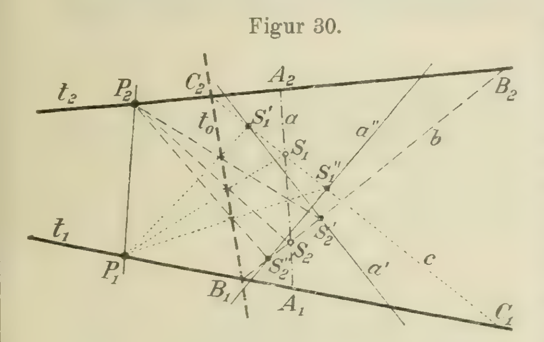
Schnittpunkt anzusehen haben; und so stellt sich der Berührungspunkt E_1 dar als Schnittpunkt zweier unendlich nahegelegenen Tangenten, zweier unendlich nahe benachbarten Strahlen des Strahlenbüschels zweiter Klasse (vergl. Erkl. 91).

Erkl. 104. Das Aufsuchen des Berührungspunktes der Kurve auf einem Träger fällt nach vorigem zusammen mit der einfachen Aufgabe, den entsprechenden Punkt zum Schnittpunkt der Träger zu finden. Diese Eigenschaft des Berührungspunktes (der auch „Stützpunkt" der Kurve genannt wird) gibt später Veranlassung zu einer Reihe weiterer Erörterungen und Aufgaben.

welchen ausser dieser einen Tangente keine weitere geht, und folglich muss E_1 der Berührungspunkt auf der Tangente t_1 sein (vergl. Antwort auf Frage 26 und Erkl. 92). Auf Grund genau gleichlautender Ueberlegung findet man, dass auch D_2 auf t_2 Berührungspunkt auf dem Träger t_2 ist.

Frage 30. Welche Beziehung haben die Kurventangenten und die Träger?

Figur 30.



Antwort. Wie in voriger Antwort gezeigt wurde, dass die Träger gleichbedeutend sind mit Tangenten, so kann man auch beweisen, dass jede der Tangenten gleichbedeutend ist mit den Trägern. Zu dem Zweck beachte man, dass schon in Figur 26 bezw. 27 die Punkte S_1 und S_2 die Eigenschaft zeigten, dass die Geraden P_1S_1, P_2S_2 durch denselben Punkt der Geraden t_0 bezw. B_1C_2 gingen. Wählt man statt der Tangente A_1A_2 eine andere an dieselbe Kurve (s. Figur 30) und nimmt wieder für S_1 und S_2 deren Schnittpunkte mit b und c, so bleibt im übrigen die ganze Figur dieselbe und es müssen wieder die neuen Strahlen P_1S_1 und P_2S_2 durch einen Punkt derselben Geraden B_1C_2 hindurchgehen, denn da die Tangenten B_1B_2 und C_1C_2 beibehalten werden, so bleibt auch die Gerade B_1C_2 dieselbe. Denkt man sich so die Tangente a stetig verändert, so wechseln auch stetig die Punkte S_1 und S_2 auf b und c, und die Punkte P_1 und P_2 werden zu Scheiteln zweier Büschel, deren entsprechende Strahlen einander auf B_1C_2 treffen, welche also diese Gerade t_0 zur Perspektivitätsachse haben. Wegen letzterer Eigenschaft sind die beiden Büschel durch P_1 und P_2 projektivisch, und ebenso sind hiernach die beiden Punktreihen $S_1S_1'S_1''$ und $S_2S_2'S_2''$ projektivisch, welche von den Punkten S_1 und S_2 auf den beiden Tangenten b und c durchlaufen werden.

Erkl. 105. Da nach nebenstehender Ueberlegung für jede Tangente dasselbe gilt, was von den Trägern, so hat auch jede Tangente ihren Berührungspunkt, und zwar einen einzigen. Denn wegen der nachgewiesenen Eindeutigkeit der projektivischen Verwandtschaft kann für denjenigen Punkt einer Tangente, durch welchen bei Zuordnung zu einem ersten Träger nur ein einziger Büschelstrahl hindurchgeht, bei Zusammenfassung mit einem verschiedenen Träger nicht noch eine zweite Tangente hinzukommen, d. h. die Tangente kann durch verschiedene Gruppierung mit andern Tangenten als Trägern nicht verschiedene Berührungspunkte erhalten: Hiernach kann also die als Tangentengebilde entstandene Kurve auch aufgefasst werden als Punktgebilde der sämtlichen Berührungspunkte ihrer Tangenten.

Erkl 106. Betrachtet man die Figur 25 im Vergleich mit Figur 28 auf Grundlage des nebenstehenden Ergebnisses, so sieht man, dass in Figur 25 zwei ganz beliebige der vorhandenen Geraden als Träger ausgewählt werden dürfen: jedesmal schneidet die Gesamtheit der die Kurve einhüllenden Geraden zwei projektivisch verwandte Punktreihen auf denselben

aus, auf denen der entsprechende Punkt zum Schnittpunkt der Berührungspunkt ist. — Würde man also die Kurve bezw. den Strahlenbüschel zweiter Klasse als gegeben ansehen dürfen, so wäre die Herstellung zweier projektivisch verwandten Punktreihen dadurch sofort bewerkstelligt, dass man zwei beliebige der Tangenten als Punkte oder Träger, und ihre Schnittpunkte mit den andern als zugeordnete Punkte wählt.

Erkl. 107. Umgekehrt verlieren die Träger der den Strahlenbüschel zweiter Klasse erzeugenden Punktreihen vollständig ihre ausgezeichnete Stellung und treten in die Gesamtheit aller übrigen Projektionsstrahlen entsprechender Punktepaare als völlig gleichwertige Elemente ein. Auf jeder dieser Tangenten gibt es in ihrer unendlichen Erstreckung lauter Punkte, aus welchen noch eine zweite Tangente an die Kurve geht; die einzige Ausnahme bildet der Berührungspunkt. — Denkt man sich also auf weissem Zeichenblatt alle Tangenten als schwarze Geraden ausgezogen, so werden die Geraden dasjenige unendlich grosse Gebiet der Ebene schwarz überdecken, aus dessen Punkten zwei Tangenten an die Kurve gehen, dasjenige unendlich oder endlich ausgedehnte Gebiet aber weiss lassen, aus dessen Punkten keine Tangenten an die Kurve gehen, und die Grenze zwischen diesem schwarzen und weissen Gebiet wird gebildet durch diejenigen Punkte, aus welchen nur eine einzige Tangente an die Kurve geht. Der geometrische Ort dieser Punkte, nämlich der Berührungspunkte der Tangenten, liefert dann diejenige Kurve als Punktgebilde, welche als Strahlengebilde erzeugt ist durch die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte der projektivisch verwandten Punkte: als Strahlenbüschel zweiter Klasse.

Diese Punkte bilden aber nichts anderes, als die Punktreihe der Schnittpunkte einer beliebigen veränderlichen Tangente a auf den zwei festgehaltenen Tangenten b und c; und daher findet man das wichtige Ergebnis, dass nicht nur auf den Trägern, sondern auf jedem beliebigen Paare von Kurventangenten durch die Schnittpunkte mit einer beliebigen veränderlichen Tangente zwei projektivisch verwandte Punktreihen gebildet werden. Somit kann jedes beliebige Tangentenpaar gewählt werden als Trägerpaar zweier projektivisch verwandten Punktreihen, deren entsprechende Punkte zu Verbindungsgeraden die Strahlen des Strahlenbüschels zweiter Klasse haben.

Frage 31. Welche Folgerungen ergeben sich aus den vorigen Erörterungen für die Bestimmungsstücke einer Tangentenkurve?

Erkl. 108. Es ist dringend erforderlich, sich zu merken, dass die nebenstehenden drei Arten der Bestimmung einer Kurve dazu nötigen, die Kurve als Klassenkurve, d. h. in der Auffassung als Strahlenbüschel zu konstruieren — nicht als Punktkurve. Dieser Unterschied kehrt später wieder in der Gegenüberstellung der Konstruktionen nach dem Satze von Brianchon oder dem von Pascal — erstere für den Strahlenbüschel zweiter Klasse, letztere für die Punktreihe zweiter Ordnung.

Erkl. 109. Für eine abgekürzte Ausdrucksweise ist es erwünscht, eine bestimmte Bezeichnungsweise für den Fall zu haben, dass ein Kurvenpunkt mit seiner Berührungsgeraden bezw. eine Tangente mit ihrem

Antwort. 1) Da eine Kurve als Strahlenbüschel zweiter Klasse bestimmt ist durch Festlegung der projektivischen Verwandtschaft zwischen den beiden Punktreihen auf zwei Trägern, so hatte man (siehe Antwort auf Frage 28) als erste Bestimmungsweise drei zugeordnete Punktepaare auf beiden Trägern, oder mit andern Worten fünf Tangenten, von denen zwei als Träger, die andern als Erzeugende projektivischer Punktepaare aufzufassen wären.

2. Ist unter jenen Punktepaaren der Schnittpunkt der beiden Punktreihen als Punkt der einen Reihe enthalten, also $A_1B_1D_1$ und $A_2B_2D_2$ in Figur 27

Berührungspunkt in vereinigter Lage gemeint sein sollen. Dazu eignet sich eine Einklammerung beider Elemente T und P, also (TP). Hiernach sind die drei Bestimmungsarten der Klassenkurve:

$$TTTTT, \quad TTT(TP), \quad T(TP)(TP).$$

Erkl. 110. Gegenüber den Bezeichnungen in den Figuren 27 bis 30 muss durch die nebenstehende zweite und dritte Bestimmungsweise eine Aenderung in der Weise eintreten, dass für die Scheitelpunkte $S_1 S_2$ nicht mehr die Schnittpunkte der drei Tangenten $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ zur Verfügung stehen. Auf Grund der Antwort auf Frage 29 kann man aber dafür auch mit gleichem Erfolge der Vereinfachung der Figur die Schnittpunkte mit t_1 und t_2 nehmen; dadurch fällt der Träger t_{in}, z. B. im dritten Falle, auf die Verbindungsgerade $D_2 E_1$. Näheres hierüber findet man in den Konstruktionsaufgaben der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teils.

bis 30, so kennt man die beiden Träger, auf einem derselben den Berührungspunkt, und dazu noch die beiden Tangenten $A_1 A_1$ und $B_1 B_2$. Dies ergibt als zweite Bestimmungsweise: **vier Tangenten und auf einer derselben den Berührungspunkt.**

3. Unter den gegebenen Punktepaaren kann sich aber der Schnittpunkt der beiden Punktreihen als Punkt beider Reihen befinden, also $A_1 D_1 E_1$ und $A_2 D_2 E_2$ in Figur 27 bis 30; dann hat man beide Träger, auf jedem derselben den Berührungspunkt, und dazu noch die eine Tangente $A_1 A_2$. Dies ergibt als dritte Bestimmungsweise: **drei Tangenten und auf zweien derselben den Berührungspunkt.**

Frage 32. Welche Bestimmungsstücke sind für eine Kurve zweiter Ordnung erforderlich, und wie kann man daraus beliebig viele Elemente (Kurvenpunkte) einer solchen auffinden?

Erkl. 111. Die Auswahl der Elemente S_1, S_2, a_1 und a_2, b_1 und b_2, h_1 und h_1 ergibt auch hier fünffache Willkürlichkeit, indem die Scheitel S_1 und S_2 beliebig gewählt werden können, und ebenso — wenn drei Strahlen des Büschels S_1 festgestellt sind, zu jedem ein beliebig auszuwählender Strahl des Büschels S_2 zuzuordnen ist. Man zieht also den Schluss, dass es fünffach unendlich viele Kurven zweiter Ordnung in der Ebene geben kann Hiernach wird auch die Bestimmung der Kurven zweiten Grades stets durch fünf willkürliche Elemente zu geschehen haben. Und diese fünf müssen je nach der Konstruierbarkeit der Kurven ausgewählt werden unter Punkten und Tangenten, einzeln oder in vereinigter Lage.

Erkl. 112. Der Inhalt der Antworten auf Frage 32 bis 35 bildet die genaue dualistische Uebertragung der Antworten auf Frage 28 bis 31. Wegen der räumlichen Hindernisse ist die Gegenüberstellung auf gleicher Seite vermieden, und erst in der Zusammenfassung in Antwort auf Frage 36 zur Anwendung gebracht.

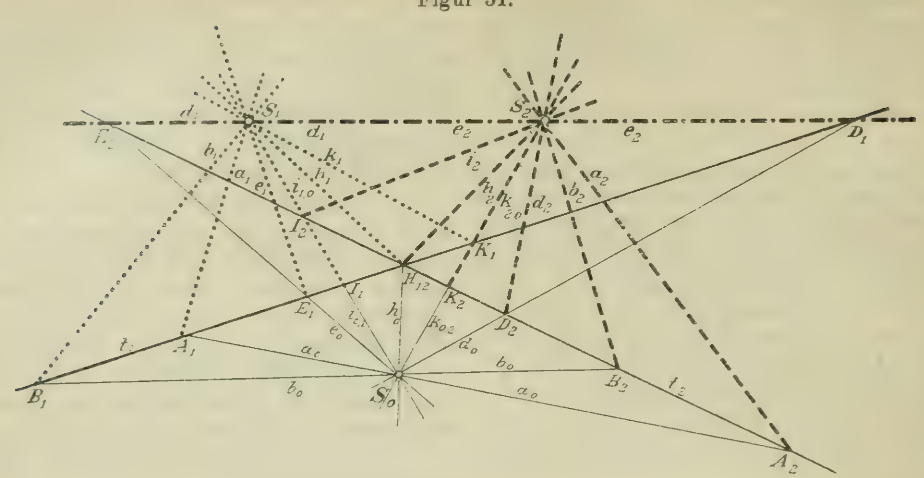
Es gelten daher für nebenstehende Antwort auch dieselben grundsätzlichen Erörterungen, welche in Erkl. 99 und 100 über die Eindeutigkeit der Konstruktionen und deren Vergleichung mit früheren gemacht wurden. Die Figuren 26 und 31 sind dieselben, wie die Figuren 19 und 20 des I. Teils. Während aber dort ge-

Antwort. 1. Da eine Kurve zweiter Ordnung bestimmt ist durch zwei Strahlenbüschel erster Klasse, so sind zur Bestimmung der Kurve erforderlich die beiden Scheitel der Strahlenbüschel und drei Paare einander zugeordneter Strahlen in beiden Büscheln, denn hierdurch ist die Verwandtschaft zwischen allen Strahlenpaaren der Strahlenbüschel festgelegt. Die drei gegebenen zugeordneten Strahlenpaare liefern aber durch ihre Schnittpunkte drei Punkte der Kurve, und so kann man auch sagen, die Kurve sei bestimmt durch Angabe der beiden Scheitel und dreier Kurvenpunkte, oder der beiden Scheitel und dreier Punkte der Punktreihe zweiter Ordnung.

Um nun aus diesen gegebenen Stücken S_1 mit $a_1 b_1 h_1$ und S_2 mit $a_2 b_2 h_2$ (siehe Figur 31) beliebig viele weitere Elemente (Kurvenpunkte) der Kurve zu finden, hat man noch zu jedem weiteren Strahle des einen Strahlenbüschels den entsprechenden Strahl des andern zu suchen und beide Strahlen zum Schnitt zu bringen.

2. Zu dem Zweck wählt man zunächst durch einen beliebigen der drei gegebenen


Figur 31.



geben sind die Elemente $S_1 S_2 t_1 t_2 t_0$, gesucht a_2 zu a_1, b_2 zu b_1, u. s. w., so sind hier gegeben $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $h_1 h_2$ (das letztere Elementenpaar so bezeichnet, weil es in gleicher Bedeutung verwandt wird, wie in der Antwort 31 bezw. 32 des I. Teils). Dazu müssen dann die Vermittlungselemente gesucht werden und unter diesen bilden die wichtigste Gruppe die in perspektivischer Lage befindlichen Punktreihen t_1 und t_2.

Erkl. 113. Analog den Figuren 27 und 28 sind auch in Figur 31 und 32 nur für einige Strahlen die entsprechenden konstruiert, in Figur 33 dagegen für eine grössere Zahl und zwar mittels derselben Elemente wie in Figur 32.

Vergleicht man die Gruppierung der Elemente in Figur 27, 28 bezw. in Figur 32, 33 mit der Bezeichnung der Elemente in Figur 26 bezw. 31, so findet man, dass die Vereinfachung der Figuren 27 bezw. 32 dadurch erzielt ist, dass nicht nur für die Elemente H, h der Figuren 26, 31, sondern auch für die Elemente I, i, K, k entsprechende Verwendung stattfindet. Während nämlich der Träger t_0 in Figur 26 bezw. S_0 in Figur 31 bestimmt wird durch beliebige Elemente A, a, B, b, so wird t_0 in Figur 27 bezw. S_0 in Figur 32 bestimmt durch Elemente entsprechend den Elementen $IiKk$ in Figur 26 bezw. 31. Man hat also die Vereinfachung dadurch erzielt, dass die Elemente $AaBbCc$ nicht als beliebige verwendet werden, sondern in derjenigen Eigenschaft, welche in den früher allgemeinen Figuren den Elementen Hh, Ii, Kk zukam wegen ihrer besonderen Lage (vergl. auch die Aufgaben 78 und 82 der Aufgabensammlung des I. Teils).

Schnittpunkte $(a_1 a_2)$ $(b_1 b_2)$ $(h_1 h_2)$ zwei beliebige Geraden $t_1 t_2$ als Träger zweier Punktreihen, auf welche die Büschel S_1 und S_2 sich projizieren; und da nach Voraussetzung $S_1 \barwedge S_2$, so muss auch $t_1 \barwedge t_2$ werden. Legt man t_1 für S_1 und t_2 für S_2 durch $(h_1 h_2)$, so sind die Punkte der Reihe t_1 die Schnittpunkte $(t_1 a_1)$, $(t_1 b_1)$, $(t_1 h_1)$, und die projektivisch zugeordneten Punkte der Reihe t_2 die Schnittpunkte $(t_2 a_2)$, $(t_2 b_2)$, $(t_2 h_2)$. Da also t_1 und t_2 durch $(h_1 h_2)$ gehen, so fallen $(t_1 h_1)$ und $(t_2 h_2)$ in denselben Punkt, sind also selbstentsprechend; und deshalb ist nicht nur $t_1 \barwedge t_2$, sondern $t_1 \doublebarwedge t_2$, d. h. die Punktreihen t_1 und t_2 sind projektivisch verwandt in perspektivischer Lage.

3. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte der beiden Reihen, nämlich $(t_1 a_1)$ und $(t_2 a_2)$, $(t_1 b_1)$ und $(t_2 b_2)$, $(t_1 h_1)$ und $(t_2 h_2)$ müssen also durch einen Punkt S_0 gehen; und als Strahlen durch diesen Punkt kennt man schon die Verbindungsgeraden der beiden ersten Paare, also ist auch der Punkt S_0, nämlich der Perspektivitätsscheitel der Reihen $t_1 t_2$ bekannt, er ist nämlich der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte $(t_1 a_1)$ und $(t_2 a_2)$ sowie $(t_1 b_1)$ und $(t_2 b_2)$. Als Verbindungsgerade der Punkte $(t_1 h_1)$ und $(t_2 h_2)$ gilt dann die Verbindungsgerade von $(h_1 h_2)$ mit S_0; und der Büschel der durch S_0

Erkl. 114. In Bezug auf die Auswahl der Elemente *AaBbCc* zu den gegebenen Trägern $t_1 t_2$ bezw. Scheiteln $S_1 S_2$ ist zu beachten, dass

von den drei Tangenten $(A_1 A_2)$ $(B_1 B_2)$ $(C_1 C_2)$

1. keine durch den Schnittpunkt der Träger $t_1 t_2$ gehen darf, weil sonst der Punkt $D_1 E_2$ selbstentsprechend und die beiden Reihen t_1 t_2 in perspektivischer Lage wären;

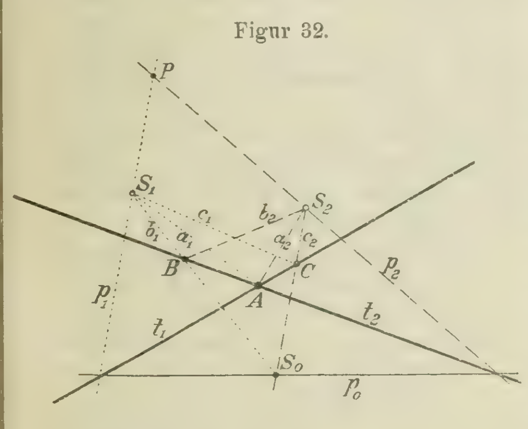
2. keine zwei durch denselben Punkt eines Trägers gehen dürfen, weil sonst einem Punkte zwei andere zugeordnet sein würden.

von den drei Punkten $(a_1 a_2)$ $(b_1 b_2)$ $(c_1 c_2)$

1. keiner auf der Verbindungsgeraden der Scheitel S_1 S_2 liegen darf, weil sonst der Strahl d_1 e_2 selbstentsprechend und die beiden Büschel S_1 S_2 in perspektivischer Lage wären;

2. keine zwei auf demselben Strahl eines Büschels liegen dürfen, weil sonst einem Strahl zwei andere zugeordnet sein würden.

Figur 32.



entstandenen Geraden bildet einen Strahlenbüschel. welcher sowohl mit t_1 als t_2 projektivisch in perspektivischer Lage ist.

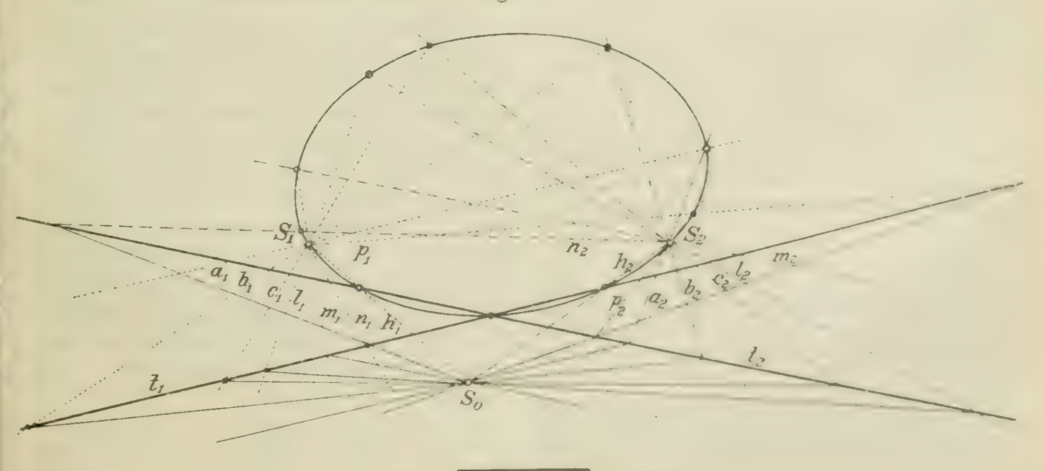
4. Die Auffindung weiterer zugeordneten Strahlenpaare von S_1 und S_2 geschieht also nach der Zeichnungsvorschrift: $S_1 - t_1 - S_0 - t_2 - S_2$, oder umgekehrt (siehe Antwort auf Frage 32 des I. Teils). Und die Punkte der Kurve sind die Schnittpunkte entsprechender Strahlen beider Büschel.

5. Die Figur wird besonders einfach, wenn man für t_1 und t_2 gerade die Verbindungsgeraden von $(a_1 a_2)$ mit den beiden andern Kurvenpunkten $(b_1 b_2)$ und $(c_1 c_2)$ wählt (siehe Figur 32): dann wird die Verbindungsgerade von $(t_1 b_1)$ und $(t_2 b_2)$ selbst zu b_1, die Verbindungsgerade von $(t_1 c_1)$ und $(t_2 c_2)$ zu c_2, und S_0 wird zum Schnittpunkt von $(b_1 c_2)$, so dass die Einzeichnung neuer Linien möglichst vermieden wird.

6. Als Ergebnis der Konstruktion erhält man dann zu jedem Strahl des einen Büschels den entsprechenden Strahl des andern bezw. den Schnittpunkt dieser beiden Strahlen, oder mit andern Worten zu jedem beliebigen Strahle eines Büschels den auf ihm liegenden Kurvenpunkt. Man findet also nicht ganz beliebige Punkte der Kurve, sondern nur solche Kurvenpunkte, deren Verbindungsstrahl mit einem der Scheitel vorausgegeben ist.



Figur 33.



Frage 33. Welche Beziehung zur Kurve haben die Scheitel der Strahlenbüschel $S_1 S_2$ und ihr Verbindungsstrahl?

Figur 34.

Antwort. 1. Bezeichnet man mit $d_1 e_2$ den Verbindungstrahl der beiden Scheitel, je nachdem derselbe als Strahl von S_1 oder S_2 aufgefasst wird, so hat

Strahl d_1 durch S_1 auch einen entsprechenden Strahl d_2 durch S_2, und

Strahl e_2 durch S_2 auch einen entsprechenden Strahl e_1 durch S_1.

Und der Schnittpunkt der Strahlen $d_1 d_2$ fällt zusammen mit S_2, der Schnittpunkt von $e_1 e_2$ fällt zusammen mit S_1. Demnach sind auch die Scheitelpunkte S_1 und S_2 selbst Schnittpunkte entsprechender Strahlen beider Büschel und somit Punkte der Kurve oder Punkte der Punktreihe zweiter Ordnung, wie jeder andere der Schnittpunkte $(a_1 a_2)$ $(b_1 b_2)$ $(c_1 c_2)$ u. s. w.

2. Betrachtet man der Reihe nach die Strahlen durch den Scheitel S_1, welcher nach vorigem Ergebnis ein Punkt der Kurve ist, so findet man, dass

auf Strahl a_1 zwei Kurvenpunkte liegen, nämlich erstens der Scheitel S_1 und zweitens $(a_1 a_2)$,

auf Strahl b_1 zwei Kurvenpunkte liegen, nämlich erstens der Scheitel S_1 und zweitens $(b_1 b_2)$,

auf Strahl c_1 zwei Kurvenpunkte liegen, nämlich erstens der Scheitel S_1 und zweitens $(c_1 c_2)$, u. s. w.

Dagegen liegt auf dem Strahl e_1 nur ein Kurvenpunkt, indem nach dem vorigen der Scheitel S_1 und $(e_1 e_2)$ zusammenfallen. Demnach ist Stahl e_1 ein solcher Strahl durch einen Kurvenpunkt, auf welchem ausser diesem einen Kurvenpunkt kein weiterer liegt, und folglich muss e_1 die Tangente durch den Kurvenpunkt S_1 sein (vergl. Antwort auf Frage 26 und Erkl. 92). Auf Grund genau gleichlautender Ueberlegung findet man, dass auch d_2 durch S_2 Tangente im Scheitel S_2 ist.

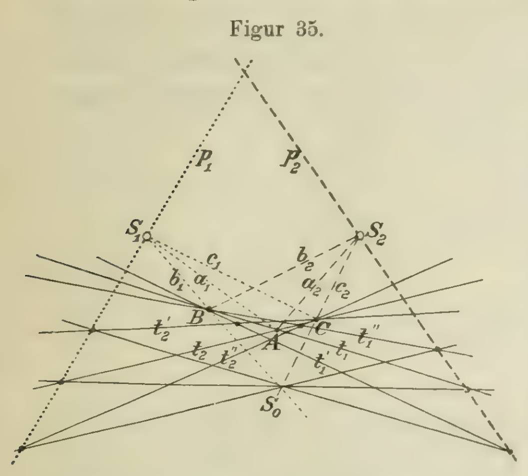
Erkl. 115. Nach der ursprünglichen Definition (siehe Antwort auf Frage 27) besteht die Punktreihe zweiter Ordnung aus der Gesamtheit der Schnittpunkte entsprechender Strahlen beider Büschel $S_1 S_2$. Wenn also S_1 selber der Schnittpunkt von e_1 und e_2, Scheitel S_2 Schnittpunkt von d_1 und d_1 ist, so muss der Scheitel auch ein Punkt der Kurve sein. — In der Antwort der folgenden Frage 34 wird allgemein gezeigt werden, dass auch umgekehrt jeder der gegebenen Kurvenpunkte als Scheitel aufgefasst werden kann.

Erkl. 116. Lässt man den Kurvenpunkt $(a_1 a_2)$ längs der Kurve wandern, so erhält man jeweils einen Verbindungsstrahl mit dem Scheitel S_1. Nur einmal ist dieser Verbindungsstrahl unbestimmt, indem der Kurvenpunkt mit dem Scheitel selbst zusammenfällt. Da aber der Verbindungsstrahl unmittelbar vor dem Zusammenfallen auf der einen Seite der Geraden e_1, unmittelbar nach dem Zusammenfallen auf der andern Seite derselben Geraden gelegen ist, so wird man für das Zusammenfallen selber die Gerade e_1 als Verbindungsgerade anzusehen haben; und so stellt sich die Tangente e_1 dar als Verbindungsgerade zweier einander unendlich nahe gelegenen Kurvenpunkte, zweier unendlich nahe benachbarten Punkte der Punktreihe zweiter Ordnung.

Erkl. 117. Das Aufsuchen der Tangente der Kurve in einem Scheitel fällt nach vorigem zusammen mit der einfachen Aufgabe, den entsprechenden Strahl zum Verbindungsstrahl der Scheitel zu finden. Diese Eigenschaft der Tangente findet vielfache Verwendung, da hierdurch die Tangente in einem Kurvenpunkt der Ordnungskurve ebenso auftreten kann wie ein Strahl des Büschels.

Frage 34. Welche Beziehung haben die Kurvenpunkte und die Scheitel?

Figur 35.



Erkl. 118. Da nach nebenstehender Ueberlegung für jeden Kurvenpunkt dasselbe gilt, wie von den Scheiteln, so hat auch jeder Kurvenpunkt seine Berührungsgerade, und zwar eine einzige; denn wegen der Eindeutigkeit der projektivischen Verwandtschaft kann auf demjenigen Strahl eines Kurvenpunktes, auf welchem bei Zuordnung zu einem ersten Scheitel nur ein einziger Kurvenpunkt liegt, bei Zusammenfassung mit einem verschiedenen Scheitel nicht noch ein zweiter Kurvenpunkt hinzukommen, d. h. der Kurvenpunkt kann durch verschiedene Gruppierung mit andern Kurvenpunkten als Scheiteln nicht verschiedene Tangenten erhalten. Hiernach kann also die als Punktgebilde entstandene Kurve auch aufgefasst werden als Tangentengebilde der unendlich vielen Berührungsgeraden ihrer Kurvenpunkte.

Erkl. 119. Betrachtet man die Figur 33 im Vergleich mit der Figur einer beliebigen Punktkurve zweiter Ordnung (z. B. Figur 23), so zeigt das nebenstehende Ergebnis, dass man zwei ganz beliebige der vorhandenen Kurvenpunkte als Büschelscheitel wählen darf: jedesmal liefert die Gesamtheit der Kurvenpunkte als Verbindungsgeraden zwei projektivisch verwandte Strahlenbüschel, in denen der entsprechende Strahl zum Verbindungsstrahl die Tangente ist. — Würde man also die Kurve bezw. die Punktreihe zweiter Ordnung als gegeben ansehen, so wäre die Herstellung zweier projektivisch verwandten Strahlenbüschel dadurch sofort bewerkstelligt, dass man zwei beliebige der Kurvenpunkte als Büschelscheitel und ihre Verbindungsgeraden mit den andern als zugeordnete Strahlen wählt.

Erkl. 120. Umgekehrt verlieren die Scheitel der die Punktreihe zweiter Ordnung erzeugenden Strahlenbüschel vollständig ihre ausgezeichnete

Antwort. Wie in der vorigen Antwort gezeigt wurde, dass die Scheitel gleichbedeutend sind mit Kurvenpunkten, so kann man auch beweisen, dass jeder Kurvenpunkt gleichbedeutend ist mit den Scheiteln. Zu dem Zweck beachte man, dass schon in Figur 31 bezw. 32 die Geraden $t_1 t_2$ die Eigenschaft aufweisen, dass die Schnittpunkte $(p_1 t_1)$ und $(p_2 t_2)$ auf derselben Geraden durch den Punkt S_0 bezw. $(b_1 c_1)$ lagen. Wählt man statt des Kurvenpunktes $(a_1 a_2)$ einen andern auf derselben Kurve (siehe Figur 35), und nimmt wieder für t_1 und t_2 dessen Verbindungsgeraden mit B und C, so bleibt im übrigen die ganze Figur dieselbe, und es müssen wieder die neuen Punkte $(p_1 t_1)$ und $(p_2 t_2)$ auf einer Geraden durch denselben Punkt $(b_1 c_2)$ liegen, denn da die Kurvenpunkte $(b_1 b_2)$ und $(c_1 c_2)$ beibehalten werden, so bleibt auch der Punkt $(b_1 c_2)$ derselbe. Denkt man sich nun den Kurvenpunkt A stetig veränderlich, so wechseln auch stetig die Geraden t_1 und t_2 durch B und C, und die Geraden p_1 und p_2 werden zu Trägern zweier Punktreihen, deren entsprechende Punkte auf Strahlen durch $(b_1 c_2)$ liegen, also diesen Punkt S_0 zum Perspektivitätsscheitel haben. Wegen letzterer Eigenschaft sind die beiden Punktreihen auf p_1 und p_2 projektivisch, und ebenso sind hiernach die beiden Strahlenbüschel $t_1 t_1' t_1''$ und $t_2 t_2' t_2''$ projektivisch, welche von den Strahlen t_1 und t_2 um die beiden Kurvenpunkte B und C durchlaufen werden. Diese Strahlenbüschel bilden aber nichts anderes, als die Büschel der Verbindungsgeraden eines beliebigen veränderlichen Kurvenpunktes A mit den zwei festgehaltenen Punkten B und C; und daher findet man das wichtige Ergebnis, dass nicht nur in den Scheiteln, sondern in jedem beliebigen Paare von Kurvenpunkten durch die Verbindungsgeraden mit einem beliebigen veränderlichen Kurvenpunkte zwei projektivisch verwandte Strahlenbüschel

Stellung und treten in die Gesamtheit aller übrigen Schnittpunkte entsprechender Strahlen als völlig gleichwertige Elemente ein. Durch jeden der Punkte gibt es unendlich viele Strahlen, auf welchen noch ein zweiter Punkt der Kurve liegt; die einzige Ausnahme bildet die Berührungsgerade. Die zwei Kurvenpunkte auf jedem Strahle erzeugen auf demselben zwei Strecken, eine im Endlichen und eine durchs Unendliche verlaufende; und die eine von diesen beiden Strecken liegt innerhalb, die andere ausserhalb der Kurve: durch Punkte der ersteren gibt es nur solche Geraden, welche die Kurve in zwei Punkten treffen; durch Punkte der letzteren gibt es Gerade, welche die Kurve in zwei Punkten, in einem Punkt, oder auch gar nicht treffen.

gebildet werden, dass somit jedes beliebige Paar von Kurvenpunkten gewählt werden kann als Scheitelpaar zweier projektivisch verwandten Strahlenbüschel, deren entsprechende Strahlen zu Schnittpunkten die Punktreihe zweiter Ordnung haben.

Frage 35. Welche Folgerungen ergeben sich aus den vorigen Erörterungen für die Bestimmungsstücke einer Punktkurve?

Erkl. 121. Man beachte auch hier, dass die nebenstehenden drei Arten der Bestimmung einer Kurve dazu nötigen, die Kurve als Ordnungskurve, d. h. in der Auffassung als Punktreihe zu konstruieren — nicht als Tangentenkurve. Benützt man daher wieder für das Auftreten von Kurvenpunkt und Tangente in vereinigter Lage unter den Bestimmungsstücken die Bezeichnung (PT), so erhält man die Antworten auf Frage 31 und 35 in folgender Gegenüberstellung:

Eine Klassenkurve ist bestimmt durch: — oder eine zu suchende Kurve muss als Tangentenkurve konstruiert werden, wenn von ihr gegeben ist:	Eine Ordnungskurve ist bestimmt durch: — oder eine zu suchende Kurve muss als Punktkurve konstruiert werden, wenn von ihr gegeben ist:
1) $TTTTT$	1) $PPPPP$
2) $TTT(PT)$	2) $PPP(PT)$
3) $T(TP)(TP)$	3) $P(PT)(PT)$.

Erkl. 122. Gegenüber den Bezeichnungen in den Figuren 32 bis 35 muss durch nebenstehende zweite und dritte Beziehungsweise eine Aenderung in der Weise eintreten, dass für die Träger $t_1 t_2$ nicht mehr die Verbindungsgeraden der drei Kurvenpunkte $(a_1 a_2)(b_1 b_2)(c_1 c_2)$ zur Verfügung stehen. Auf Grund der Antwort auf Frage 33 kann man dafür auch mit gleichem Erfolge die Verbindungsgeraden mit S_1 und S_2 nehmen; dadurch fällt der Scheitel S_0, z. B. im dritten Falle, auf den Schnittpunkt $d_2 e_1$. Nähere Ausführung findet man in den Konstruktionsaufgaben der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teils.

Antwort. 1. Da eine Kurve als Punktreihe zweiter Ordnung bestimmt ist durch Festlegung der projektivischen Verwandtschaft zwischen den beiden Strahlenbüscheln mit zwei gegebenen Scheiteln, so hatte man (siehe Antwort auf Frage 32) als erste Bestimmungsweise drei zugeordnete Strahlenpaare durch beide Scheitel, oder mit andern Worten fünf Kurvenpunkte, von denen zwei als Scheitel, die andern als Erzeuger projektivischer Strahlenpaare durch die Scheitel aufzufassen wären.

2. Ist unter jenen Strahlenpaaren der Verbindungsstrahl der beiden Scheitel als Strahl des einen Büschels enthalten, also $a_1 b_1 d_1$ und $a_2 b_2 d_2$ in Figur 32 bis 35, so kennt man die beiden Scheitel, durch einen derselben die Tangente, und dazu noch die beiden andern Kurvenpunkte $a_1 a_2$ und $b_1 b_2$. Dies ergibt als zweite Bestimmungsweise: vier Kurvenpunkte und in einem derselben die Tangente.

3. Unter den gegebenen Strahlenpaaren kann sich aber der Verbindungsstrahl der beiden Scheitel als Strahl beider Büschel befinden, also $a_1 d_1 e_1$ und $a_2 d_2 e_2$ in Figur 32 bis 35; dann hat man beide Scheitel, in jedem derselben die Tangente, und dazu noch den einen Kurvenpunkt $a_1 a_2$. Dies ergibt als dritte Bestimmungsweise drei Kurvenpunkte und in zweien derselben die Tangenten.

Frage 36. Wie lassen sich die bisherigen Ergebnisse über Kurven zweiten Grades in Worten ausdrücken und dualistisch gegenüberstellen?

Antwort. Aus den Antworten der Fragen 27 bis 31 bezw. bis 35 erhält man folgende Feststellungen:

Satz 13. Eine Kurve zweiter Klasse entsteht als Tangentengebilde (Strahlenbüschel zweiter Klasse) durch die Gesamtheit der Verbindungsgeraden entsprechender Punktepaare zweier projektivisch verwandten Punktreihen in schiefer Lage.

Satz 13a. Eine Kurve zweiter Ordnung entsteht als Punktgebilde (Punktreihe zweiter Ordnung) durch die Gesamtheit der Schnittpunkte entsprechender Strahlenpaare zweier projektivisch verwandten Strahlenbüschel in schiefer Lage.

Satz 14. Die Träger der Punktreihen sind selbst Kurventangenten.

Satz 14a. Die Scheitel der Strahlenbüschel sind selbst Kurvenpunkte.

Satz 15. Die dem Schnittpunkt der Träger zugeordneten Punkte der beiden Punktreihen sind die Berührungspunkte auf den Trägern.

Satz 15a. Die dem Verbindungsstrahl der Scheitel zugeordneten Strahlen der beiden Büschel sind die Berührungsgeraden in den Scheiteln.

Satz 16. Die Gesamtheit der auf zwei beliebigen Tangenten durch deren Schnitt mit allen übrigen Tangenten gebildeten Punkte liefert jedesmal zwei projektivisch verwandte Punktreihen.

Satz 16a. Die Gesamtheit der in zwei beliebigen Kurvenpunkten durch deren Verbindung mit allen übrigen Kurvenpunkten gebildeten Geraden liefert jedesmal zwei projektivisch verwandte Strahlenbüschel.

Satz 17. Eine Tangentenkurve wird bestimmt durch

1. fünf Tangenten,
2. vier Tangenten und den Berührungspunkt auf einer derselben,
3. drei Tangenten und die Berührungspunkte auf zweien derselben.

Satz 17a. Eine Punktkurve wird bestimmt durch

1. fünf Kurvenpunkte,
2. vier Kurvenpunkte und die Tangente in einem derselben.
3. drei Kurvenpunkte und die Tangenten in zweien derselben.

Erkl. 123. Die obenstehenden Sätze bilden den Ausdruck in Worten für die Ergebnisse der vorigen Antworten in folgender Zusammenstellung:

Satz 13 ⋯ Antwort auf Frage 27.
Satz 14 ⋯ Antwort auf Frage 29, 1
Satz 15 ⋯ Antwort auf Frage 29, 2
Satz 16 ⋯ Antwort auf Frage 30
Satz 17 ⋯ Antwort auf Frage 28 und 31,

Satz 13a ⋯ Antwort auf Frage 27
Satz 14a ⋯ Antwort auf Frage 33, 1
Satz 15a ⋯ Antwort auf Frage 33, 2
Satz 16a ⋯ Antwort auf Frage 34
Satz 17a ⋯ Antwort auf Frage 32 und 35.

Erkl. 124. Die Sätze 16 und 16a kann man auch folgendermassen aussprechen:

(Satz 16) Eine veränderliche Tangente einer Kurve zweiter Klasse schneidet auf zwei beliebigen festen Tangenten derselben Kurve stets zugeordnete Punkte zweier projektivischen Punktreihen aus.

(Satz 16a) Ein veränderlicher Punkt einer Kurve zweiter Ordnung wird aus zwei beliebigen festen Punkten derselben Kurve stets durch zugeordnete Strahlen zweier projektivischen Büschel projiziert.

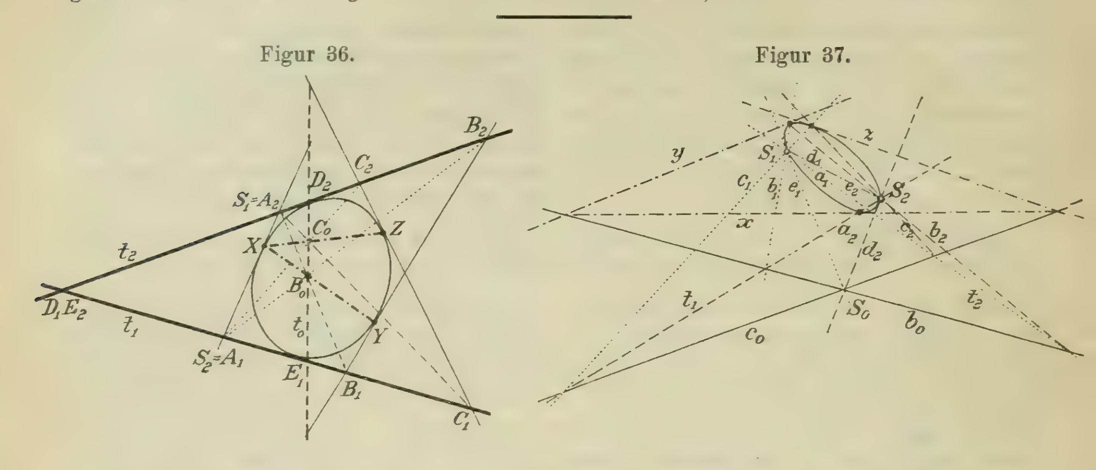
Erkl. 125. Die beiden gegenüberstehenden Bestimmungsweisen des Satzes 17 sind genau dualistisch und erscheinen auch aneinander angefügt als geschlossene Reihe, nämlich:

$$5T + 0P,\ 4T + 1P,\ 3T + 2P;\ \ 2T + 3P,\ 1T + 4P,\ 0T + 5P;$$

stets zusammen 5 Elemente, davon die Punkte und Tangenten in beliebiger Zahl gemischt zur Gesamtzahl 5. Aber nicht beliebige Zusammenstellung in allgemeiner Lage ist an dieser Stelle

der Entwicklung gestattet, sondern nur solche mit vereinigter Lage von P und T, wie schon in Erkl. 121 angegeben wurde. Allerdings ergibt die vorige Zusammenstellung auch in allgemeiner Auffassung je eine ein- oder mehrdeutige Bestimmung der Kurve; aber deren Konstruktion aus solchen Stücken geht über den Rahmen der vorliegenden Entwicklung hinaus und kann erst mit den Hilfsmitteln späterer Untersuchungen bewerkstelligt werden (sog. Aufgaben zweiten Grades: vergl. den III. Teil dieses Lehrbuches).

Figur 36. Figur 37.



Frage 37. Welche Beziehung besteht zwischen der Klassenkurve und der Ordnungskurve zweiten Grades?

Antwort. Zwischen der Tangentenkurve nebst ihren Berührungspunkten und der Punktkurve nebst ihren Tangenten hat man die merkwürdige Beziehung, dass beide identisch sind. Man kann nämlich nachweisen:

Satz 18. Die Berührungspunkte auf sämtlichen Strahlen eines Büschels zweiter Klasse bilden eine Punktreihe zweiter Ordnung, und deren erzeugende Strahlenbüschel sind projektivisch mit den erzeugenden Punktreihen der Tangentenkurve.

Satz 18a. Die Tangenten in sämtlichen Punkten einer Punktreihe zweiter Ordnung bilden einen Strahlenbüschel zweiter Klasse, und dessen erzeugende Punktreihen sind projektivisch mit den erzeugenden Strahlenbüscheln der Punktkurve.

1. Zum Beweise geht man aus von der dritten Bestimmungsart der Tangentenkurve, nämlich durch drei Tangenten und die Berührungspunkte auf zweien derselben, also die Punkte $A_1 D_1 E_1$ und $A_2 D_2 E_2$ auf den beiden Trägern (siehe Figur 36). Man wählt A_1 als S_2 und A_2 als S_1, erhält die Verbindungsgerade $E_1 D_2$ als t_0 und findet weitere Tangenten $B_1 B_2$ (oder $C_1 C_2$) durch die aufeinanderfolgenden Elemente $S_1 B_1$, B_0; $S_2 B_0$, B_2; $B_1 B_2$. Dabei liegt jeweils der Schnittpunkt der Geraden $A_1 B_2$ und $B_1 A_2$ (bezw. $A_1 C_2$ und $C_1 A_2$) auf der Verbindungsgeraden der Berührungspunkte D_2 und E_1 auf t_2 und t_1.

1. Zum Beweise geht man aus von der dritten Bestimmungsweise der Punktkurve, nämlich durch drei Kurvenpunkte und die Tangenten in zweien derselben, also die Strahlen $a_1 d_1 e_1$ und $a_2 d_2 e_2$ in den beiden Scheiteln (siehe Figur 37). Man wählt a_1 als t_2 und a_2 als t_1, erhält den Schnittpunkt $(e_1 d_2)$ als S_0 und findet weitere Kurvenpunkte $(b_1 b_2)$ [oder $(c_1 c_2)$] durch die aufeinanderfolgenden Elemente $(t_1 b_1)$, b_0; $(t_2 b_0)$, b_2; $(b_1 b_2)$. Dabei geht jeweils die Verbindungsgerade der Schnittpunkte $(a_1 b_2)$ und $(a_2 b_1)$ [bezw. $(a_1 c_2)$ und $(c_1 a_2)$] durch den Schnittpunkt der Tangenten e_1 und d_2 in S_1 und S_2.

2. Da nach Antwort auf Frage 30 jedes beliebige Tangentenpaar als Trägerpaar gewählt werden kann, so könnten auch die Geraden A_1A_2 und B_1B_2 (oder A_1A_2 und C_1C_2) als Träger gewählt werden: und dann müsste für die Berührungspunkte X und Y (oder X und Z) auf diesen Trägern die gleiche Beziehung entstehen, dass der Schnittpunkt derselben Geraden A_1B_2 und B_1A_2 auch auf der Verbindungsgeraden der Berührungspunkte X und Y (bezw. der Schnittpunkt von A_1C_2 und C_1A_2 auf der Verbindungsgeraden der Berührungspunkte X und Z) liegen muss.

3. Hält man nun einerseits die Tangente A_1A_2 mit ihrem Berührungspunkt X fest und lässt B_1B_2 die Lagen sämtlicher Tangenten durchlaufen, so bleibt die Gerade D_2E_1 oder t_0 fest als Träger der Punktreihe aller Schnittpunkte der drei Geraden A_1B_0 und A_2B_0 und XB_0 bei deren Drehung um A_1, A_2, X. Folglich sind die bei der genannten Bewegung von den Strahlen A_1B_2 um Scheitel S_2, von A_2B_1 um S_1 und von XY um Scheitel X durchlaufenen Strahlenbüschel projektivisch (in perspektivischer Lage mit Perspektivitätsachse t_0): also ist auch der von XY um Scheitel X durchlaufene Strahlenbüschel projektivisch (in schiefer Lage) mit den von B_1 auf t_1 bezw. von B_2 auf t_2 durchlaufenen Punktreihen.

4. Der erstere Strahlenbüschel ist aber derjenige, durch welchen aus dem Berührungspunkte X einer festgehaltenen Tangente A_1A_2 die Berührungspunkte YZ aller andern Strahlen b, c des Strahlenbüschels zweiter Klasse projiziert werden. Und dieser ist hiernach projektivisch mit jeder der Punktreihen, welche auf einer festen Tangente durch die Schnittpunkte mit je denselben der wandernden Strahlen gebildet werden, also insbesondere auch mit der auf der festgehaltenen Tangente A_1A_2 durch die Tangenten in jenen Berührungspunkten entstehenden Punktreihe.

5. Denkt man sich nunmehr umgekehrt die Tangenten B_1B_2 und C_1C_2

2. Da nun nach Antwort auf Frage 34 jedes beliebige Punktepaar als Scheitelpaar gewählt werden kann, so könnten auch die Schnittpunkte (a_1a_2) und (b_1b_2) [oder (a_1a_2) und (c_1c_2)] als Scheitel gewählt werden: und dann müsste für die Tangenten x und y (oder x und z) in diesen Scheiteln die gleiche Beziehung entstehen, dass die Verbindungsgerade derselben Schnittpunkte (a_1b_2) und (b_1a_2) auch durch den Schnittpunkt der Tangenten x und y [bezw. die Verbindungsgerade von (a_1c_2) und (c_1a_2) durch den Schnittpunkt der Tangenten x und z] hindurchgehen muss.

3. Hält man einerseits den Kurvenpunkt (a_1a_2) mit seiner Tangente x fest und lässt (b_1b_2) die Lagen sämtlicher Kurvenpunkte durchlaufen, so bleibt der Schnittpunkt (e_1d_2) oder S_0 fest als Scheitel des Büschels aller Verbindungsstrahlen der drei Punkte (a_1b_0), (a_2b_0) und (xb_0) bei deren Wanderung auf a_1, a_2, x. Folglich sind die bei der genannten Bewegung von den Schnittpunkten (a_1b_2) auf Träger t_2, von (b_1a_2) auf t_1 und von (xy) auf Träger x durchlaufenen Punktreihen projektivisch (in perspektivischer Lage mit Perspektivitätsscheitel S_0): also ist auch die von (xy) auf Träger x durchlaufene Punktreihe projektivisch (in schiefer Lage) mit den von b_1 um S_1 bezw. von b_2 um S_2 durchlaufenen Strahlenbüscheln.

4. Die erstere Punktreihe ist aber diejenige, welche auf der Tangente x eines festgehaltenen Kurvenpunktes (a_1a_2) durch die Tangenten y, z aller andern Punkte B, C der Punktreihe zweiter Ordnung ausgeschnitten wird. Und diese ist hiernach projektivisch mit jedem der Strahlenbüschel, welche in einem festen Kurvenpunkt durch die Verbindungsgeraden mit je demselben der wandernden Punkte gebildet werden, also insbesondere auch mit dem in dem festgehaltenen Kurvenpunkte (a_1a_2) durch die Projektion jener Kurvenpunkte entstehenden Strahlenbüschel.

5. Denkt man sich nunmehr umgekehrt die Kurvenpunkte (b_1b_2) und (c_1c_2)

samt ihren Berührungspunkten Y und Z festgehalten, und lässt die Tangente A_1A_2 samt ihrem Berührungspunkte X die Lagen sämtlicher Tangenten nebst ihren Berührungspunkten durchlaufen, so durchläuft die Gerade YX einen Strahlenbüschel um den Scheitel Y und die Gerade ZX einen Strahlenbüschel um den Scheitel Z. Und nach vorigem Ergebnis ist der Büschel Y projektivisch zu der auf B_1B_2 durch die Schnittpunkte mit der veränderlichen Tangente A_1A_2 gebildeten Punktreihe, und ebenso der Büschel Z projektivisch zu der auf C_1C_2 durch dieselbe wandernde Tangente A_1A_2 ausgeschnittenen Punktreihe. Diese beiden Punktreihen sind aber nach Satz 16 selbst projektivisch, also sind auch die vom Strahl YX um Y und vom Strahl ZX um Z durchlaufenen Strahlenbüschel projektivisch.

6. Diese beiden Büschel mit Scheiteln Y und Z sind aber keine andern als die Strahlenbüschel, durch welche aus zwei beliebigen Berührungspunkten Y, Z alle andern X projiziert werden, also bilden auch die Berührungspunkte auf den Strahlen eines Strahlenbüschels zweiter Klasse eine Gesamtheit von Schnittpunkten entsprechender Strahlen zweier projektivischen Strahlenbüschel erster Klasse.

samt ihren Tangenten y und z festgehalten, und lässt den Kurvenpunkt (a_1a_2) samt seiner Tangente x die Lagen sämtlicher Kurvenpunkte nebst ihren Tangenten durchlaufen, so durchläuft der Schnittpunkt (yx) eine Punktreihe auf dem Träger y und der Schnittpunkt (zx) eine Punktreihe auf dem Träger z. Und nach vorigem Ergebnis ist die Punktreihe y projektivisch zu dem in (b_1b_2) durch die Verbindungsgeraden mit dem veränderlichen Kurvenpunkte (a_1a_2) gebildeten Strahlenbüschel, und ebenso die Punktreihe z projektivisch zu dem in (c_1c_2) durch denselben wandernden Kurvenpunkt (a_1a_2) erzeugten Strahlenbüschel. Diese beiden Strahlenbüschel sind aber nach Satz 16a selbst projektivisch, also sind auch die vom Schnittpunkt (xy) auf y und vom Schnittpunkt (zx) auf z durchlaufenen Punktreihen projektivisch.

6. Diese beiden Punktreihen mit Trägern y und z sind aber keine andern als die Punktreihen, welche auf zwei beliebigen Tangenten y, z durch alle andern x ausgeschnitten werden, also bilden auch die Tangenten in den Punkten einer Punktreihe zweiter Ordnung eine Gesamtheit von Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier projektivischen Punktreihen erster Ordnung.

Erkl. 126. Die einleitende Konstruktionsweise obenstehender Antwort ist eine der in Erkl. 110 angeführten und wird in Aufgabe 85 und 153 näher erörtert. — Dass in Figur 36 die Geraden A_1B_2, B_1A_2, E_1D_2 und XY alle vier durch denselben Punkt B_0, bezw. die Geraden A_1C_2, C_1A_2, E_1D_2 und XZ alle vier durch denselben Punkt C_0 gehen müssen, erhält eine dualistische Erscheinung dadurch, dass in Figur 37 die Schnittpunkte (a_1b_2), (b_1a_2), (e_1d_2) und (xy) alle vier auf derselben Geraden b_0, bezw. die Schnittpunkte (a_1c_2), (c_1a_2), (e_1d_2) und (xz) alle vier auf derselben Geraden c_0 liegen müssen. Diese merkwürdige Erscheinung von vereinigter Lage von vier Elementen mit einem einzigen (während schon die vereinigte Lage von bloss drei Elementen eine Besonderheit bildete) wird später zu besonderem Gegenstand der Erörterung gemacht: Man vergleiche die Sätze von Brianchon und Pascal nebst Anwendungen im folgenden fünften Abschnitt dieses Lehrbuches (siehe Erkl. 203). Dort wird sich auch zeigen, dass in Figur 36 die Schnittpunkte der Geraden E_1D_2 oder t_0 mit A_1A_2, B_1B_2 bezw. C_1C_2 jeweils den vierten harmonischen Punkt darstellen zum Berührungspunkt X, Y bezw. Z, und entsprechend dass in Figur 37 die Verbindungsgeraden des Punktes (e_1d_2) oder S_0 mit (a_1a_2), (b_1b_2) bezw. (c_1c_2) jeweils den vierten harmonischen Strahl darstellen zur Tangente x, y bezw. z.

Erkl. 127. Das Ergebnis des vierten Teils obenstehender Antwort in beiderlei Ausführungen ist dargestellt in Figur 38 und lässt sich aussprechen in dem für beide Ausführungen gleichlautenden Satze:

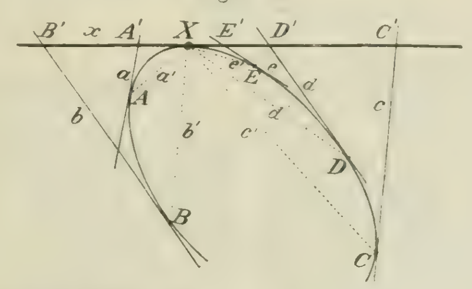
Sind X und x ein Kurvenpunkt und seine Berührungsgerade auf einer Kurve II. Klasse oder II. Ordnung, so sind

der Strahlenbüschel $a'b'c'd'e' \cdots\cdots$, durch welchen die sämtlichen Punkte $ABCDE \cdots\cdots$ der Kurve aus X als Scheitel projiziert werden, — und

die Punktreihe $A'B'C'D'E' \cdots\cdots$, welche durch die sämtlichen Tangenten $abcde \cdots\cdots$ der Kurve auf x als Träger ausgeschnitten sind,

in der Weise miteinander projektivisch verwandt, dass jeweils derjenige Strahl durch X und derjenige Punkt auf x zugeordnet sind, welche durch vereinigt liegende Kurvenpunkte und Tangenten erzeugt werden.

Figur 38.



Erkl. 128. Ebenso wie (nach Erkl. 106 u. 119) die gezeichnet vorliegende Kurve zweiter Klasse zur Erzeugung projektivischer Punktreihen und die gezeichnet vorliegende Kurve zweiter Ordnung zur Erzeugung projektivischer Strahlenbüschel benutzt werden könnte, so liefert auf Grund der vorigen Ergebnisse sowohl die Kurve zweiter Klasse nebst ihren Berührungspunkten als auch die Kurve zweiter Ordnung nebst ihren Tangenten die Möglichkeit zur unmittelbaren Erzeugung projektivisch verwandter Punktreihen und Strahlenbüschel, indem man die Reihe der Schnittpunkte einer Tangente mit allen andern Tangenten zuordnet dem Büschel der Verbindungsstrahlen ihres Berührungspunktes nach allen andern Berührungspunkten.

Erkl. 129. Die Sätze 18 und 18a als Ergebnis der obenstehenden Erörterungen besagen eigentlich nur dasselbe von zwei entgegengesetzten Richtungen her, nämlich einerseits, dass die Punktkurve (nebst ihren Tangenten) identisch ist mit der Strahlenkurve (nebst ihren Berührungspunkten), und andererseits, dass letztere identisch ist mit ersterer. Dieselbe Kurve, deren Punkte gebildet werden durch die Gesamtheit der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektivischen Strahlenbüschel, wird eingehüllt durch die Gesamtheit der Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte zweier projektivischen Punktreihen. Dieselbe Kurve liefert:

1. projektivische Punktreihen durch Zuordnung der Schnittpunkte zweier beliebigen festen Tangenten mit allen andern Tangenten;

2. projektivische Strahlenbüschel durch Zuordnung der Verbindungsstrahlen zweier beliebigen festen Kurvenpunkte mit allen andern Kurvenpunkten;

3. projektivische Punktreihen und Strahlenbüschel durch Zuordnung der Schnittpunkte einer beliebigen festen Tangente mit allen andern Tangenten zu den Verbindungsgeraden eines beliebigen festen Kurvenpunktes mit den Berührungspunkten derselben anderen Tangenten.

Erkl. 130. Kann man nunmehr auch die Sätze 13 bis 17 als gemeinschaftlich für die Kurven zweiten Grades (Klasse oder Ordnung) auffassen, also besonders die Bestimmungsweisen des Satzes 17 in geschlossener Reihenfolge (siehe Erkl. 125) für beiderlei Auffassung verwenden, so bleibt deswegen doch die Unterscheidung der Erkl. 108 in Geltung, wonach die Konstruktion für dieselbe Kurve je nach Art der Bestimmungsstücke auch in der einen oder andern Art der Auffassungsweise zu geschehen hat. Das zeigt sich z. B. in dem Einzelfall der zerfallenden Kurve besonders deutlich, indem Ordnungskurve und Klassenkurve in verschiedener Art degenerieren.

---

4. Ueber die verschiedenen Gattungen der Kurven zweiten Grades.

a) Einteilung der Kurven zweiten Grades.

Frage 38. Wonach lässt sich eine Einteilung der durch projektivische Gebilde erzeugten Kurven vornehmen?

Antwort. Die Einteilung der durch projektivische Gebilde erzeugten

Kurven geschieht durch die Unterscheidung der in endlicher oder in unendlicher Entfernung liegenden Elemente, wie Träger, Berührungspunkte, bezw. Kurvenpunkte, oder mit andern Worten nach der Beziehung der Kurven zur unendlich fernen Geraden.

Erkl. 131. Die bisherigen Ueberlegungen gelten für jede beliebige Lage aller Elemente. Tritt die Unterscheidung zwischen endlich und unendlich hinzu, so ist eigentlich schon das Gebiet der absoluten Geometrie verlassen und den Massbeziehungen der Einfluss auf die Erörterungen zugestanden.

Frage 39. Welche Beziehungen zeigt die Strahlenkurve zweiter Klasse zur unendlich fernen Geraden?

Antwort. Bei der Kurve zweiter Klasse, also der Tangentenkurve, unterscheidet man darnach, ob es keinmal oder einmal oder zweimal vorkommt, dass eine Tangente ihren Berührungspunkt im Unendlichen hat.

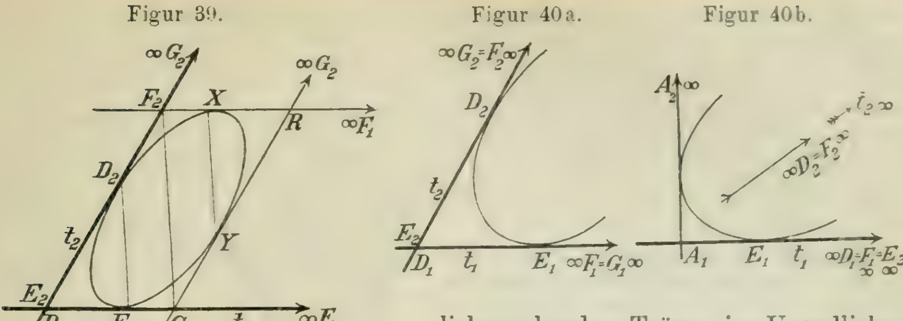
1. Bei der ersten Art liegen sämtliche Punkte der Kurve im Endlichen: die Kurve heisst **Ellipse** (siehe Figur 39). Die unendlich ferne Gerade verläuft gänzlich ausserhalb der Kurve. Bei keinem Trägerpaare der Ellipse fallen die dem Schnittpunkt entsprechenden Berührungspunkte $D_2 E_1$ oder die Gegenpunkte $F_2 G_1$ ins Unendliche; jedes Parallelogramm von vier Tangenten t_1, t_2, $F_1 F_2$, $G_1 G_2$ schliesst die Kurve in sich ein, ist also derselben umgeschrieben und enthält die Berührungspunkte der Kurve innerhalb der vier Seiten. Zu jeder Geraden oder durch jeden Punkt der unendlich fernen Geraden gibt es zwei parallele Tangenten an die Ellipse.

2. Bei der zweiten Art liegt ein einziger Punkt der Kurve im Unendlichen, alle übrigen im Endlichen: die Kurve heisst **Parabel** (s. Figur 40). Die unendlich ferne Gerade selber ist eine solche Gerade, die mit der Kurve einen einzigen Punkt gemeinsam hat, folglich muss die unendlich ferne Gerade selbst eine Tangente der Parabel sein und kann selbst als Träger auftreten. Bei jedem Trägerpaare der Parabel fallen daher die Gegenpunkte $F_2 G_1$ ins Unendliche, weil die unendlich ferne als Strahl des Büschels zweiter Klasse je zwei andere Tangenten im Unendlichen trifft. Der dem Trägerschnittpunkt entsprechende Berührungspunkt liegt auf keinem durchs End-

Erkl. 132. Die Namen der drei Kurven Ellipse, Parabel, Hyperbel enstammen der antiken Massgeometrie und deuten auf metrische Eigenschaften dieser drei Kurven, bei deren Ausspruch jene drei griechischen Zeitwörter vorkommen, welche ihren Namen zu Grunde liegen: (Ellipse von ἐκ-λείπειν = auslassen, Parabel von παρα-βάλλειν = danebenwerfen, gleichsetzen, Hyperbel von ὑπερ-βάλλειν = darüberwerfen, übertreffen). Es gibt nämlich eine ganze Anzahl von Paaren unter den Bestimmungsstücken dieser drei Kurven, von denen je das erste Stück bei der Ellipse kleiner, bei der Parabel gleichgross, bei der Hyperbel grösser ist wie das zweite, z. B. die Halbweite des erzeugenden Kreiskegels und der Schnittwinkel der Kurvenebene mit der Achse — oder der Abstand eines Kurvenpunktes vom Brennpunkt und von der Leitlinie — oder (mit andern Worten) die numerische Excentricität und die Einheit — oder die lineare Excentricität und die grosse Halbachse — oder der Halbparameter und der Abstand zwischen Brennpunkt und Leitlinie — oder der Halbparameter und der doppelte Abstand zwischen Brennpunkt und Scheitel — oder das Quadrat der Ordinate und das Rechteck aus Abscisse und Parameter (in der sog. Scheitelgleichung). Die zuletzt genannte Beziehung, welche nach den heutigen Entwicklungsmethoden dem Gebiete der analytischen Geometrie angehört, ist vor ca. 2200 Jahren zum Ausgangspunkt der Namengebung geworden.

Erkl. 133. Für die Ellipse ist Fig. 39 die allgemeine Darstellung, welche für jedes beliebige Trägerpaar zutrifft. Die ausgezeichneten Punkte $DEFG$ der beiden Träger besitzen dieselbe Bedeutung wie früher und haben die gewöhnliche Lage, welche auch in den früheren Figuren 26 bis 38 stets angenommen wurde. [Man erkennt in derselben Figur auch die Bestätigung für den ersten Teil der Antwort auf Frage 37, nämlich die Parallelität der drei Geraden $E_1 D_2 \parallel G_1 F_2 \parallel XY$ bezw. $D_1 R \parallel D_2 X \parallel E_1 Y$; denn die ersten drei haben gemeinsamen Schnittpunkt mit der (unendlich fernen) Geraden $F_1 G_2$, wenn t_1 und t_2 oder RF und RG —, die letzten drei, wenn t_2 und RF oder t_1 und RG als Träger gewählt werden.]

Figur 39. Figur 40a. Figur 40b.



Erkl. 134. Für die Parabel gibt Figur 40 links eine allgemeine, rechts eine besondere Darstellung. Auf zwei ganz beliebig gewählten Trägern (Figur 40a) macht sich die Parabel dadurch kenntlich, dass auf t_1 F_1 und G_1, und auf t_2 F_2 und G_2 zusammenfallen. — In Fig. 40b ist die unendlich ferne Gerade selbst als Träger t_2 gewählt (vergl. Fig. 55 u. 59 und Aufgabe 57 u. 64 des I. Teils dieses Lehrb.). In diesem Falle liegen im Unendlichen auf t_1 die Punkte $D_1 E_2$ als Schnittpunkte, sowie F_1 als unendlich ferner Punkt von t_1; mit allen Punkten von t_2 liegt auch der Berührungspunkt D_2 unendlich fern und wird nur durch die Richtung der dorthin gehenden Geraden angegeben.

Erkl. 135. Die Parabel hat unter den drei Kurvengattungen offenbar eine andere Stellung als Ellipse und Hyperbel. Während nämlich diese beiden den allgemeinen Charakter behalten, so wird die Parabel zu einer besonderen und enger begrenzten Art dadurch, dass sie eine bestimmte, ein für allemal festgelegte Tangente besitzt, nämlich die unendlich ferne Gerade. Sowie also der Name Parabel genannt wird, so ist schon ein Element der Kurve gegeben, und umgekehrt wird die Kurve zweiten Grades als Parabel dadurch bestimmt, dass die unendlich ferne Gerade als Tangente gegeben wird. — Während also Ellipse und Hyperbel fünf unabhängige und willkürlich auszuwählende Bestimmungsstücke besitzen, hat die Parabel nur noch vier unabhängige Stücke, da ja die unendlich ferne Gerade als eines der fünf Elemente genommen werden muss. Man kann daher sagen, es gäbe in der Ebene fünffach unendlich viele (∞^5) Ellipsen und Hyperbeln, aber nur vierfach unendlich viele (∞^4) Parabeln.

Erkl. 136. Für die Hyperbel gibt Fig. 41 wieder eine allgemeine und eine besondere Darstellung. Figur 41a zeigt zwei beliebig gewählte Träger, und deren Punkte $DEFG$ zeigen gegen Figur 39 keine andere Veränderung ihrer Lage, als dass D und E zwischen G und F, also ausserhalb der Parallelogrammseiten $DG_1 RF_2$ liegen. [Auch hier liegen (vergl. Erkl. 133) $E_1 D_2 \parallel G_1 F_2 \parallel XY$ und $D_1 R \parallel D_2 X \parallel E_1 Y$.] —

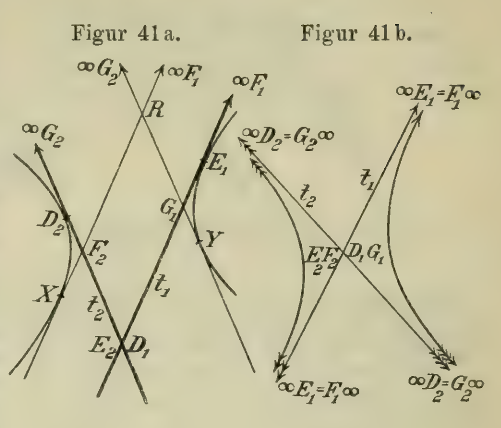
liche gehenden Träger im Unendlichen, sondern nur wenn die unendlich ferne Gerade selbst als Träger gewählt wird. Die Tangenten $F_1 F_2$ und $G_1 G_2$ fallen stets beide ins Unendliche; und so hat die Parabel überhaupt keine parallelen Tangenten, also auch kein um- oder angeschriebenes Parallelogramm, denn durch jeden Punkt der unendlich fernen Tangente kann nur noch eine weitere Tangente gehen.

3. Bei der dritten Art liegen zwei Punkte der Kurve im Unendlichen: die Kurve heisst **Hyperbel** (s. Figur 41). Die unendlich ferne Gerade ist eine Gerade, welche die Kurve in zwei Punkten trifft; sie schneidet also die Kurve und besitzt eine innerhalb und eine ausserhalb der Kurve liegende Strecke. Es gibt zwei, aber auch nur zwei Träger, auf denen der dem Schnittpunkt zugeordnete Berührungspunkt D_2 bezw. E_1 im Unendlichen liegt: diese beiden ausgezeichneten Träger heissen Asymptoten. Zu ihnen gibt es keine parallelen Tangenten, und ebenso gar keine Tangenten parallel zu allen Geraden ihres Schnittpunktes nach den Punkten der inneren Strecke der unendlich fernen Geraden, wohl aber je zwei parallele Tangenten zu allen Geraden ihres Schnittpunktes nach den Punkten der äusseren Strecke der unendlich fernen Geraden. Da die Kurve sich ins Unendliche erstreckt, so kann kein Tangentenparallelogramm die Kurve einschliessen, es gibt also keine um-, sondern nur angeschriebene Tangentenparallelogramme, und deren Berührungspunkte liegen auf den Verlängerungen der Seiten.

Figur 41b zeigt den besonderen Fall, dass gerade die beiden Asymptoten als Träger gewählt sind; dann liegen die Berührungspunkte $D_2 E_1$ in den unendlich fernen Punkten $G_2 F_1$, und umgekehrt die Gegenpunkte $G_1 F_2$ im Schnittpunkte $D_1 E_2$. Als Mittelglied zwischen Figur 41a und 41b wäre die Figur aufzufassen, bei welcher die Bestimmung der Hyperbel durch eine Asymptote und eine beliebig gewählte Tangente als Träger bewerkstelligt wird.

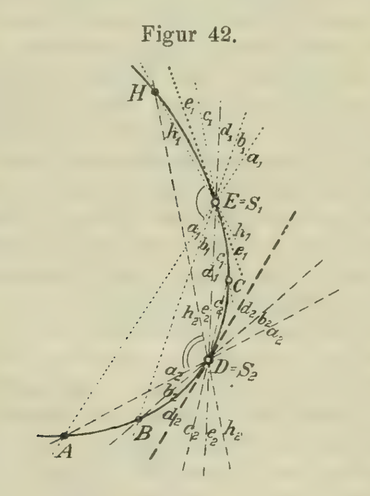
Erkl. 137. Während aber auf einer beliebig gewählten Tangente auch der Berührungspunkt beliebige Lage annehmen kann, ist mit dem Namen Asymptote schon festgelegt, dass eine Tangente mit unendlich fern liegendem Berührungspunkte gemeint sei. Dieser letztere Umstand ist so zu verstehen, dass die Kurve sich bei steigender Entfernung aus dem endlichen Gebiete der Geraden immer mehr nähert, oder sich an die Gerade immer näher anschmiegt, ohne doch in endlicher Entfernung je wirklich mit ihr zusammenzufallen. Hierher auch der Name Asymptote (von ἀ-συμ-πίπτειν = nicht zusammenfallen). Spätere Ueberlegungen werden zeigen, dass der Schnittpunkt der Asymptoten ein besonders ausgezeichneter Punkt der Hyperbel ist (nämlich Mittelpunkt).

Figur 41a. Figur 41b.



Frage 40. Welche Beziehungen zeigt die Punktkurve zweiter Ordnung zur unendlich fernen Geraden?

Figur 42.



Erkl. 138. Solange nur ein zusammenhängendes, also engbegrenztes oder kurzes Stück einer Kurve zur Behandlung steht, ist die Unterscheidung der Kurvenart unwesentlich, auch ohne Zuhilfenahme weiterer, besonders eben der unendlich fernen Elemente überhaupt schwer festzustellen. Denn für das Stück *ABDCEH* in Figur 42 sind die Büschel S_1 und S_2 gleichlaufend, ob man nun Kurvenpunkte

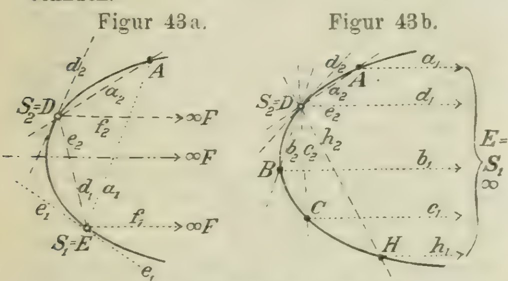
Antwort. Bei der Kurve zweiter Ordnung, also der Punktkurve, unterscheidet man ebenfalls danach, ob es keinmal oder einmal oder zweimal vorkommt, dass ein Kurvenpunkt, also ein Schnittpunkt zweier entsprechenden Strahlen der beiden erzeugenden Strahlenbüschel, im Unendlichen liegt.

1. Bei der ersten Art liegen sämtliche Punkte der Kurve im Endlichen: die Kurve heisst **Ellipse;** die unendlich ferne Gerade verläuft gänzlich ausserhalb der Kurve. Die beiden erzeugenden Strahlenbüschel haben kein Paar zugeordneter Parallelstrahlen, können also keinenfalls von entgegengesetzter Umlaufsrichtung sein.

2. Bei der zweiten Art liegt ein einziger Punkt der Kurve im Unendlichen, alle übrigen im Endlichen: die Kurve heisst **Parabel.** Die unendlich ferne Gerade ist eine solche Gerade, die mit der Kurve einen einzigen Punkt gemeinsam hat, folglich muss die unendlich ferne Gerade eine Tangente der Parabel sein, und

diesseits S_1 oder zwischen $S_1 S_2$ oder jenseits S_2 berücksichtigt. Es fragt sich daher bloss, ob in denjenigen Scheitelwinkelräumen der Strahlen $(a_1 h_1)$ bezw. $(a_2 h_2)$, welche $bdce$ nicht enthalten, keinmal oder einmal oder zweimal solche zugeordnete Strahlenpaare vorkommen, die einander im Unendlichen schneiden, also parallel sind. Die Nebenwinkelräume $(a_1 h_1)$ bezw. $(a_2 h_2)$, welche die Strahlen $bdce$ enthalten, sind für jede der drei Kurvengattungen von ganz gleicher Natur, wenn die Scheitel $S_1 S_2$ sich in endlicher Entfernung auf demselben Kurvenzuge befinden.

Figur 43a. Figur 43b.

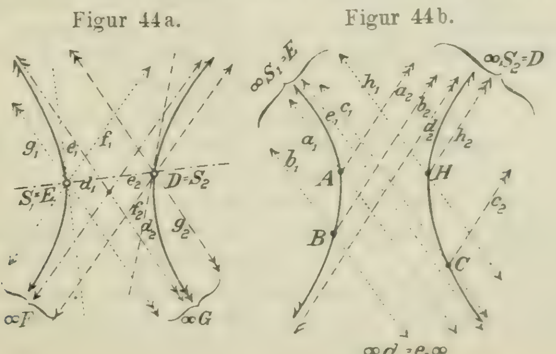


Erkl. 139. Für die Parabel als Ordnungskurve gibt Figur 43 eine allgemeine und eine besondere Darstellung. In Figur 43a sind zwei beliebige Punkte als Scheitel gewählt, wie in Figur 42, und nach dem Punkt $F\infty$ geht das einzige Paar Parallelstrahlen $f_1 \parallel f_2$. Dabei besteht in beiden Büscheln die gleiche Reihenfolge auch mit gleicher Umlaufsrichtung (mit dem Uhrzeiger) für die Elemente *dafe*. — In Figur 43b ist als Scheitel S_1 der unendlich ferne Punkt der Parabel gewählt, so dass jeder Parabelpunkt entsteht als Schnittpunkt eines Büschelstrahls von S_2 und des zugeordneten Strahles im Parallelstrahlenbüschel von S_1. Die Elemente *bchead* haben in S_2 Umlaufsrichtung gegen den Uhrzeiger; im Büschel S_1 gilt e_1 als unendlich ferne Gerade. Für den Parallelstrahlenbüschel S_1 ist keine bestimmte Umlaufsrichtung festzulegen; denn legt man S_1 nach rechts unendlich fern, so hätte man ebenfalls Umlauf $b_1 c_1 h_1 e_1 a_1 d_1$ gegen den Uhrzeiger; legt man aber S_1 nach links unendlich fern, so kann derselbe Umlauf $b_1 c_1 h_1 e_1 a_1 d_1$ als mit dem Uhrzeiger gehend aufgefasst werden.

ihr Berührungspunkt kann als Scheitel eines der erzeugenden Strahlenbüschel auftreten. Die beiden erzeugenden Strahlenbüschel haben ein einziges Paar zugeordneter Parallelstrahlen, können also keinenfalls von entgegengesetzter Umlaufsrichtung sein.

3. Bei der dritten Art liegen zwei Punkte der Kurve im Unendlichen: die Kurve heisst **Hyperbel.** Die unendlich ferne Gerade enthält zwei Kurvenpunkte; diese können auch selbst als Scheitel erzeugender Büschel auftreten, sie haben als Tangenten die Asymptoten, und sie teilen die unendlich ferne Gerade in zwei Teile, deren einer innerhalb, deren anderer ausserhalb der Kurve selbst liegt. Die Kurve selbst geht aus dem Endlichen nach dem einen dieser Punkte hin, kehrt von ihm aus von der entgegengesetzten Richtung her ins Endliche zurück, geht dann zum andern unendlich fernen Punkt ins Unendliche und kehrt auch von diesem wieder ins Endliche zurück zum Ausgangspunkte. Man hat also zwei getrennte Kurventeile, sogen. Aeste, in deren jedem die Kurve aus dem einen unendlich fernen Punkte hereinkommt und zum andern wieder hinausläuft. Die erzeugenden Strahlenbüschel haben zwei Paar zugeordneter Parallelstrahlen, können also entweder von gleicher oder von entgegengesetzter Umlaufsrichtung sein. (Nach Figur 42 und 44 sowie Erkl. 140 und 141 findet ersteres statt, wenn die Büschelscheitel auf demselben, letzteres, wenn sie nicht auf demselben Kurvenaste liegen.)

Figur 44a. Figur 44b.



Erkl. 140. Die Hyperbel kann entstehen durch zwei gleichlaufende Büschel, wie in Figur 42, wenn die Scheitel auf demselben Kurvenast liegen und zwischen a und h zwei Paar zugeordnete Parallelstrahlen haben. Sie muss entstehen durch zwei ungleichlaufende Büschel, wie in Figur 44a, wenn die Scheitel auf getrennten Kurvenästen liegen; denn dann müssen die Büschel zwei Parallelstrahlen haben, weil die Schnittpunkte ihrer Strahlen jede Gerade, also auch die unendlich ferne, in entgegengesetzter Richtung vollständig durchlaufen, also sicher zweimal übereinander weggehen. In Figur 44a ist in der That $f_1 \| f_2$ und $g_1 \| g_2$ je parallel zu einer der beiden (strichpunktiert gezeichneten) Asymptoten nach den unendlich fernen Hyperbelpunkten F und G. Man erkennt also, dass zwei projektivische Strahlenbüschel, welche gleiche Umlaufsrichtung haben, eine Ellipse oder eine Parabel oder eine Hyperbel (und zwar mit Scheiteln auf gleichem Aste) erzeugen können, bei entgegengesetzter Umlaufsrichtung aber nur eine Hyperbel (mit Scheiteln auf getrennten Aesten).

Erkl. 141. Man kann für die Hyperbel entweder den einen der unendlich fernen Punkte oder auch beide als Büschelscheitel wählen. So ist in Fig. 44b sowohl S_1 als S_2 im unendlichen, also jeder Büschel ein Parallelstrahlenbüschel. Dadurch fällt wieder die Erkennung einer bestimmten Umlaufsrichtung weg; denn man hat beide Scheitel als auf gleichem Ast mit gleicher Umlaufsrichtung aufzufassen, wenn man etwa S_1 links oben, S_2 links unten ins Unendliche verlegt denkt; dagegen hat man beide Scheitel als auf getrennten Aesten mit entgegengesetzter Umlaufsrichtung aufzufassen, wenn man S_1 nach links oben, S_2 nach rechts oben (wie die Pfeile in Figur 44b angeben) verlegt denkt. Die Parallelstrahlenbüschel lassen beiderlei Deutung zu, weil sie den Uebergang beider Fälle darstellen. Da in Fig. 44b die unendlich fernen Punkte selbst Scheitel sind, so wird $S_1 = E$, $S_2 = D$, die unendlich ferne Gerade selbst als Verbindungsgerade der Scheitel und gemeinsamer Strahl beider Büschel zu $d_1 = e_2$, und die Asymptoten als Tangenten in den Scheitelpunkten zu e_1 und d_2. Man hat in beiden Büscheln die gleiche Aufeinanderfolge der Elemente $abdhce$, wobei eben für e_1 und d_2 die unendlich ferne Gerade selbst eintritt.

Frage 41. Welche Fälle der entarteten oder zerfallenden Kurven entstehen bei der projektivischen Erzeugung der Kurven zweiten Grades?

Antwort. Wie bei der allgemeinen Definition, so muss auch im besonderen Falle als Kurve zweiter Klasse angesehen werden die Gesamtheit der Strahlen, welche durch je zwei entsprechende Punkte zweier projektivisch verwandten Punktreihen hindurchgehen. Das sind aber:

1. bei perspektivischer Lage zweier projektivischen Punktreihen der Strahlenbüschel durch den Perspektivitätsscheitel und derjenige durch den selbstentsprechenden Schnittpunkt beider Reihen. Der Strahlenbüschel zweiter Klasse zerfällt also hier in zwei Strahlenbüschel erster Klasse; und als Träger der eingehüllten Kurve erscheint das Punktepaar, welches von den Scheiteln dieser beiden Büschel gebildet wird.

2. Bei schiefer Lage projektivischer Punktreihen entstehen besondere Fälle nur bei gemeinsamem Träger. Diese eine Gerade bildet auf jeden Fall einen gemeinsamen Strahl durch je zwei gemeinsame Punkte.

α) Haben nun die beiden Punktreihen keinen selbstentsprechenden Punkt, so hat man an Stelle des

als Kurve zweiter Ordnung angesehen werden die Gesamtheit der Punkte, welche auf je zwei entsprechenden Strahlen zweier projektivisch verwandten Strahlenbüschel liegen. Das sind aber:

1. bei perspektivischer Lage zweier projektivischen Strahlenbüschel die Punktreihe auf der Perspektivitätsachse und diejenige auf dem selbstentsprechenden Verbindungsstrahl beider Scheitel. Die Punktreihe zweiter Ordnung zerfällt also hier in zwei Punktreihen erster Ordnung; und als Träger der erzeugten Kurve erscheint das Geradenpaar, welches von den Trägern dieser beiden Punktreihen gebildet wird.

2. Bei schiefer Lage projektivischer Strahlenbüschel entstehen besondere Fälle nur bei gemeinsamem Scheitel. Dieser eine Punkt bildet auf jeden Fall einen gemeinsamen Punkt auf je zwei gemeinsamen Strahlen.

α) Haben nun die beiden Strahlenbüschel keinen selbstentsprechenden Strahl, so hat man an Stelle der

Strahlenbüschels zweiter Klasse nur diese einzige Gerade, eine „eingehüllte Kurve“ ist nicht vorhanden.

β) Haben die beiden Punktreihen einen selbstentsprechenden Punkt, so ist jeder Strahl durch diesen Punkt als ein Verbindungsstrahl der im selbstentsprechenden zusammenfallenden beiden Punkte anzusehen: an Stelle des Strahlenbüschels zweiter Klasse tritt der einzige Strahlenbüschel erster Klasse durch diesen Punkt; als Träger der eingehüllten Kurve erscheint der eine Punkt als Doppelpunkt oder doppelt gezählter Punkt.

γ) Haben die beiden Punktreihen zwei selbstentsprechende Punkte, so gelten die Strahlenbüschel durch jeden derselben so, wie zuvor der einzige, und der Strahlenbüschel zweiter Klasse zerfällt in zwei Strahlenbüschel erster Klasse; Träger der Kurve ist das Punktepaar der Scheitel (wie in dem ersten Teil dieser Antwort).

Punktreihe zweiter Ordnung nur diesen einzigen Punkt, eine „Kurve“ wird nicht erzeugt.

β) Haben die beiden Strahlenbüschel einen selbstentsprechenden Strahl, so ist jeder Punkt auf diesem Strahl als ein gemeinsamer Punkt der im selbstentsprechenden zusammenfallenden beiden Strahlen anzusehen: an Stelle der Punktreihe zweiter Ordnung tritt die einzige Punktreihe erster Ordnung auf diesem Strahl; als Träger der erzeugten Kurve erscheint die eine Gerade als Doppelgerade oder doppelt gezählte Gerade.

γ) Haben die beiden Strahlenbüschel zwei selbstentsprechende Strahlen, so gelten die Punktreihen auf jedem derselben wie vorhin die einzige, und die Punktreihe zweiter Ordnung zerfällt in zwei Punktreihen erster Ordnung; Träger der Kurve ist das Geradenpaar der Träger (wie oben im ersten Teil dieser Antwort).

Erkl. 142. Die besonderen Fälle vorstehender Antwort nennt man entartete, zerfallende, ausgeartete oder degenerierte, singuläre. An sich betrachtet haben sie keine wesentliche Bedeutung als Kurven zweiten Grades. Wohl aber werden sie dadurch von Bedeutung, dass allgemeine Sätze über Kurven zweiten Grades auch dann Geltung behalten müssen, wenn an Stelle der allgemeinen Kurve dieser besondere Fall eingesetzt wird. Die Klassenkurve bezw. Ordnungskurve besitzt nämlich im Falle 1: ∞ Tangenten und 2 Punkte bezw. ∞ Punkte und 2 Tangenten, im Falle 2α: 1 Tangente und ∞ Punkte bezw. 1 Punkt und ∞ Tangenten, in den Fällen 2β und 2γ: jedesmal ∞ Punkte und ∞ Tangenten.

Erkl. 143. Will man die einzelnen Fälle darnach ordnen, von welcher der vorigen drei Kurvengattungen sie einen speziellen Fall bilden, so findet man, dass zu einem Punktepaar oder Geradenpaar jede Kurvenart einmal ausarten kann, denn gleichlaufende wie ungleichlaufende Punktreihen und Büschel können in perspektivische Lage gelangen. Dagegen lassen sich die Gesichtspunkte der Dualität für die zerfallenden Kurven nicht mehr aufrecht erhalten; denn ausgeartete Gebilde zweiter Ordnung sind nicht mehr von zweiter Klasse und umgekehrt. — Im einzelnen wird aufzufassen sein:

1. Das Punktepaar bezw. die auf der Verbindungsgeraden doppelt gelegte Strecke innerhalb oder ausserhalb der beiden Punkte (1 und 2γ links): als unendlich schmale Ellipse oder Hyperbel; und wenn einer oder beide Punkte unendlich fern liegen: als Ellipse oder Hyperbel oder Parabel.

2. Das Paar zweier Geraden (1 und 2γ rechts): als Hyperbel (mit den Asymptoten zusammenfallend); und wenn die Geraden parallel oder eine davon unendlich fern: als Ellipse (im letzteren Falle auch Kreis mit unendlich grossem Radius) oder Hyperbel oder Parabel.

3. Ein (mehrfach zählender) Einzelpunkt im Endlichen oder Unendlichen (oben Fall 2β links oder 2α rechts): als Ellipse (Nullkreis mit unendlich kleinem Radius).

4. Eine (mehrfach zählende) Gerade im Endlichen oder Unendlichen (oben Fall 2α links oder 2β rechts): als Ellipse oder Hyperbel oder Parabel.

Erkl. 144. Projiziert man die Punkte einer Ellipse, einer Parabel bezw. einer Hyperbel auf die unendlich ferne Gerade aus zweien ihrer Punkte, so schneiden die entstehenden projektivischen Büschel auf der unendlich fernen Geraden zwei projektivische Punktreihen aus, welche keinmal, einmal bezw. zweimal selbstentsprechende Punkte aufweisen. Und hiernach nennt man überhaupt eine projektivische Verwandtschaft zweier vereinigt liegenden Gebilde (Punktreihen gleichen Trägers oder Strahlenbüschel gleichen Scheitels) elliptisch oder parabolisch oder hyperbolisch, wenn keinmal oder einmal oder zweimal selbstentsprechende Elemente vorhanden sind (vergl. Aufgabe 202).

b) Massbeziehungen bei der Erzeugung der Kurven zweiten Grades.

Frage 42. Welche Massbeziehungen können die erzeugenden Gebilde einer Kurve zweiten Grades aufweisen?

Antwort. Als besondere Massbeziehungen können auftreten:

a) bei zwei Punktreihen erstens Aehnlichkeit und zweitens Kongruenz;

b) bei zwei Strahlenbüscheln Gleichheit, und zwar entweder mit gleichlaufender oder mit ungleichlaufender Umdrehungsrichtung.

Erkl. 145. Bei Strahlenbüscheln fallen Aehnlichkeit und Kongruenz zusammen in dem einen Begriff Gleichheit. Derselbe besteht darin, dass je zwei entsprechende Strahlen in beiden Büscheln gleichen Winkel bilden, oder dass man von einem Paar zugeordneter Strahlen ausgehend jedes andere Paar erhalten kann durch Drehung um die gleiche Winkelgrösse. Vergleiche Antwort auf Frage 43 des I. Teils dieses Lehrbuchs.

Frage 43. Welche Tangentenkurven zweiter Klasse werden durch ähnliche bezw. kongruente Punktreihen in schiefer Lage erzeugt?

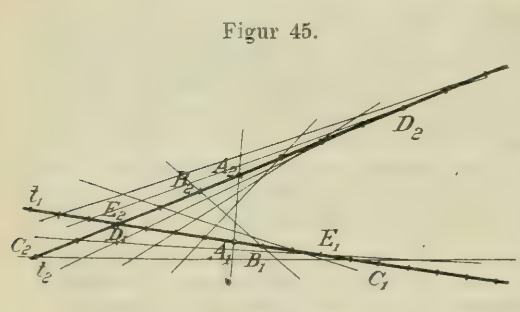
Antwort. 1. Da sowohl in ähnlichen als in kongruenten Punktreihen die unendlich fernen Punkte einander zugeordnet sind, so ist unter den Tangenten der entstehenden Kurve jedenfalls auch die Verbindungsgerade dieser beiden unendlich fernen Punkte, also die unendlich ferne Gerade enthalten, und somit ist die Kurve jedesmal eine Parabel.

2. Dabei entspricht der Strecke auf der einen Punktreihe zwischen Schnittpunkt und Berührungspunkt die Strecke auf der andern Punktreihe zwischen Berührungspunkt und Schnittpunkt. Sind also im besonderen Falle die beiden Reihen kongruent, so müssen auch diese beiden Strecken gleich sein, d. h. die Berührungspunkte der Träger haben gleichen Abstand vom Schnittpunkt; und sowohl dieses Paar, als auch alle übrigen entsprechenden Punktepaare der beiden Punktreihen liegen dann symmetrisch zur Halbierungsgeraden des Winkels der beiden Träger. Daher muss diese Winkelhalbierende auch Symmetrieachse sein für alle Tangenten der Kurve, und für die Parabel selbst.

3. Umgekehrt müssen aber auch allgemein die Punktreihen, welche bei einer Parabel auf zwei beliebigen festen Tangenten durch eine veränderliche ausgeschnitten

Erkl. 146. Dass ähnliche Punktreihen und kongruente Punktreihen stets als projektivische aufgefasst werden können, und dass bei ihnen der unendlich ferne Punkt der einen auch stets den unendlich fernen Punkt der andern als zugeordneten Punkt erhalten muss, ist in Antwort auf Frage 43 des I. Teils dieses Lehrbuchs durchgeführt worden. Aus nebenstehender Antwort entnimmt man, dass solche Reihen stets Parabeln erzeugen, und dass umgekehrt eine Parabel auch nur von ähnlichen (bezw. kongruenten) Punktreihen erzeugt werden kann, von beliebig gearteten also gar nicht.

Figur 45.

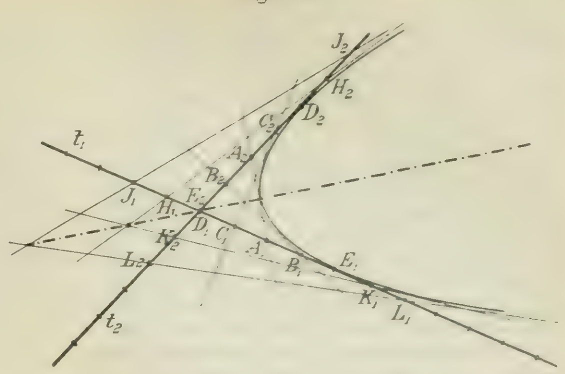


Erkl. 147. In Figur 45 enthält Träger t_1 lauter Punkte in Abständen von 4 mm, t_2 solche in Abständen von 6 mm. Ist eines der Punktepaare als zugeordnet festgelegt, so muss jeder folgende Punkt auf dem einen Träger dem folgenden Punkte auf dem andern Träger zugeordnet werden. Und die Verbindungsgeraden je zweier zugeordneten Punkte erzeugen die Parabel. Aber nicht nur auf t_1 und t_2, sondern auch auf jeder andern Tangente, wie $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ entstehen in Figur 45 Abschnitte, welche je unter sich gleichgross sind, so dass

das Grössenverhältnis jedes Paares entsprechender Abstände auf zwei verschiedenen Tangenten ein konstantes ist. Es gilt also auf jedem Trägerpaar, wie auf $t_1 t_2$, dass z. B.:

$$A_1B_1 : A_2B_2 = A_1C_1 : A_2C_2 = D_1E_1 : D_2E_2 \text{ u. s. w.}$$

Figur 46.



Erkl. 148. In Figur 46 sind auf t_1 und t_2 gleichgrosse Abschnitte von 5 mm abgetragen. Durch Zuordnung eines Punktepaares, z. B. des Berührungspunktes D_2 zum Schnittpunkt D_1 ist auch jede andere Zuordnung festgelegt. Ausgehend vom Schnittpunkt $D_1 E_2$ liegen symmetrisch auf beiden Trägern die Punkte auf t_1:

$$D_1 C_1 A_1 B_1 E_1 K_1 L_1 \cdots J_1 H_1 D_1.$$

auf t_2:

$$E_2 B_2 A_2 C_2 D_2 H_2 J_2 \cdots L_2 K_2 E_2.$$

Die Tangente $A_1 A_2$ verbindet Punkte gleichen Abstandes vom Schnittpunkte, ist also senkrecht zur Winkelhalbierenden, und zu sich selbst symmetrisch. Sonst entsprechen einander beiderseits der Winkelhalbierenden in symmetrischen Paaren:

$B_1 B_2$ und $C_2 C_1$. $D_1 D_2$ und $E_2 E_1$.
$H_1 H_2$ und $K_2 K_1$. $J_1 J_2$ und $L_2 L_1$.

Je zwei solche Tangenten schneiden einander in einem Punkte auf der Winkelhalbierenden der Träger $t_1 t_2$, und somit muss diese Gerade auch als Symmetrieachse der Kurve selbst angesehen werden. Dieselbe Eigenschaft muss auch bei Figur 45 auftreten, sowie man zwei solche Tangenten als Träger wählt, deren Berührungspunkte vom Trägerschnittpunkt gleichen Abstand haben.

Erkl. 149. Durch die vorige Ueberlegung ist für die Parabel die merkwürdige Eigenschaft festgestellt, dass sie eine Symmetrieachse besitzt, was eine rein metrische Beziehung darstellt. Zugleich erkennt man, dass kongruente Punktreihen keine besondere Art von Parabeln erzeugen gegenüber den von allgemein ähnlichen Punktreihen erzeugten. Denn einerseits entsteht auch bei Figur 45 die Achse als Ort der Schnittpunkte solcher Tangenten, welche die Berührungspunkte im gleichen Abstand vom Schnittpunkt haben, und andererseits entstehen auch bei Figur 46 auf den andern Tangenten als $t_1 t_2$, z. B. $B_1 B_2$ oder $J_1 J_2$, wieder ähnliche Punktreihen allgemeiner Art und mit anderem Winkel der Träger und sowohl mit Strecken unter 5 mm, wie auf $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, als über 5 mm, wie auf $H_1 H_2$ oder $L_1 L_2$. — Verschiedenerlei Parabeln werden sich daher der Gestalt nach von der in Figur 46 vorliegenden bei beliebigem Winkel der Träger überhaupt nur durch die Lage der Berührungspunkte $E_1 D_2$ unterscheiden können, also durch ein einziges Längenverhältnis; und dadurch kommt man hier schon zu dem Schlusse, dass alle überhaupt

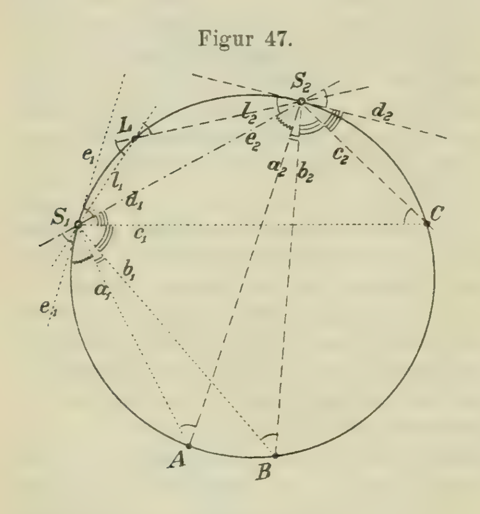
werden, stets ähnlich sein, d. h. proportionale Abschnitte zwischen entsprechenden Punkten aufweisen. Denn bei jeder Parabel ist die unendlich ferne Gerade Tangente, also sind die unendlich fernen Punkte jedes Tangentenpaares, wenn es als Trägerpaar aufgefasst wird, einander zugeordnet; und folglich sind die erzeugten Punktreihen — zunächst nach Satz 16 dieses II. Teils projektivisch, und zwar nach Antwort auf Frage 43 des I. Teils mit Zuordnung ihrer unendlich fernen Punkte, also ähnlich.

4. Das Grössenverhältnis dieser ähnlichen Punktreihen bezw. der entsprechenden proportionalen Abschnitte richtet sich nach den Längen der beiden Strecken zwischen dem Schnittpunkt der Tangenten und ihren Berührungspunkten. Auf derjenigen Tangente, auf welcher der Berührungspunkt einen grösseren Abstand vom Schnittpunkt hat als auf der andern, sind alle Abschnitte in diesem gleichen Verhältnis grösser, und umgekehrt; schneiden sich beide Tangenten auf der Symmetrieachse der Parabel (s. oben), so sind die Abschnitte zwischen Schnittpunkt und Berührungspunkten und damit gleichzeitig auch alle durch eine veränderliche Tangente gebildeten Abschnitte zwischen entsprechenden Punkten auf beiden Tangenten gleichgross.

möglichen Parabeln einander ähnlich sind, bezw. in perspektivisch ähnliche Lage (nach der Bedeutung dieses Ausdrucks im VII. und VIII. Teile von Kleyer-Sachs, Ebene Elementar-Geometrie) gebracht werden können. — Die Anzahl der willkürlichen Stücke für die Festlegung einer nach Gestalt und Lage bestimmten Parabel bleibt dabei in der Zahl vier (wie in Erkl. 135), nämlich in Figur 45 die Elemente $t_1 t_2$ und dazu ein Paar Tangenten oder die beiden Berührungspunkte $E_1 D_2$; in Figur 46 ebenso die Träger $t_1 t_2$ und dazu eine Tangente oder ein Berührungspunkt zusammen mit der Bedingung der Symmetrie. — Es giebt also vierfach unendlich viele verschiedenen Parabeln, von denen jedoch nur einfach unendlich viele an Gestalt verschieden sind; jede dieser aber kann dreifach unendlich viele verschiedene Lagen in der Zeichnungsebene einnehmen.

Frage 44. Was für Punktkurven zweiter Ordnung werden durch gleiche Strahlenbüschel in schiefer Lage bei gleichlaufender Umlaufsrichtung erzeugt?

Figur 47.



Erkl. 150. Dass die Winkel bei A, B, C gleichgross sein müssen, kann man durch Betrachtung der Dreiecke $S_1 A S_2$, $S_1 B S_2$, $S_1 C S_2$ finden. Durch Verlegung des Punktes A nach B wird die Winkelsumme des Dreiecks $S_1 A S_2$ verkleinert um $\sphericalangle (a_1 b_1)$, vergrössert um den gleichgrossen $\sphericalangle (a_2 b_2)$, also muss auch der an Stelle von $\sphericalangle A$ tretende $\sphericalangle B$ gleichgross sein. Die $\sphericalangle (e_1 d_1)$ und $\sphericalangle (e_2 d_2)$ werden symmetrisch gleich und jeder als Sehnentangentenwinkel gleich dem Peripheriewinkel A oder B auf demselben Bogen $S_1 S_2$. Bei L ist der innerhalb des Kreises liegende $\sphericalangle (l_1 l_2)$ Supplement der Winkel bei A und B, also sein Nebenwinkel wieder jenem gleich.

Antwort. 1. Sind S_1 und S_2 in Figur 47 die Scheitel zweier gleichen und gleichlaufenden Strahlenbüschel, so ist:

$$\sphericalangle (a_1 b_1) = \sphericalangle (a_2 b_2),$$
$$\sphericalangle (b_1 c_1) = \sphericalangle (b_2 c_2),$$
$$\sphericalangle (c_1 d_1) = \sphericalangle (c_2 d_2), \text{ u. s. w.}$$

Daraus folgt aber in Figur 47, dass auch

$$\sphericalangle (a_1 a_2) = \sphericalangle (b_1 b_2) = \sphericalangle (c_1 c_2) = \sphericalangle (d_1 d_2)$$
u. s. w.,

und daher ist die entstehende Kurve derjenige Kreis, welcher durch die Punkte $S_1 S_2$ geht und den feststehenden Winkel zweier beliebigen zugeordneten Strahlen als Peripheriewinkel fasst, — oder derjenige Kreis, aus dessen Punkten die Strecke $S_1 S_2$ unter dem Winkel zweier zugeordneten Strahlen gesehen wird.

2. Nimmt man umgekehrt den Kreis durch die Punkte $A S_1 S_2$ als gegeben an und verbindet beliebige Punkte desselben mit S_1 und S_2, so müssen wegen der gleichgrossen Peripheriewinkel $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C$ u. s. w. auch gleichgrosse Winkel bei S_1 und S_2 zwischen je zwei solchen Strahlen entstehen, welche nach denselben Kreispunkten führen. Man sieht also, dass einerseits gleiche und gleichlaufende Büschel in schiefer Lage nur Kreise erzeugen können, und dass anderseits Kreise nur durch

Erkl. 151. Wenn $a_1 a_2$ einander im Punkte A treffen, so bildet jeder Strahl von S_1 mit a_1 denselben Winkel in gleicher Umlaufsrichtung, wie der entsprechende Strahl von S_2 mit a_2. Liegt also ein erster Schnittpunkt im endlichen, so liegt keiner im unendlichen und der Kreis erscheint als Spezialfall der Ellipse. Denn zwei entsprechende Strahlen können nie parallel werden, wenn nicht alle zugeordneten parallel sind, also auch A schon im Unendlichen liegt. Im letzten Falle sind die Büschel in perspektivischer Lage und erzeugen als Kurvenpunkte nur unendlich ferne Punkte. Die Gesamtheit der letzteren kann man dann ansehen als die unendlich ferne Gerade, oder auch zusammen mit $S_1 S_2$ als unendlich grossen Kreis.

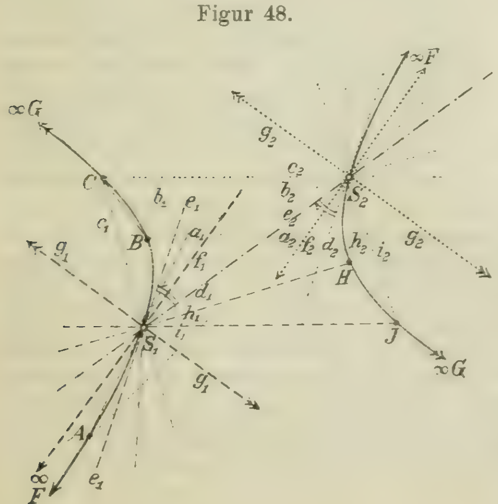
Erkl. 152. Die beim Kreise auftretende Gleichheit der Büschel ist eine weit engere (weil eindeutige) Spezialisierung als die bei der Parabel erscheinende Aehnlichkeit der Punktreihen, welche noch die verschiedensten Grössenproportionen zulässt. Daher gibt es auch vierfach unendlich viele Parabeln, aber nur dreifach unendlich viele Kreise. Gemeinsam ist beiden die einfach unendliche Mannigfaltigkeit der Gestalten; während aber jede Parabel in ∞^3 verschiedenen Lagen auftreten kann, kann ein Kreis nur ∞^2 verschiedene Lagen einnehmen.

gleiche und gleichlaufende Büschel in schiefer Lage erzeugt werden können.

3. Durch diese enge Beschränkung der Kreiserzeugung wird auch die Zahl der willkürlichen Bestimmungsstücke des Kreises enger begrenzt. Denn durch den Namen des Kreises allein wird die Gleichheit der erzeugenden Büschel unbedingt festgelegt, und bleibt daher willkürlich nur noch die Lage der beiden Scheitel und dazu eines zugeordneten Strahlenpaares, oder eines Kurvenpunktes als Schnittpunkt derselben. Das letztere ist also dieselbe Bestimmung durch drei Punkte, wie in der Planimetrie. Man hat demnach auch in der projektivischen Geometrie für den Kreis nur drei willkürliche Bestimmungsstücke.

Frage 45. Was für Punktkurven zweiter Ordnung werden durch gleiche Strahlenbüschel in schiefer Lage bei entgegengesetzter Umlaufsrichtung erzeugt?

Figur 48.



Antwort. 1. Sind $S_1 S_2$ in Figur 48 die Scheitel zweier gleichen und entgegengesetzt laufenden Strahlenbüschel, so ist:

$$\sphericalangle(a_1 b_1) = \sphericalangle(a_2 b_2),$$
$$\sphericalangle(b_1 c_1) = \sphericalangle(b_2 c_2),$$
$$\sphericalangle(c_1 d_1) = \sphericalangle(c_2 d_2), \text{ u. s. w.}$$

Wegen des entgegengesetzten Umlaufs muss es zweimal vorkommen, dass entsprechende Strahlen parallel sind, folglich hat man jedenfalls eine Kurve mit zwei unendlich fernen Punkten, nämlich eine Hyperbel, und zwar mit Scheiteln auf getrennten Aesten.

2. Wegen der gleichen Winkel, die jedes Paar zweier zugeordneten Strahlen mit jedem andern Paar bilden muss, müssen die beiden Richtungen der parallelen zugeordneten Strahlen $f_1 \| f_2$ und $g_1 \| g_2$ aufeinander senkrecht stehen. Denn wenn $f_1 \| f_2$ und $\sphericalangle(f_1 g_1) = \sphericalangle(f_2 g_2)$ in entgegengesetzter Richtung, so können $g_1 \| g_2$ nur dann parallel erscheinen, wenn $\sphericalangle(f_1 g_1) = 90^0$ und

Erkl. 153. Wenn von zwei gleichen Strahlenbüscheln ein Paar zugeordneter Strahlen $a_1 a_2$ bekannt ist, so findet man den zugeordneten Strahl b_2 zu einem beliebigen b_1 des einen Büschels, indem man denjenigen Winkel $(a_1 b_1)$, welchen b_1 mit a_1 im ersten Büschel bildet, auch im zweiten Büschel an a_2 in vorgeschriebener Richtung (gleichen bezw. entgegengesetzten Umlaufes) als $\sphericalangle (a_2 b_2)$ anträgt. Infolgedessen kann man durch eine einfache planimetrische Ueberlegung aus der Winkelgrösse α der Strahlen $a_1 a_2$ die Winkel finden, welche die parallelen zugeordneten Strahlen $f_1 f_2$ und $g_1 g_2$ mit den beliebigen Strahlen a_1 bezw. a_2 bilden. Man erhält nämlich durch den Schnitt von $a_1 a_2$ mit den Richtungen der gesuchten beiden Parallelen $f_1 g_1$ infolge der Gleichheit der korrespondierenden Winkel ξ bezw. der Wechselwinkel η (Fig. 49) zwei gleichschenklige Dreiecke mit Winkel α als Innenwinkel bezw. Aussenwinkel an der Spitze. Daher ist der eine Winkel $\xi = 90 - \frac{\alpha}{2}$, der andere $\eta = \frac{\alpha}{2}$, und ihre Summe 90^0, d. h. die beiden Richtungen müssen senkrecht aufeinander stehen. Der letztere Umstand leuchtet ebenfalls sofort ein, wenn man zwei der parallelen Strahlen als Ausgangsstrahlen wählt: dreht man nach entgegengesetzten (oder gleichen) Seiten um 90^0 weiter, so entstehen wieder parallele Richtungen. Daher sind die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel stets parallel zu den beiden Winkelhalbierenden des Winkels der Verbindungsstrahlen eines beliebigen Kurvenpunktes mit den Berührungspunkten zweier parallelen Tangenten.

Erkl. 154. Den Namen als gleichseitige Hyperbel führt die erzeugte Kurve wegen einer andern metrischen Eigenschaft. Wegen der rechtwinklig stehenden Asymptoten wird nämlich das Rechteck aus den sog. beiden Halbachsen, welches die Richtungen der Asymptoten zu Diagonalen hat und bei der allgemeinen Hyperbel ungleichseitig ist, zu einem gleichseitigen, also zu einem Quadrat. So ist in Figur 50 das rechtwinklige Dreieck MS_2X, dessen Katheten die Hauptachse und die Scheiteltangenten, deren Hypotenuse eine Asymptote bildet, zugleich gleichschenklig, also die Hälfte eines Quadrats, während dasselbe rechtwinklige Dreieck bei der allgemeinen Hyperbel ungleiche Katheten hat, also die Hälfte eines Rechtecks bildet.

Erkl. 155. Zur Bestimmung der gleichseitigen Hyperbel mittels gleicher Strahlenbüschel kann man nach Festlegung der Büschelscheitel statt eines beliebigen Strahlenpaares auch die (zu einander senkrechten) Asymptotenrichtungen selber wählen oder auch die (zu einander parallelen) Tangenten in den Büschelscheiteln. Denn im ersten Falle sind die beiden zugeordneten parallelen Strahlen als Ausgangsrichtungen

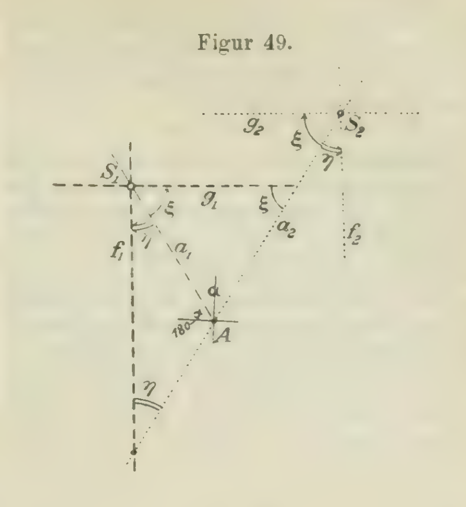
$\sphericalangle (f_2 g_2) = 90^0$. Die Richtung nach den unendlich fernen Punkten ist aber auch die Richtung der in jenen Punkten berührenden Tangenten oder der Asymptoten; also entsteht durch gleichlaufende Büschel von entgegengesetzter Umlaufsrichtung stets eine Hyperbel mit senkrechten Asymptoten, eine sogenannte gleichseitige Hyperbel.

3. Da $\sphericalangle (d_1 e_1) = \sphericalangle (d_2 e_2)$ sein muss, während d_1 und e_2 dieselbe Gerade bilden, so sind bei jeder solchen Konstruktion die Winkel des Verbindungsstrahls $S_1 S_2$ mit den Geraden $d_1 e_2$ gleiche korrespondierende Winkel, also müssen bei der Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel durch gleiche Büschel die Tangenten d_2 und e_1 in den Scheiteln $S_1 S_2$ parallel sein. Umgekehrt werden aber bei einer gleichseitigen Hyperbel durch Verbindung aller Kurvenpunkte mit zwei festen von ihnen nur dann gleiche Büschel entstehen, wenn als Scheitel dieser Büchel zwei Punkte mit parallelen Tangenten $d_2 \parallel e_1$ gewählt werden. In jedem andern Fall — und besonders bei Wahl zweier Scheitel auf gleichem Kurvenaste — entstehen keine gleichen Büschel, sondern allgemein projektivische.

4. Durch den Namen der gleichseitigen Hyperbel wird daher die Gleichheit der erzeugenden Büschel nicht unbedingt festgelegt, wohl aber der rechte Winkel der Asymptoten. Demnach verbleiben für die gleichseitige Hyperbel im allgemeinen noch vier willkürliche Bestimmungsstücke, indem als eines der fünf allgemeinen Bestimmungsstücke einer Hyperbel das Senkrechtstehen der Asymptotenrichtungen durch den Namen „gleichseitig“ festgelegt ist. Man kann nicht mehr fünf Elemente willkürlich wählen, sondern wenn eine Asymptotenrichtung gegeben ist, so ist damit auch schon die andere Asymptotenrichtung festgelegt: als Richtung einer zur ersten senkrechten Geraden.

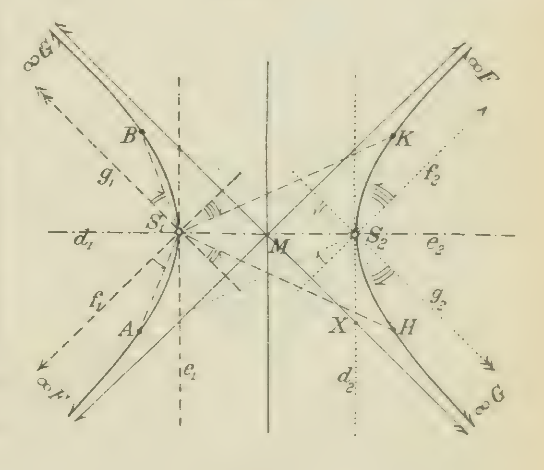
für alle gleichen Winkel zu wählen. Im zweiten Falle ist der Winkel für je zwei zugeordnete Strahlen im einen Büschel von der Tangentenrichtung, im andern Büschel vom Verbindungsstrahle der Scheitel aus gleichgross zu messen. Bemerkenswert ist dabei derjenige Fall, dass der Verbindungsstrahl der Scheitelpunkte $S_1 S_2$ den Winkel der Asymptotenrichtungen halbiert bezw. auf den Tangenten in den Scheitelpunkten senkrecht steht (Figur 50): Dann wird die ganze Konstruktion symmetrisch sowohl zur Verbindungsgeraden der Scheitel als auch zu deren Mittelsenkrechten als Achsen und man erkennt, dass die Kurve in vier kongruente Asthälften zerfällt, von denen je einer in einem der rechten Winkel (de) verläuft. Dabei sind die Büschelscheitel diejenigen Kurvenpunkte, welche auch sonst als Scheitelpunkte der Kurve bezeichnet werden, die Gerade $S_1 S_2$ heisst Hauptachse, ihre Mittelsenkrechte Nebenachse

Figur 49.



Erkl. 156. Da alle gleichseitigen Hyperbeln rechtwinklige Asymptoten haben und eine einzelne durch diese und ein einziges weiteres Element eindeutig bestimmt werden kann, so unterscheiden sich alle nur durch ein einziges Grössenverhältnis, sind daher alle als ähnliche Figuren zu betrachten. Man hat also wegen der vier willkürlichen Bestimmungsstücke zwar vierfach unendlich viele gleichseitige Hyperbeln; von diesen unterscheiden sich aber nur einfach unendlich viele durch die Gestalt, und jede dieser ∞^1 gleichseitigen Hyperbeln kann in ∞^3 verschiedenen Lagen erscheinen. — Andererseits ist die Rechtwinkligkeit der Asymptoten eine so spezifisch metrische Beziehung, dass sie sich nicht in dieser Gestalt in die projektivischen Bestimmungen durch Kurven und Tangenten einreihen lässt. Man kann die Bedingung aber in der Form ausdrücken, dass wenn von den unendlich fernen Punkten der eine willkürlich gegeben wird, dann der andere durch den Namen der gleichseitigen Hyperbel gegeben ist. Ausserdem bleiben dann nur noch drei willkürliche weitere Elemente (3 Punkte, 2 Punkte und 1 Tangente, 1 Punkt und 2 Tangenten, 3 Tangenten), deren Auswahl hier noch der Beschränkung der vereinigten Lage zu Paaren (PT) unterworfen ist.

Figur 50.



Erkl. 157. Sind von einem Kreis drei Punkte gegeben, so ist er eindeutig bestimmt; denn der Name Kreis verlangt unbedingt gleiche und gleichlaufende Büschel, und man kann dazu zwei beliebige der drei Punkte als Scheitel wählen. Sind aber von einer gleichseitigen Hyperbel drei Punkte gegeben, so ist sie erst dann eindeutig bestimmt, wenn die Konstruktion durch gleiche Büschel vorgeschrieben und dazu die Büschelscheitel ausgewählt sind. Denn nach voriger Erkl. 156 sind durch dieselben drei gegebenen Punkte noch ∞^1 verschiedene gleichseitige Hyperbeln möglich — je nach der Zufügung der beiden unendlich fernen Punkte. Dementsprechend können auch zwei Kreise einander nie in mehr als zwei Punkten schneiden, während zwei gleichseitige Hyperbeln vier gemeinsame Schnittpunkte haben können. — So steht also die gleichseitige Hyperbel in der metrischen (Grössen-)Beziehung der einfach unendlichen Mannigfaltigkeit der Gestalt auf gleicher Stufe mit Kreis und Parabel, hinsichtlich der (Lage-)Bestimmung durch Elemente der projektivischen Geometrie auf gleicher Stufe vierfacher Willkürlichkeit mit der Parabel, während hier beiden gegenüber der Kreis mit einer bloss dreifachen Willkürlichkeit eine engere Beschränkung darstellt.

Frage 46. Was folgt aus den planimetrischen Eigenschaften des Kreises für die Punktreihen, durch welche der Kreis als Tangentenkurve erzeugt werden kann?

Antwort. 1. Sind $t_1 t_2$ in Figur 51 zwei beliebige Tangenten eines Kreises mit Mittelpunkt M; $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ u. s. w. dessen übrige Tangenten und $T_a T_b$ deren Berührungspunkte, so lehrt die Planimetrie (vergl. Kleyer-Sachs, Lehrbuch der Ebenen Elementar-Geometrie, IV. Teil, Aufgabe 39), dass jeder Winkel der Art wie $A_1 M A_2$ besteht aus den zwei Teilen $A_1 M T_a$ und $A_2 M T_a$, wovon ersterer $\frac{1}{2} E_1 M T_a$, letzterer $\frac{1}{2} D_2 M T_a$; daher ist der bei jeder Tangente in anderer Lage erscheinende Winkel:

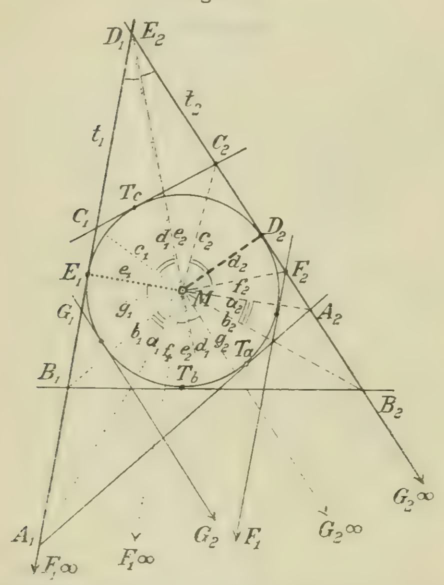
$$\sphericalangle A_1 M A_2 = \frac{1}{2}(E_1 M T_a + D_2 M T_a)$$
$$= \frac{1}{2} E_1 M D_2,$$

also von unveränderlicher Grösse. Demnach bildet jeder Projektionsstrahl eines Punktes der Reihe t_1 den konstanten Winkel $\frac{1}{2} E_1 M D_2$ mit dem Projektionsstrahl des entsprechenden Punktes auf t_2, und man erhält das Ergebnis, dass die Reihen $A_1 B_1 \cdots$ und $A_2 B_2$ durch zwei kongruente gleichlaufende Büschel mit gemeinsamem Scheitel M ausgeschnitten werden. Solche Reihen sind aber jedenfalls projektivisch; denn da kongruente Büschel stets projektivisch sind, so sind auch die von denselben ausgeschnittenen beiden Punktreihen projektivisch. Wenn durch Drehung um $\sphericalangle \frac{1}{2} E_1 M D_2$ die Büschel zur Deckung gebracht werden, so gelangen beide Punktreihen in perspektivische Lage mit Projektionsscheitel auf der Winkelhalbierenden.

2. Umgekehrt kann der Kreis aber auch durch zwei beliebige projektivische Punktreihen erzeugt werden, wenn man diese der vorigen Bedingung entsprechend aneinanderlegt. Um das zu erreichen, denkt man sich die beiden beliebig gegebenen Reihen erst auf gemeinsamem Träger gleichlaufend so aufgelegt, dass sie keine Doppelpunkte haben. Dann gibt es

Erkl. 158. Nachdem in Frage 43 die Parabel als Tangentenkurve, in Frage 44 und 45 der Kreis und die gleichseitige Hyperbel als Punktkurven untersucht wurden, legt sich die Frage nahe, wie Parabel als Ordnungskurve, Kreis und gleichseitige Hyperbel als Klassenkurven entstehen. Für den Kreis gibt die nebenstehende Antwort die verlangte Auskunft. Für die Parabel als Ordnungskurve sind jedenfalls erforderlich gleichlaufende Büschel mit einzigem Parallelstrahlenpaar. Für die gleichseitige Hyperbel lassen sich ähnliche Ueberlegungen anstellen wie für den Kreis in nebenstehender Antwort.

Figur 51.



Erkl. 159. Bezeichnet man den Winkel $A_1 D_1 A_2$ in Figur 51 mit τ, so ist der hohle Winkel:

$$E_1 M D_2 = 180 - \tau,$$

der erhabene Winkel:

$$E_1 M D_2 = 180 + \tau.$$

also auch dessen Hälfte in Figur 51:

$$\sphericalangle A_1 M A_2 = 90 + \frac{1}{2}\tau,$$

$$\sphericalangle C_1 M C_2 = 90 - \frac{1}{2}\tau.$$

Das stimmt aber wohl miteinander überein; denn beim Uebergang durch die parallelen Tangenten

zu einem der Träger springt auch der Winkel A_1MA_2 in der Lage F_1MF_2 in seinen supplementären Nebenwinkel andererseits MF_2 über, also aus $90+\frac{1}{2}\tau$ in:

$$180-\left(90+\frac{1}{2}\tau\right)=90-\frac{1}{2}\tau.$$

Von den Winkeln zweier zugeordneten Strahlen ist stets der eine $90+\frac{1}{2}\tau$, der Nebenwinkel $90-\frac{1}{2}\tau$. — Man erkennt zugleich aus derselben Auffassung, dass der Schnittpunkt beider Träger der entsprechende zum Berührungspunkt ist, denn:

$$\sphericalangle E_1ME_2=\sphericalangle(e_1e_2)=\sphericalangle(d_1d_2)$$
$$=\sphericalangle D_1MD_2=90-\frac{1}{2}\tau.$$

Erkl. 160. Zwei gleichlaufend projektivische Punktreihen auf gemeinsamem Träger ohne Doppelpunkte können nach dem Satze in Erkl. 306 des I. Teils dieses Lehrbuchs stets durch zwei kongruente gleichlaufende Büschel mit gemeinsamem Scheitel projiziert werden. Um diesen Scheitel zu erhalten, errichtet man im Mittelpunkt der beiden Fluchtpunkte G_1F_2 eine Senkrechte, deren Länge gleich ist dem geometrischen Mittel der (beiderseits je gleichgrossen) Abstände dieses Mittelpunktes von seinen beiden zugeordneten Punkten in jeder der beiden Reihen und von jedem der Fluchtpunkte. Dass diese Beziehungen mit den metrischen Eigenschaften von Figur 51 übereinstimmen, erkennt man folgendermassen. In dem Rhombus der vier Tangenten t_1, t_2, f und g sind die Diagonalenwinkel bei M je 90°, und symmetrisch gleiche Strecken sind $ME_1=MD_2$ und $D_1D_2=E_2E_1$, $E_1G_1=D_2F_2$, $D_1G_1=E_2F_2$. Bringt man also die Reihen t_1t_2 auf gemeinsamen Träger durch Umdrehung von MD_2 auf ME_1, so wird thatsächlich Punkt E_1D_2 zum Mittelpunkt der Strecke der Fluchtpunkte G_1F_2, und in dem rechtwinkligen Dreieck D_1MG_1 wird die Höhe ME_1 geometrisches Mittel der Hypotenusenabschnitte E_1G_1 und E_1E_2 bezw. D_2F_2 und D_2D_1. — Wirklich ist also der durch obige Konstruktion gefundene Projektionsscheitel M zugleich der Mittelpunkt eines durch die Punktreihen zu erzeugenden Kreises. Und zu dem Zweck müssen diese Punktreihen um M auseinander gedreht werden, bis $\sphericalangle G_1MF_2$ ein gestreckter wird. Dadurch kommen zugleich diejenigen Punkte E_1D_1 in die Lage der Berührungspunkte mit gleichen Tangentenabschnitten, für welche die Abstände D_1D_2 und E_1E_2 in den ursprünglichen Reihen gleichgross waren.

nach Aufg. 106 und Erkl. 306 des I. Teiles stets einen Scheitelpunkt S, aus welchem die beiden Reihen durch zwei kongruente Büschel projiziert werden. Um diesen Scheitel S muss man dann die eine der Reihen um einen solchen Winkel drehen, dass von den Projektionsstrahlen der Fluchtpunkte F_2 und G_1 der eine SF_2 in die Verlängerung des andern SG_1 fällt. Dann wird das Erzeugnis ein Kreis mit Mittelpunkt S auf Grund der Ueberlegung im ersten Teile dieser Antwort (vergl. Erkl. 160).

3. Endlich ergeben die metrischen Eigenschaften des Kreises auch einen einfachen Beweis für den Satz 18 (vergl. Figur 38 und Erkl. 127) im Kreis. Denn denkt man sich etwa den Berührungspunkt E_1 verbunden mit den Berührungspunkten $T_aT_b\cdots$, so stehen die Strahlen MA_1, $MB_1\cdots$ (als Verbindungsgeraden mit dem Scheitel des Tangentenwinkels) auf den Sehnen E_1T_a, $E_1T_b\cdots$ (als Berührungssehnen zum Scheitel jenes Winkels) senkrecht, bilden folglich einen Büschel, welcher mit dem Strahlenbüschel dieser Sehnen kongruent ist. Demnach ist auch die Punktreihe $A_1B_1\cdots$ projektivisch dem Strahlenbüschel, durch welches die Berührungspunkte aus einem Kurvenpunkte E_1 projiziert werden.

Erkl. 160a. Nach Satz 7a in Antwort der Frage 37 des I. Teiles gibt es für jeden beliebigen Punkt D_1 der einen Reihe stets eine bestimmte Strecke D_1E_1, welche mit der entsprechenden Strecke D_2E_2 zwischen den zugeordneten Punkten der andern Reihe gleichlang ist, und zugleich ebenso wie D_1E_1 den Fluchtpunkt G_1 bezw. F_2 ausschliesst. Legt man also die beiden Reihen so aufeinander, dass die Punkte D_1 und E_2 zur Deckung gelangen, so muss man nur noch dem Winkel $E_1D_1D_2$ richtige Grösse geben, um den Kreis zu erhalten.

liefert:
$$\sin\frac{\tau}{2}=\frac{MG_1}{D_1G_1}=\frac{E_1G_1}{MG_1}$$
$$\sin^2\frac{\tau}{2}=\frac{E_1G_1}{D_1G_1}.$$
Dann ist der Radius:
$$r=\sqrt{D_1E_1\cdot E_1G_1}\text{ oder }r=D_1E_1\cdot tg\frac{\tau}{2}. \text{ —}$$

Frage 47. Wie lassen sich die Ergebnisse über Parabel, Kreis und gleichseitige Hyperbel übersichtlich zusammenstellen?

Antwort. Je nach ihrer Entstehungsweise durch Punktreihen oder Strahlen-

Erkl. 161. Ein jeder der nebenstehenden drei Sätze enthält vier verschiedene Aussagen: eine erste über die Art der Punktreihen, durch welche sicher die genannte Kurve als Klassenkurve erzeugt wird; eine zweite über die Art von Punktreihen, welche durch eine veränderliche Tangente der Kurve auf jeder einzelnen von ihnen als Träger erzeugt werden; eine dritte über die Art von Strahlenbüscheln, durch welche sicher die genannte Kurve als Ordnungskurve erzeugt wird, und eine vierte über die Art von Strahlenbüscheln, welche durch einen veränderlichen Punkt der Kurve in jedem einzelnen von ihnen als Scheitel erzeugt werden. — Dieselben sind nachgewiesen für die Parabel in Antwort auf Frage 43 bezw. 39, 2 und 40, 2 — für den Kreis in Antwort auf Frage 44 und 46 bezw. 39, 1 und 40, 1 — für die gleichseitige Hyperbel in Antwort auf Frage 45 bezw. 39, 3 und 40, 3.

Erkl. 162. Man hat zu beachten, dass die zusammengehörigen Aussagen in den nebenstehenden Sätzen sich sehr unterscheiden in Bezug auf ihre Allgemeinheit. Nur für die Parabel als Klassenkurve und für den Kreis als Ordnungskurve erhält man eindeutige gleichlautende Bestimmungen. In allen andern Fällen sind entweder beiderlei Aussagen von gleicher Allgemeinheit, wie bei der Parabel als Punktgebilde und dem Kreise als Tangentengebilde ganz oder teilweise zutrifft; — oder die eine der Aussagen zeigt besondere Beschränkung, während die andere allgemein bleibt, wie bei der gleichseitigen Hyperbel. Dass die gleichseitige Hyperbel ebenso wie der Kreis durch beliebige projektivische Punktreihen in bestimmt herzustellender Lage erzeugt werden kann, findet man in Aufgabe 257 der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teils.

Erkl. 163. Aus dem Vergleich der Figuren 39, 41a und 48 mit den Figuren 50 ($e_1 \parallel d_2$) und 51 ($D_1 D_2 \parallel G_1 G_2$) geht als Einzelbeziehung noch diejenige hervor, dass wenn bei parallelen Punktreihen die Verbindungsgerade der Fluchtpunkte senkrecht zu den Trägern steht, dann Ellipse (oder Kreis) oder Hyperbel in symmetrischer Lage erzeugt werden, d. h. in der Weise, dass jene Fluchtpunkte zu Scheitelpunkten der Kurven werden:

Beim ungleichlaufenden Entsprechen gleichseitig liegender Halbstrahlen entsteht eine Ellipse, und zwar als Kreis oder allgemeine Ellipse, je nachdem die senkrechten Tangenten ein Quadrat oder Rechteck bilden; beim gleichlaufenden Entsprechen entgegengesetzt liegender Halbstrahlen entsteht eine Hyperbel, und zwar als gleichseitige oder nicht gleichseitige ebenfalls je nach dem Abstand der Parallelen. Gleichlaufendes Entsprechen gleichseitig liegender Halbstrahlen oder ungleichlaufendes Entsprechen entgegengesetzt liegender Halbstrahlen ist überhaupt unmöglich.

büschel erhält man für die Kurven folgende Ergebnisse:

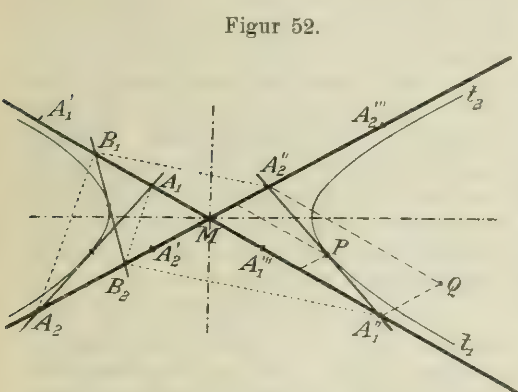
Satz 19. Durch ähnliche Punktreihen wird stets die Parabel als Tangentenkurve erzeugt, und diese liefert auf ihren Tangenten auch nur ähnliche Punktreihen (d. h. mit zugeordneten unendlich fernen Punkten). Durch gleichlaufende projektivische Strahlenbüschel mit einzigem Paar zugeordneter Parallelstrahlen wird die Parabel als Punktkurve erzeugt, und diese liefert in ihren Kurvenpunkten auch nur ebensolche Strahlenbüschel.

Satz 20. Durch zwei beliebige projektivische Punktreihen wird in bestimmt herzustellender Lage der Kreis als Tangentenkurve erzeugt, und dieser liefert auf seinen Tangenten stets projektivische Punktreihen, welche aus dem Mittelpunkt durch gleichlaufende kongruente Büschel projiziert werden. Durch gleichlaufende kongruente Büschel wird stets der Kreis als Punktkurve erzeugt, und dieser liefert in seinen Kurvenpunkten auch nur solche Büschel.

Satz 21. Durch zwei auf senkrechten Trägern liegende projektivische Punktreihen mit unendlich fernen Berührungspunkten oder durch zwei beliebige projektivische Punktreihen in bestimmt herzustellender Lage wird stets die gleichseitige Hyperbel als Tangentenkurve erzeugt; und diese liefert auf ihren Tangenten allgemeine projektivische Punktreihen. Durch ungleichlaufende kongruente Büschel wird stets die gleichseitige Hyperbel als Punktkurve erzeugt; und diese liefert in ihren Kurvenpunkten allgemeine projektivische Büschel mit zwei Paaren zugeordneter Parallelstrahlen (insbesondere in Punkten mit parallelen Tangenten kongruente ungleichlaufende Büschel).

Frage 48. Welche Masseigenschaften ergeben sich für die Asymptoten der Hyperbel?

Figur 52.

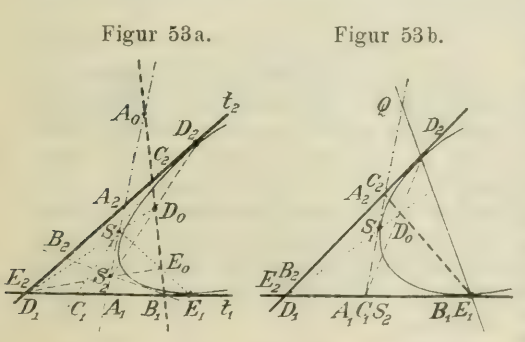


Erkl. 164. In Figur 52 sind links die Tangenten $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ dargestellt, für welche:

$$MA_1 \cdot MA_2 = MB_1 \cdot MB_2.$$

Das Produkt $MA_1 \cdot MA_2$ kann aber mittels derselben beiden Längen MA_1 und MA_2 nicht weniger als viermal im spitzen (und ebenso oft im stumpfen) Winkel der Träger $t_1 t_2$ dargestellt werden. Denn die vier Punkte A_1, A_2', A_2'', A_1''' haben gleichen Abstand von M, und ebenso A_2, A_1', A_1'', A_2'''. Es sind daher die vier Geraden $A_1 A_2$, $A_1' A_2'$, $A_1'' A_2''$, $A_1''' A_2'''$ Tangenten an dieselbe Hyperbel, welche im spitzen Winkel der Asymptoten $t_1 t_2$ liegt. (Ebenso wären $A_1 A_2'''$, $A_1' A_2''$, $A_2' A_1''$, $A_1''' A_2$ Tangenten an dieselbe zweite Hyperbel, welche im stumpfen Winkel der Asymptoten $t_1 t_2$ liegt: Man nennt dieselbe die konjugierte Hyperbel zur vorigen.)

Figur 53a. Figur 53b.



Erkl. 165. Figur 53a bildet eine Wiederholung der Figur 29, bloss in abgeänderter gegenseitiger Lage der Elemente, so dass daraus unmittelbar die Figur 53b entstehen kann; und diese liefert die Hyperbelerzeugung, wenn man D_2 und E_1 ins Unendliche rücken lässt. Werden nämlich in Figur 53a die Tangenten $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ längs der Kurve so verschoben, dass $B_1 B_2$ in den Träger t_1, $C_1 C_2$ in die Tan-

Antwort. 1. Da die Asymptoten Tangenten mit unendlich fernen Berührungspunkten sind, so fallen bei ihnen, wie schon in Figur 41b und Erkl. 136 gezeigt wurde, die Elementenpaare E, F und D, G zusammen: der Schnittpunkt der Träger vereinigt in sich die Fluchtpunkte beider Träger. Es legt sich daher nahe, den Satz 7 des I. Teiles auf die erzeugenden Punktreihen der Hyperbel anzuwenden, wonach in projektivischen Punktreihen stets Gleichheit besteht zwischen den Produkten aus den Abständen je zweier entsprechenden Punkte von den zugehörigen Fluchtpunkten ihrer Reihe. In Figur 52 hat hiernach — wenn man für den die Elemente $D_1 = G_1 = E_2 = F_2$ in sich vereinigenden Asymptotenschnittpunkt den Buchstaben M setzt — das Produkt:

$$MA_1 \cdot MA_2 = MB_1 \cdot MB_2 \text{ u. s. w.}$$

für jedes Paar entsprechender Punkte $A_1 A_2$ oder $B_1 B_2$ u. s. w. einen konstanten Wert. Man nennt ihn nicht nur Potenz der projektivischen Beziehung der auf den Asymptoten liegenden Punktreihen, sondern auch die Potenz der Hyperbel. Und dabei sind $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ nichts anderes, als die Schnittpunkte der beliebigen Tangenten mit den Asymptoten.

2. Benutzt man ferner die Schlussbemerkung der Erkl. 126, dass der Berührungspunkt einer Tangente vierter harmonischer Punkt ist zu ihrem Schnittpunkt mit den Berührungssehnen der Träger (vergl. Erkl. 165), so sieht man, dass für die Asymptoten als Träger die letztere Gerade $D_2 E_1$ ins Unendliche fällt, also ebenso auch der zugeordnete harmonische Punkt zum Berührungspunkt auf einer beliebigen Tangente, und dass somit dieser Berührungspunkt selbst Mittelpunkt des Tangentenabschnitts zwischen den Asymptoten ist auf jeder der Tangenten $A_1'' A_2''$ oder $A_1 A_2$ oder $B_1 B_2$ (siehe Figur 52).

3. Hieraus ergibt sich aber für die allgemeine Hyperbel — sowohl in der Auffassung als Tangentengebilde wie auch als Punktgebilde — die Eigen-

gente $A_1 A_2$ hineinfällt, so müssen die Geraden $E_2 S_1 D_0$, $B_1 D_0 C_2$, $S_2 D_0 D_2$ in jeder Lage doch stets durch einen gemeinsamen Punkt D_0 hindurchgehen. Wenn aber $B_1 B_2$ in t_2 fällt, so wird B_2 in E_2, S_2 in A_1 und B_1 in E_1 fallen müssen, weil ja der Schnittpunkt zweier zusammenfallenden Tangenten der Berührungspunkt ist. Ebenso wird beim Zusammenfallen von $C_1 C_2$ mit $A_1 A_2$ Punkt C_1 zu A_1, C_2 zu A_2, S_1 zum Berührungspunkt der Tangente $A_1 A_2$. Dadurch werden die obigen drei Geraden $E_2 S_1 D_0$, $B_1 D_0 C_2$, $S_2 D_0 D_2$ der Reihe nach zu $E_2 S_1 D_0$, $E_1 D_0 A_2$, $A_1 D_0 D_2$, wie in Figur 53b. Man kann daher t_1, $A_1 D_2$ und t_2, $A_2 E_1$ je als zwei Gegenseiten eines Vierecks ansehen, dessen Diagonalen $E_2 D_0$ und $E_1 D_2$ die Punkte S_1 und Q als zugeordnete harmonische zu $A_1 A_2$ ausschneiden. Bei der Hyperbel fallen nun $E_1 D_2$ ins Unendliche, folglich auch Q unendlich fern, und Berührungspunkt S wird Mittelpunkt zwischen A_1 und A_2.

Erkl. 166. In den Antworten auf die Fragen 211 und 212 im III. Teile der Ebenen Elementar-Geometrie von Kleyer-Sachs findet man als besondern Fall einer allgemeinen Beziehung folgenden Satz nachgewiesen:

„Ist eine Figur achsig-symmetrisch in Bezug auf zwei zu einander senkrechte Achsen, so ist sie auch centrisch-symmetrisch in Bezug auf den Schnittpunkt der Achsen als Symmetriecentrum.“

Erkl. 167. Man beachte wohl, wie die metrische Behandlung sich auf die einzelnen Kurven anwenden lässt. In der Antwort auf Frage 43 wurde für die Parabel die Symmetrie für eine Achse gefunden; Kreis und gleichseitige Hyperbel zeigten durch ihre Entstehung als Punktgebilde ebenfalls die symmetrischen Beziehungen. Hier aber werden für die ganz allgemeine Hyperbel — und zwar nur durch die Eigenschaften der Asymptoten — die symmetrischen Eigenschaften gefunden, während für die Ellipse noch keinerlei Symmetrie nachgewiesen wird. Dass diese Masseigenschaften für alle drei Kurven übrigens auch auf dem Wege der projektivischen Geometrie allein gefunden werden können, zeigt die Anwendung der Polaritätseigenschaften auf die unendlich fernen Elemente im nächsten Bande dieses Lehrbuches. Es bedarf ferner kaum des Hinweises, dass bei rechtwinkliger Lage der Asymptoten die sämtlichen Ergebnisse nebenstehender Antwort auch für die gleichseitige Hyperbel in Geltung bleiben.

Erkl. 168. Besondere Hervorhebung verdient noch der Umstand, dass durch die Anwendung desselben Satzes von der Produktengleichheit der durch die Tangenten gebildeten Asymptotenabschnitte die Erzeugung der Hyperbel auf beide Arten, sowohl als Tangenten-schaft der achsigen Symmetrie gegen die beiden Winkelhalbierenden der Asymptoten sowie der centrischen Symmetrie gegen den Asymptotenschnittpunkt als Mittelpunkt. Denn die Abschnitte MA_1, MA_2 von je gleichgrossem Produkt liegen in entsprechend gleichen Abständen vom Schnittpunkt, folglich liegen auch alle Tangenten symmetrisch, und aus gleichem Grunde liegen auch alle Mittelpunkte der symmetrisch liegenden Tangenten in gleichen Abständen auf derselben Geraden durch M.

4. Die gleichen Produkte der Abschnitte $MA_1 \cdot MA_2$ finden ihren geometrischen Ausdruck im Rechteck aus beiden Strecken. Da aber Flächen von Parallelogrammen und Dreiecken mit einem gleichbleibenden Winkel sich verhalten wie die Produkte der ihn einschliessenden Seiten, so sind auch die Dreiecke inhaltsgleich, welche von den veränderlichen Tangenten mit den festbleibenden Asymptoten gebildet werden, oder auch die Parallelogramme inhaltsgleich, welche die Asymptoten als zwei Seiten besitzen und entweder die veränderliche Tangente als Diagonale, oder deren Berührungspunkt als Gegenecke haben. Beide Eigenschaften sind sehr geeignet zur Konstruktion der Hyperbel.

5. Verbindet man endlich die Punkte $A_1 B_2$ und $A_2 B_1$ zweier Tangenten, so muss wegen $MA_1 \cdot MA_2 = MB_1 \cdot MB_2$ auch $MA_1 : MB_2 = MB_1 : MA_2$, also $A_1 B_2 \parallel A_2 B_1$ sein. Und hiernach kann man ebenfalls beliebige Tangenten (und Berührungspunkte) der Hyperbel erhalten, indem man durch die Schnittpunkte einer beliebigen Tangente mit den Asymptoten in beliebiger Richtung Parallele zeichnet.

6. Man erhält also folgende Massbeziehungen jeder Hyperbel:

Satz 22. Die Hyperbel hat (sowohl als Tangentengebilde wie als Punktgebilde) die beiden Winkelhalbierenden der Asymptoten zu Symmetrieachsen und den

gebilde, wie als Punktgebilde geliefert wird. Denn die Verbindungsgeraden der nach dem Gesetz $MA_1 \cdot MA_2 = MB_1 \cdot MB_2$ gebildeten Punkte auf den Asymptoten-Trägern erzeugen die Hyperbel als Tangentengebilde, und die Mittelpunkte dieser Verbindungsstrecken dieselbe Hyperbel gleichzeitig als Punktgebilde. Ja die Erzeugung kann sogar gleichzeitig für mehrere Hyperbeln in Anwendung gelangen: Nicht nur die Geraden wie $A_1''A_2''$ durch P bezw. deren Mittelpunkte (s. Figur 52) erzeugen eine Hyperbel, sondern auch deren Parallelen durch Q, oder deren Parallelen durch den Mittelpunkt von MP. Denn die ersteren Tangenten bilden ein konstantes Dreieck vom vierfachen Inhalt, letztere vom Viertel des Inhalts vom Dreieck MA_1A_2. Jeder Radiusvektor der ersteren Punkte Q ist das Doppelte, jeder der letzteren die Hälfte vom Radiusvektor der Punkte P — gemessen von M aus. Daher hat man auch die erstere wie die letztere Hyperbel mit der durch P gehenden als ähnlich anzusehen mit dem Grössenverhältnis:

$$\frac{1}{2} MP : MP : MQ = 1 : 2 : 4.$$

Asymptotenschnittpunkt als Symmetriecentrum. Die Rechtecke der von jeder beliebigen Tangente gebildeten Asymptotenabschnitte oder ebenso die von den Asymptoten mit einer veränderlichen Tangente gebildeten Dreiecke haben konstanten Inhalt. Der Berührungspunkt jeder Tangente ist der Mittelpunkt ihrer Asymptotenschnittpunkte. Die Verbindungsgeraden der Asymptotenschnittpunkte je zweier beliebigen Tangenten sind parallel.

Erkl. 169. Der Parallelismus der Verbindungsgeraden nicht zugeordneter Tangentenschnittpunkte gilt sowohl im Innenwinkel der Asymptoten, als in deren Scheitelwinkeln:

$$A_1B_2 \parallel A_2B_1 \text{ und } A_1''B_2 \parallel A_2''B_1.$$

Dass übrigens aus der Parallelität dieser Geraden die Konstanz des Dreiecksinhalts MAA_2 folgt, kann ausser der Proportion auch durch Figurenverwandlung gezeigt werden:

$$\triangle A_1B_2A_2 = A_1B_2B_1$$

wegen gleicher Grundseite A_1B_2 und Spitzen auf der Parallelen dazu. Folglich:

$$\triangle MA_1B_2 + A_1B_2A_2 = MA_1B_2 + A_1B_2B_1,$$

oder:

$$MA_1A_2 = MB_2B_1.$$

Beide Umstände finden einen Nachweis durch rein projektivische Beziehungen in Aufgabe 309 der Aufgabensammlung am Schluss dieses Teiles.

Erkl. 169a. Ein Ueberblick über die Ergebnisse dieses Abschnitts zeigt wieder den innigen Zusammenhang der Massbeziehungen mit den unendlich fernen Elementen: Ueber die Ellipse, welche keine unendlich fernen Elemente besitzt, findet man hier keinerlei metrische Beziehungen; mehr schon über die Parabel mit einzigem unendlich fernem Punkte bezw. unendlich ferner Tangente; am meisten Aufschlüsse ergeben sich über die Hyperbel mit ihren zwei unendlich fernen Punkten bezw. den in unendlich fernen Punkten berührenden Asymptoten. Endgültigen Aufschluss über die Masseigenschaften aller drei Kurven erhält man im folgenden Band dieses Lehrbuches durch Anwendung der Polaritätsbeziehungen — und zwar wieder auf die unendlich fernen Elemente.

---

c) Erzeugung der Kurven zweiten Grades als „Kegelschnitte."

Frage 49. Was versteht man unter einem Kegel, und was unter Kegelschnitt?

Antwort. 1. Unter einem Kegel versteht man hier die Gesamtheit der Elemente eines Strahlenbündels, durch welche irgend eine Kurve zweiten Grades aus dem Scheitel des Bündels projiziert wird. Der Kegel wird also gebildet durch eine Gesamtheit von Geraden durch den Scheitel des Bündels, wenn die „erzeugende Kurve" als Punktgebilde zweiter Ordnung gedacht wird,

Erkl. 170. In der elementaren Stereometrie wird als Erzeugende der Kegelfläche nur der Kreis verwendet, der dort überhaupt nur als Punktgebilde vorgestellt wird. Man erkennt, dass die nebenstehende Definition des Kegels diese vorige als einen ganz speziellen Einzelfall in sich begreift, nämlich gar nicht als Ebenenbüschel zweiter Klasse, sondern nur als Kegelfläche, und diese nicht in allgemeiner

Erzeugung durch Ellipse, Hyperbel, Parabel, sondern nur durch den Kreis.

Erkl. 171. In der projektivischen Geometrie bildet die nebenstehende Definition selbst nur eine spezielle Ausdrucksweise für die Entstehung des Kegels. Man versteht nämlich allgemein

a) unter einer Kegefläche zweiter Ordnung die Gesamtheit der Schnittgeraden je zweier zugeordneten Ebenen zweier projektivisch verwandten Ebenenbüschel mit schneidenden Achsen in schiefer Lage;

b) unter einem Ebenenbüschel zweiter Klasse die Gesamtheit der Verbindungsebenen je zweier zugeordneten Strahlen zweier projektivisch verwandten Strahlenbüschel in verschiedenen Ebenen mit gemeinsamem Scheitel in schiefer Lage.

Durch Projektion auf eine Ebene bezw. aus einer Ebene in einen Bündel ist leicht einzusehen, dass diese und die nebenstehenden Definitionen im Grunde Gleiches besagen.

dagegen durch eine Gesamtheit von Ebenen durch den Scheitel des Bündels, wenn die „erzeugende Kurve“ als Tangentengebilde zweiter Klasse gedacht wird. Im ersten Falle nennt man den Kegel auch Kegelfläche zweiter Ordnung, im zweiten Falle Ebenenbüschel zweiter Klasse.

2. Befindet sich der Scheitel des projizierenden Bündels unendlich fern, so wird der Kegel zu einem Cylinder.

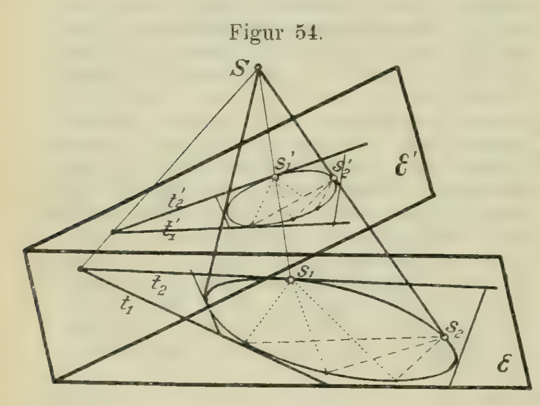
3. Ein Kegelschnitt heisst die beim Schnitt eines Kegels (oder Cylinders) durch eine Ebene in dieser Schnittebene entstehende Kurve.

Frage 50. Welche Beziehung besteht zwischen dem Kegelschnitt und der erzeugenden Kurve des Kegels?

Antwort. 1. Da jeder Punkt der erzeugenden Kurve auch wieder als Punkt auf die Schnittebene projiziert oder abgebildet wird, und jede Gerade der erzeugenden Kurve als Gerade, so nennt man auch die Schnittebene Bildebene und die in der Schnittebene entstehende Kurve die Abbildung der erzeugenden Kurve oder die Bildkurve, die erzeugende Kurve des Kegels dagegen die Originalkurve, ihre Ebene die Originalebene.

2. Da jede Punktreihe wieder als eine Punktreihe und jeder Strahlenbüschel wieder als ein Strahlenbüschel projiziert wird, so muss die Bildkurve auch eine Ordnungskurve sein, wenn die Originalkurve eine Ordnungskurve ist, und eine Klassenkurve, wenn die Originalkurve eine Klassenkurve ist.

Figur 54.



Erkl. 172. In Figur 54 ist ein einfachster Fall dargestellt: Man kann ε als Originalebene und ε' als Bildebene wählen, oder ε' als Originalebene und ε als Bildebene. In jedem Falle werden die erzeugenden Strahlenbüschel S_1 und S_2 einer Kurve wieder als erzeugende Strahlenbüschel $S_1 S_2$ einer andern Kurve abgebildet, die erzeugenden Punktreihen $t_1 t_2$ einer Kurve auch als erzeugende Punktreihen $t_1 t_2$ der entstehenden Bildkurve. Es bleiben also bei der Projektion alle diejenigen der bisher abgehandelten Eigenschaften auch in der gegenseitigen Beziehung beider Kurven erhalten, die nicht mit metrischen Beziehungen verknüpft sind.

Frage 51. Von welchen Umständen ist die Gattung der Bildkurve abhängig?

Antwort. 1. Da die Gattung einer Kurve nur abhängig ist von ihrer Beziehung zur unendlich fernen Geraden so ist die Gattung eines Kegelschnitts abhängig von der Beziehung der Originalkurve zu derjenigen Geraden ihrer Ebene, welche in der Bildebene zur unendlich fernen Geraden wird. Diese ist aber die Gegenachse oder Fluchtgerade in der Originalebene. Und die Beziehung der Originalkurve zur Gegenachse in ihrer Ebene bestimmt demnach die Gattung der Bildkurve.

2. Liegt nämlich die Bildebene so, dass die Originalkurve als Ordnungskurve — sie sei Ellipse oder Parabel oder Hyperbel — mit der Gegenachse in ihrer Ebene keinen, einen oder zwei Punkte gemeinsam hat, so hat auch die Bildkurve mit der unendlich fernen Geraden in ihrer Ebene keinen, einen oder zwei Punkte gemeinsam, d. h. sie ist Ellipse, Parabel oder Hyperbel.

3. Das gleiche Ergebnis erhält man bei Auffassung der Originalkurve als Klassenkurve — sie sei Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Ist für dieselbe die Gegenachse in ihrer Ebene eine ausserhalb verlaufende Gerade, eine Tangente oder Sekante, so ist auch für die Bildkurve die unendlich ferne Gerade eine ausserhalb verlaufende Gerade, eine Tangente oder Sekante, d. h. die Bildkurve wird Ellipse, Parabel oder Hyperbel.

Erkl. 173. In nebenstehender Antwort ist stets angenommen, dass die Schnittebene nicht durch den Scheitel des Kegels selbst hindurchgeht. Trifft dieser Umstand zu, so hat man in den drei nebenstehenden Fällen statt Ellipse, Parabel, Hyperbel der Reihe nach einen Punkt (den Scheitelpunkt), eine einzige Gerade (die Kegelkante) oder zwei gerade Linien (zwei Kegelkanten) als Kegelschnitt anzusehen. Vergl. die ausgearteten Kurven in Antw. der Frage 41 und Erkl. 143.

Erkl. 174. Wird als Schnittebene die unendlich ferne Ebene selbst gewählt, so kann sie jedenfalls mit der Originalebene als parallel angesehen werden, und die entstehende, selbst im Unendlichen liegende Bildkurve ist von gleicher Gattung wie die erzeugende Originalkurve des Kegels. — Hat man statt des Kegels einen Cylinder, so ist die Bildkurve jedenfalls auch nur von gleicher Gattung wie die den Kegel erzeugende Originalkurve, weil bei unendlich fernem Projektionsscheitel die Gegenachsen beide ins Unendliche fallen, also die Beziehung beider Kurven zur Gegenachse oder unendlich fernen Geraden dieselbe werden muss.

Erkl. 175. Da die Gegenachse in der Originalebene ausgeschnitten wird durch diejenige Parallelebene zur Bildebene, welche durch den Kegelscheitel geht, so kann man auch sagen, der Kegelschnitt wird Ellipse oder Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Kegel mit der durch seinen Scheitel gehenden Parallelebene zur Schnittebene keinen oder einen oder zwei Strahlen gemeinsam habe. Denn diese keine, ein oder zwei Strahlen treffen ja diejenigen Punkte der Originalkurve, welche in der Gegenachse liegen, also ins Unendliche projiziert werden.

Frage 52. Welche Zusammenstellungen von Original- und Bildkurven können demnach auftreten und unter welchen Bedingungen?

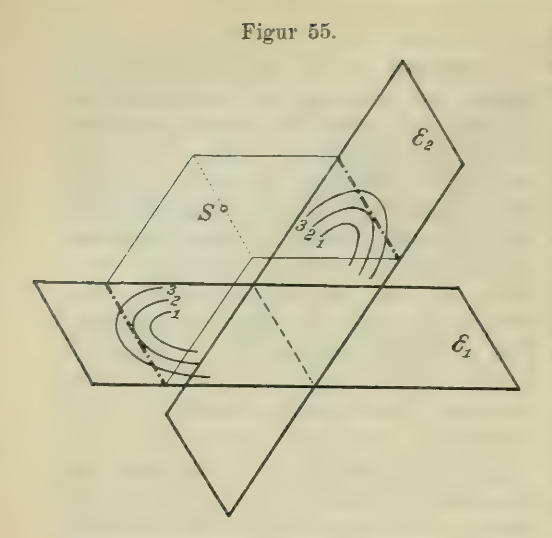
Antwort. Es gibt nach der vorigen Ueberlegung folgende sechs Zusammenstellungen von Original- und Bildkurven:

1. Ellipse projiziert als Ellipse (vgl. Figur 54): keine der beiden Kurven wird von der Gegenachse in ihrer Ebene getroffen.

2. Ellipse projiziert als Parabel oder umgekehrt Parabel als Ellipse:

Erkl. 176. Man erkennt aus nebenstehender Antwort, dass es für die Gattung der Bildkurve gänzlich gleichgültig ist, was für eine Kurve als Originalkurve auftritt. Dies ist auch zu ersehen aus Figur 55. Mag man aus Ebene ε_1 auf ε_2 projizieren oder aus ε_2 auf ε_1, stets wird eine Kurve 1 als Originalkurve eine Ellipse als Bildkurve erzeugen — mag

Figur 55.



nun 1 ein Stück einer Ellipse oder einer Parabel oder einer Hyperbel sein (von welch letzterer der zweite Ast ganz auf der andern Seite der Gegenachse liegen muss). Ebenso mag 2 in Ebene ε_1 oder ε_2 ein Stück einer Ellipse oder Parabel oder Hyperbel sein — stets wird ihr Abbild in der andern Ebene eine Parabel werden, weil dies Bild eine Kurve gibt, die den einzigen Berührungspunkt der Gegenachse als unendlich fernen Punkt erhält. — Und endlich kann die Kurve 3 in Ebene ε_1 oder ε_2 der Figur 55 ein Stück einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel bedeuten, jedesmal wird die Bildkurve Hyperbel werden, nämlich eine Kurve, welche die Projektionen der beiden Schnittpunkte der Originalkurve mit der Gegenachse als unendlich ferne Punkte hat. Dabei sind selbstverständlich in Figur 55 keineswegs die Kurvenstücke 1, 2, 3 beider Ebenen gegenseitige Projektionen.

die Ellipse wird von ihrer Gegenachse in einem Punkte berührt, die Parabel aber von der ihrigen gar nicht getroffen.

3. Ellipse projiziert als Hyperbel oder umgekehrt Hyperbel als Ellipse: die Ellipse wird von ihrer Gegenachse in zwei Punkten geschnitten, die Hyperbel von der ihrigen gar nicht getroffen.

4. Parabel projiziert als Parabel: jede der beiden Kurven hat die Gegenachse in ihrer Ebene als Tangente.

5. Parabel projiziert als Hyperbel oder umgekehrt Hyperbel als Parabel: die Parabel wird von ihrer Gegenachse in zwei Punkten geschnitten, die Hyperbel von ihrer Gegenachse berührt.

6. Hyperbel projiziert als Hyperbel: jede der beiden Kurven wird von der Gegenachse in ihrer Ebene in zwei Punkten geschnitten.

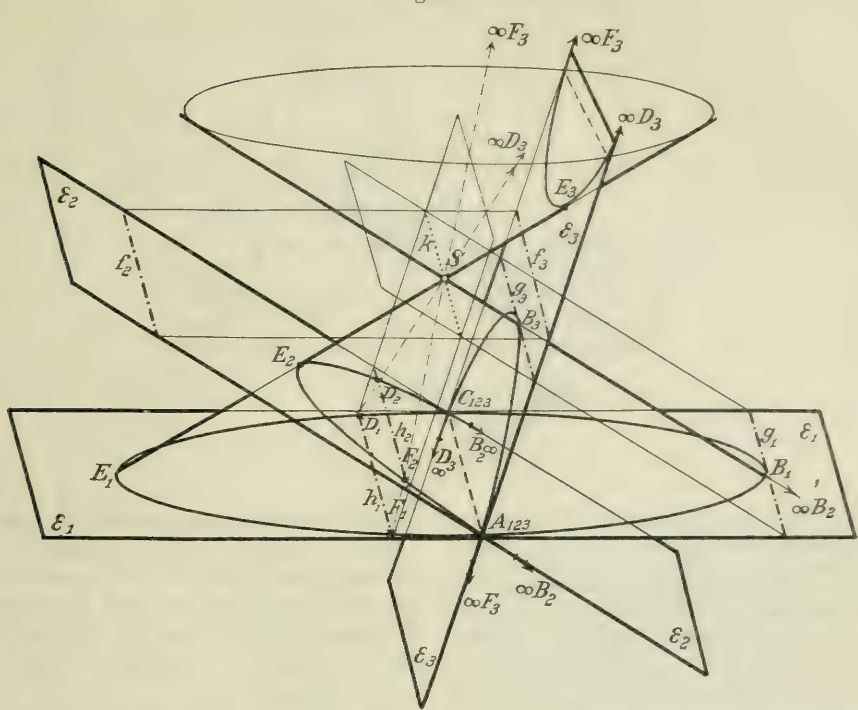
Erkl. 177. In Figur 56 ist an einer einzigen Zeichnung das Zusammentreffen der drei Paare ungleicher Kurven in perspektivischer Lage gezeigt: in ε_1 eine Ellipse, in ε_2 eine Parabel, in ε_3 eine Hyperbel. Da alle drei Ebenen durch dieselbe Kante AC gehen, so muss selbstverständlich, wenn eine der drei Kurven Punkte der Kante enthält, jede der Kurven durch dieselben Punkte der Kante hindurchgehen. Die Gegenachsen entsprechen als f_2 und f_3 der unendlich fernen Geraden f_1, als g_1 und g_3 der unendlich fernen Geraden g_2, als h_1 und h_2 der unendlich fernen Geraden h_3 — je in der Ebene mit gleicher Ziffer. Hiernach hat man auf jeder der drei Kurven die einander zugeordneten Punkte in derselben Reihenfolge zu durchlaufen, wie dies in einer derselben stattfindet. So hat man der Reihe nach als entsprechende Kurvenstücke:

1. ***AB:*** auf der Ellipse als A_1B_1 vom gemeinsamen Punkte A_{123} bis zum Berührungspunkt B_1 mit der Gegenachse g_1; auf der Parabel als A_2B_2 vom Punkt A auf dem vorderen Kurvenbogen zum unendlich fernen Punkt B_2; auf der Hyperbel als A_3B_3 von A bis zum Berührungspunkt B_3 mit der Gegenachse g_3.

2. ***BC:*** auf der Ellipse als B_1C_1 vom Berührungspunkt B_1 mit der Gegenachse g_1 bis zum gemeinsamen Punkte C_{123}; auf der Parabel als B_2C_2 vom unendlich fernen Punkte B_2 auf der hinteren Hälfte des Kurvenbogens wieder ins Endliche herein bis C; auf der Hyperbel als B_3C_3 vom Berührungspunkt B_3 mit der Gegenachse g_3 bis C.

3. ***CD:*** auf der Ellipse als C_1D_1 vom gemeinsamen Punkt C_{123} bis zum Schnittpunkt D_1 mit der Gegenachse h_1; auf der Parabel als C_2D_2 von C bis zum Schnittpunkt D_2 mit

Figur 56.



der Gegenachse h_2; auf der Hyperbel als C_3D_3 von C auf dem hinteren Bogen des unteren Astes hinab bis zum unendlich fernen Punkt D_3.

4. ***DEF:*** auf der Ellipse als $D_1E_1F_1$ vom einen Schnittpunkt D_1 mit der Gegenachse h_1 über Punkt E_1 zum andern Schnittpunkt F_1 mit derselben Gegenachse h_1: auf der Parabel als $D_2E_2F_2$ ebenso von einem Schnittpunkt D_2 mit der Gegenachse h_2 über Punkt E_2 zum andern Schnittpunkt F_2 mit derselben Gegenachse h_2; auf der Hyperbel als $D_3E_3F_3$ von dem vorhin nach unten erreichten unendlich fernen Punkte D_3 auf entgegengesetzter Seite von oben herab ins Endliche zurück und auf dem vorderen Bogen des oberen Astes bis E_3, und von da auf dem hinteren Bogen des obern Astes wieder hinauf ins Unendliche zum Punkt F_3.

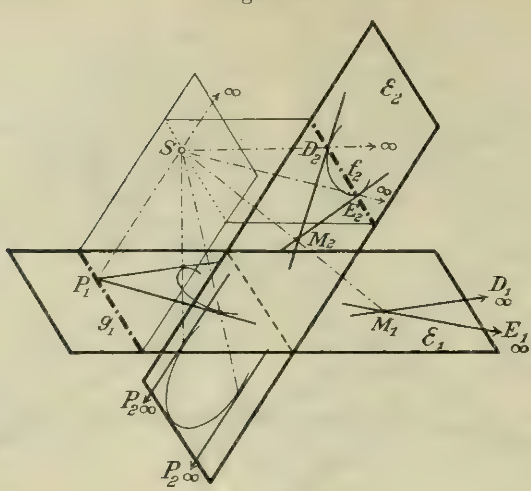
5. ***FA:*** auf der Ellipse als F_1A_1 vom Schnittpunkt F_1 mit der Gegenachse h_1 zum gemeinsamen Punkt A_{123}; auf der Parabel als F_2A_2 vom Schnittpunkt F_2 mit der Gegenachse h_2 zum Punkte A: auf der Hyperbel als F_3A_3 vom unendlich fernen Punkte F_3 auf dem vorderen Kurvenbogen des unteren Astes wieder herauf und zurück ins Endliche bis A.

Frage 53. Welche Einzelheiten zeigen die auf der Gegenachse liegenden Elemente bei der Projektion von Kurven?

Erkl. 178. Der Einfachheit der Zeichnung wegen ist in Figur 57 für den ersten Fall nebenstehender Antwort die Ebene ε_1 als Originalebene, ε_2 als Bildebene verwendet, im dritten Falle ε_2 als Originalebene, ε_1 als Bildebene. — Im zweiten Falle, wo die Gegenachse Tangente der Originalkurve ist, gibt es von jedem Punkt der Gegenachse ausser dieser noch eine einzige Tangente an die Kurve, und daher auch an die Parabel keine parallelen Tangenten, weil jede Tangente als parallel zur unendlich fernen anzusehen ist.

Antwort. 1. Wenn in der Originalebene (ε_1 in Figur 57 links) die Gegenachse g_1 ausserhalb der Kurve liegt, so gibt es von jedem Punkt der Gegenachse zwei Tangenten an die Originalkurve, folglich müssen die entsprechenden Tangenten an die Ellipse in der Bildebene (ε_2 Figur 57 unten) in einem unendlich fernen Punkte zusammentreffen, also parallel sein.

Figur 57.



Erkl. 179. Die Entstehung der Hyperbel als Projektion einer Kurve, die von der Gegenachse geschnitten wird, ist geeignet, die Beziehung zwischen Hyperbel und der unendlich fernen Geraden in deutliches Licht zu setzen: Wie von der Gegenachse ein Teil innerhalb, ein Teil ausserhalb der Originalkurve liegt, so liegt von der unendlich fernen Geraden ein Teil innerhalb und ein Teil ausserhalb der Hyperbel. Von den Punkten der Gegenachse, die ausserhalb bezw. auf oder innerhalb der Kurve liegen, gibt es zwei bezw. eine oder keine Tangenten an die Originalkurve; und dabei sind beide Geradenstücke getrennt durch die Tangenten in den Berührungspunkten, in deren jeder zwei von den vorher getrennt vorhandenen Tangenten aus den äusseren Punkten der Gegenachse zusammenfallen. Ebenso wird die unendlich ferne Gerade bei der Hyperbel durch die Asymptoten in zwei Teile getrennt: von dem ausserhalb der Hyperbel liegenden gibt es zwei parallele Tangenten (an die beiden Aeste der Hyperbel), von den innerhalb liegenden gar keine Tangenten: die Asymptoten selbst sind als je ein Paar zusammenfallender paralleler Tangenten anzusehen, indem sie den einen Ast etwa oben links und gleichzeitig den andern unten rechts berühren.

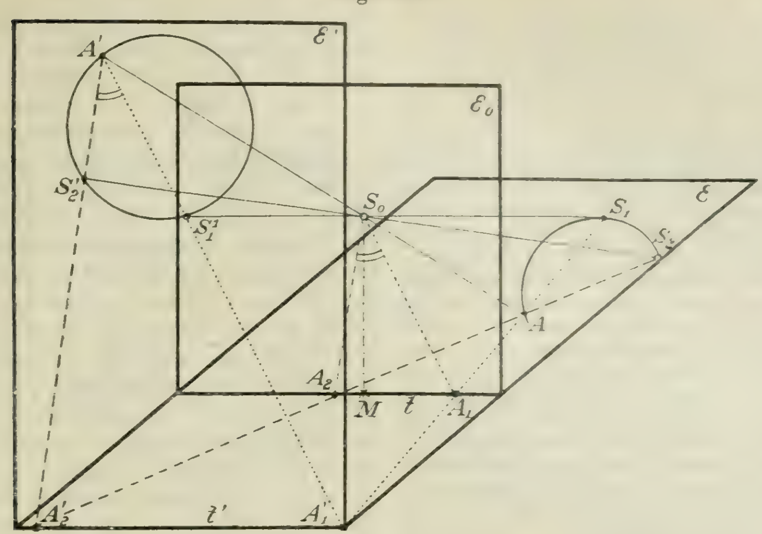
2. Wenn die Gegenachse die Originalkurve berührt, so ist jedesmal die Abbildung eine Parabel, wie schon oben erwähnt; und von einem Punkte der Gegenachse gibt es an die Originalkurve nur noch eine Tangente ausser der Achse selbst.

3. Wenn in der Originalebene (ε_2 in Figur 57 oben) die Gegenachse die Kurve schneidet, so haben die zwei Schnittpunkte $D_2 E_2$ zwei Tangenten und als deren Schnittpunkt einen Punkt M_2. In der Bildkurve fallen die Berührungspunkte dieser Tangenten ins Unendliche, also werden die zugeordneten Tangenten zu Asymptoten der Hyperbel, und der Schnittpunkt M_1 wird zum Mittelpunkt der Kurve (nach Satz 22). — Von den ausserhalb der Originalkurve liegenden Punkten der Gegenachse gibt es zwei Tangenten an die beiderseitigen Teile der Kurve: diese werden zu parallelen Tangenten an die beiden getrennten Aeste der Hyperbel in der Bildebene.

Frage 54. In welcher Beziehung zu den bisherigen Erörterungen stehen der Kreis und der Kreiskegel?

Antwort. 1. Da der Kreis nach Satz 20 ebenfalls zu den Kurven zweiten Grades gehört, so kann auch der Kreis als Ellipse, Parabel oder Hyperbel projiziert werden — bezw. der Kreiskegel in einer Ellipse, Parabel oder

Figur 58.



Erkl. 180. In der elementaren Stereometrie wird nach dem Vorgang der antiken Geometrie überhaupt nur vom Kreiskegel als Kegel gehandelt, und zwar auch da meist nur der senkrechte Kreiskegel in Betracht gezogen. Durch Schneidung des letzteren mit beliebiger Ebene entstehen die Kurven zweiten Grades als eigentliche „Kegelschnitte" in der alten Bedeutung dieses Wortes; und auf Grund dieser Entstehungsweise haben die Alten auch die ihnen bekannten Eigenschaften der Kurven gefunden. Man sieht, dass dieser Gedankengang einen ganz speziellen Teil der vorliegenden allgemeinen Betrachtungsweise der neueren Geometrie bildet.

Erkl. 181. Eigenschaften der Figuren am Kreise, welche besonders geeignet sind, um durch die Methode der Projektion in Eigenschaften der Kurven zweiten Grades umgesetzt zu werden, sind die Beziehungen des Kreises zur Gegenachse in seiner Ebene, ein- und umgeschriebene Dreiecke und Vierecke, die Lehre von Pol und Polare (siehe Kleyer-Sachs, Ebene Elementar-Geometrie, VIII. Teil, 6a), sowie die Sätze von Pascal und Brianchon (siehe Kleyer-Sachs, Ebene Elementar-Geometrie, VIII. Teil, 6c). Wie die Antworten der Fragen 44 und 46 anzeigen, kann man auch die Eigenschaften der projektivischen Grundgebilde am Kreise aufstellen und auf die als „Kegelschnitte" erzeugten Kurven übertragen, ohne diese selbständig aus jenen Gebilden entstehen zu lassen. Es war Steiners Verdienst, durch Zugrundelegung der projektivischen Eigenschaften die neuere Geometrie der Abhängigkeit von der Planimetrie zu entledigen und auf eigene Füsse zu stellen (1833).

Hyperbel geschnitten werden, je nachdem die Gegenachse in der Originalebene den Kreis nicht trifft, berührt oder schneidet.

2. Man kann daher die Lehre von Ellipse, Parabel, Hyperbel auch durch blosse Projektion des Kreises aufbauen, indem man am Kreise solche Eigenschaften aufstellt, die bloss durch die gegenseitige Lage von Punkten und Geraden bedingt sind, und diese durch Projektion auf die anderen Kurven überträgt. Diese Art der Entwicklung bietet Gelegenheit, die projektivische Geometrie als eine Weiterführung der Planimetrie erscheinen zu lassen.

3. Dass aber von den Kurven zweiten Grades bei dieser Auffassung nicht etwa nur ein begrenzter Teil, sondern die ganze Gesamtheit erhalten wird, muss erst bewiesen werden. Dieses geschieht durch den Nachweis, dass jede Kurve zweiten Grades, die nach der allgemeinen Bestimmungsweise entstanden ist, auch wirklich als Projektion eines Kreises entstehen kann, oder umgekehrt selbst als Kreis projiziert werden kann.

Um diesen Beweis zu führen, nehme man eine beliebige Kurve, entstanden als Punktgebilde durch zwei projektivische Strahlenbüschel mit Scheiteln $S_1 S_2$

Erkl. 182. In der Figur 58 sind eine ganze Reihe von Willkürlichkeiten, denen nur eine geringe Zahl von Einschränkungen gegenüberstehen: So darf das Kurvenstück S_2S_1A in ε einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel angehören; und die Büschelscheitel S_1S_2 haben ganz beliebige Lage auf der Kurve; nur müssen sie, wenn letztere eine Hyperbel ist, auf demselben Kurvenaste liegen, weil auf t jedenfalls zwei gleichlaufende Punktreihen entstehen müssen, um die Projektion durch kongruente Büschel zu ermöglichen. — Die Gerade t hat ganz beliebige Lage, darf aber nur ganz ausserhalb der Kurve verlaufen, weil sonst die Punktreihen Doppelpunkte erhalten würden, und nur Reihen ohne Doppelpunkte durch kongruente Büschel projiziert werden können. — Die Ebene ε_0 ist durch t völlig beliebig zu legen. In der Figur ist sie parallel der Zeichenebene des Buches gewählt, damit der Kreis in ε' auch in der Zeichnung wirklich als Kreis erscheint. — Die Ebene ε' kann in beliebigem Bereiche die Projektionsstrahlen S_0S_1 oder S_0S_2 durchschneiden: z. B. in der Verlängerung über S_0 (wie in Figur 58) oder zwischen S_0 und S_1 oder in der Verlängerung über S_1 hinaus.

Erkl. 183. Wenn die Kurve S_1S_2A in Ebene ε eine Hyperbel ist, so muss nach vorigem die Gerade t zwischen deren beiden Aesten hindurchlaufen. Während demnach die Originalkurve die Gerade t keinenfalls treffen darf, kann sie ganz wohl die Gerade $A_1'A_2'$ treffen; dann geht der Kreis durch dieselben beiden Punkte dieser Geraden und liegt teils oberhalb, teils unterhalb der Ebene ε. Die Gerade t ist eben die Gegenachse zur Bildebene ε' in der Originalebene ε, und diese darf die Originalkurve sicher nicht treffen (weder schneiden, noch berühren), wenn dieselbe als Kreis, d. h. als eine Ellipse abgebildet werden soll. (Würden die Geraden t und t' beide zwischen den Hyperbelästen hindurchlaufen, so liegen die den beiden Kurvenästen der Hyperbel entsprechenden Bogenstücke des Kreises beiderseits der Gegenachse in ε', welche ausgeschnitten wird durch eine Parallelebene zu ε durch den Punkt S_0.)

Erkl. 184. Denkt man sich in Figur 58 die Senkrechte MS_0 um die Gerade t als Achse gedreht, so beschreibt Punkt S_0 einen Kreis mit Radius MS_0, dessen Ebene senkrecht auf t steht. Da die Beziehung des Punktes S_0 zur Geraden t dabei ungeändert bleibt, indem sich die Grösse des Winkels $A_1S_0A_2$ nicht ändert, so bildet dieser Kreis den geometrischen Ort für den Punkt S_0 in allen verschieden möglichen Ebenen ε_0, die man durch dieselbe Gerade t hindurchlegt, denn jedesmal entsteht in der Ebene $\varepsilon' \parallel \varepsilon_0$ die Kreisabbildung. Man gelangt dadurch zu der Aufstellung:

Satz. Jede beliebige Kurve zweiten Grades kann in vielfacher Weise als Schnitt eines Kreiskegels dar-

in der Ebene ε (siehe Figur 58). Durch eine ganz ausserhalb der Kurve verlaufende Gerade t der Ebene ε legt man nun eine beliebige andere Ebene ε_0. Dann erzeugen diese beiden Büschel S_1 und S_2 auf der Schnittgeraden t zwei projektivische Punktreihen auf gemeinsamem Träger, die keine gemeinsamen Punkte besitzen (weil die Kurve und der Träger t keinen gemeinsamen Punkt haben); und nach dem Satze in Erkl. 306 des I. Teiles dieses Lehrbuches gibt es daher in der Ebene ε_0 einen Punkt S_0, von welchem aus die beiden gleichlaufenden projektivischen Punktreihen des Trägers t durch kongruente, gleichlaufende und konzentrische Büschel projiziert werden. Ist also A, B, u. s. w. ein veränderlicher Punkt der Kurve in Ebene ε, so ist $\sphericalangle A_1S_0A_2$ gleich $\sphericalangle B_1S_0B_2$ u. s. w. für jedes beliebige Punktepaar A_1A_2, B_1B_2 u. s. w. auf t, welches einer veränderten Lage A, B, des Punktes auf der ursprünglichen Kurve entspricht.

Unter diesen Vorbedingungen wird nun die Originalkurve in ε auf jeder Parallelebene zu ε_0 als Kreis projiziert. Denn in Ebene ε' z. B. wird die Projektion von S_1A aus ε zur Geraden $S_1'A_1'$ und die von S_2A aus ε zu $S_2'A_1'$. Wegen der Parallelität von ε_0 und ε' wird auch:

$$S_1'A' \parallel S_0A_1 \text{ und } S_2'A' \parallel S_0A_2,$$

und daher wird auch der Winkel:

$$S_1'A'S_2' = A_1S_0A_2,$$

und der Winkel:

$$S_1'B'S_2' = B_1S_0B_2 \text{ u. s. w.}$$

Da aber in Ebene ε_0 alle Winkel wie $A_1S_0A_2$, $B_1S_0B_2$ gleichgross sein mussten, so müssen auch in Ebene ε' alle Winkel $S_1'A'S_2'$, $S_1'B'S_2'$ u. s. w. gleichgross sein, und demnach ist die in Ebene ε' entstehende Kurve erzeugt durch zwei kongruente gleichlaufende Strahlenbüschel $S_1'S_2'$, und folglich ein Kreis.

gestellt werden: für die Gegenachse kann jede die Kurve nicht treffende Gerade gewählt werden; und sodann für den Kegelscheitel noch ein beliebiger Punkt eines bestimmten Kreises.

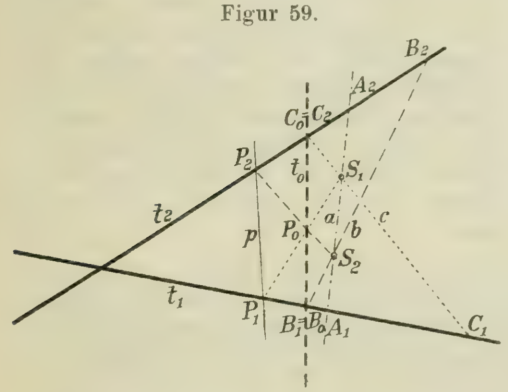
5. Ueber die Sätze von Brianchon und Pascal nebst ihren Anwendungen.

Frage 55. Was folgt aus der Art und Weise, wie in den Antworten der Fragen 28 und 32 zu einem beliebigen Element eines Gebildes das entsprechende Element des projektivisch verwandten Gebildes gefunden wurde?

Antwort.

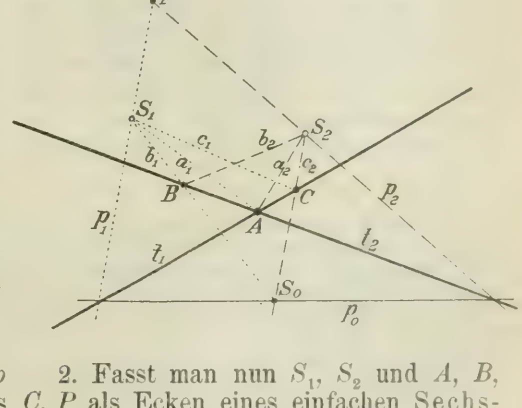
1. Wo immer auf t_1 in Figur 59 der Punkt P_1 gewählt wird, hat der entsprechende Punkt P_2 auf t_2 jedesmal solche Lage, dass die Verbindungsgeraden S_1P_1 und S_2P_2 durch denselben Punkt P_0 auf der Geraden t_0 hindurchgehen, oder dass die drei Geraden B_1C_2, S_1P_1, S_2P_2 durch einen und denselben Punkt gehen.

Figur 59.



1. Wie immer durch S_1 in Figur 60 der Strahl p_1 gewählt wird, hat der entsprechende Strahl p_2 durch S_2 jedesmal solche Lage, dass die Schnittpunkte (t_1p_1) und (t_2p_2) auf derselben Geraden p_0 durch den Punkt S_0 liegen, oder dass die drei Schnittpunkte (b_1c_2), (t_1p_1), (t_2p_2) auf einer und derselben Geraden liegen.

Figur 60.



2. Fasst man nun t_1, t_2 und a, b, c, p als Seiten eines einfachen Sechsseits zusammen, so sind B_1 und C_2, S_1 und P_1, S_2 und P_2 die drei Paare von Gegenecken desselben, und man erhält für jegliche Lage des veränderlichen Punktes P_1 bezw. der Verbindungsgeraden p das Ergebnis: In jedem Sechsseit, in welchem zwei Seiten Träger zweier projektivischen Punktreihen, die vier andern Seiten Verbindungsgeraden von vier Paaren entsprechender Punkte sind, gehen die drei Verbindungsgeraden je zweier Gegenecken durch einen und denselben Punkt.

2. Fasst man nun S_1, S_2 und A, B, C, P als Ecken eines einfachen Sechsecks zusammen, so sind b_1 und c_2, t_1 und p_1, t_2 und p_2 die drei Paare von Gegenseiten desselben, und man erhält für jegliche Lage des veränderlichen Strahles p_1 bezw. des Schnittpunktes P das Ergebnis: In jedem Sechseck, in welchem zwei Ecken Scheitel zweier projektivischen Strahlenbüschel, die vier andern Ecken Schnittpunkte von vier Paaren entsprechender Strahlen sind, liegen die drei Schnittpunkte je zweier Gegenseiten auf einer und derselben Geraden.

3. Nun sind aber nach den Sätzen 13 und 14 die sechs Seiten dieses Sechsseits Tangenten einer Kurve zweiter Klasse, und zwar nach Satz 16 von der Art, dass den beiden Trägern t_1 und t_2 keinerlei ausgezeichnete Stellung zukommt gegenüber den andern vier Seiten. Folglich kann die obige Aussage in der ganz allgemein gültigen Form ausgesprochen werden:

Satz 23. („Satz von Brianchon" fürs Sechsseit.) In jedem einer Kurve zweiter Klasse umgeschriebenen (einfachen) Sechsseit gehen die drei Verbindungsgeraden je zweier Gegenecken durch einen Punkt („Punkt des Brianchon").

4. Denselben Satz kann man auch — in anderer Ausdrucksweise — aussprechen von „jedem einfachen Sechsseit, welches durch sechs Strahlen eines Strahlenbüschels zweiter Klasse gebildet wird." Und umgekehrt bildet wegen der Eindeutigkeit der projektivischen Beziehungen derselbe Satz auch die Bedingung dafür, dass sechs Geraden einer Ebene Strahlen eines Büschels zweiter Klasse, bezw. Tangenten einer Kurve zweiter Klasse sind.

3. Nun sind aber nach den Sätzen 13a und 14a die sechs Ecken dieses Sechsecks Kurvenpunkte einer Kurve zweiter Ordnung, und zwar nach Satz 16a von der Art, dass den beiden Büschelscheiteln S_1 und S_2 keinerlei ausgezeichnete Stellung zukommt gegenüber den andern vier Ecken. Folglich kann die obige Aussage in der ganz allgemein gültigen Form ausgesprochen werden:

Satz 24. („Satz von Pascal" fürs Sechseck.) In jedem einer Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen (einfachen) Sechseck liegen die drei Schnittpunkte je zweier Gegenseiten auf einer Geraden („Pascalsche Gerade").

4. Denselben Satz kann man — in anderer Ausdrucksweise — auch aussprechen von „jedem einfachen Sechseck, welches durch sechs Punkte einer Punktreihe zweiter Ordnung gebildet wird." Und umgekehrt bildet wegen der Eindeutigkeit der projektivischen Beziehungen derselbe Satz auch die Bedingung dafür, dass sechs Punkte einer Ebene Punkte einer Punktreihe zweiter Ordnung bezw. Kurvenpunkte einer Kurve zweiter Ordnung sind.

Erkl. 185. Die Entwicklungen des vorliegenden Abschnittes haben in Bezug auf die beiderseitigen Entwicklungen aus Punktgebilden und Strahlengebilden genau gleichmässige Geltung und eignen sich daher besonders zur dualistischen Nebeneinanderstellung. Es bietet sich dadurch auch dem Studierenden die Gelegenheit, von einer der Antworten zuerst nur die Hälfte auf der einen Seite vorzunehmen und darnach die andere Hälfte selbstthätig aufzubauen, ohne das Gedruckte zu benutzen.

Erkl. 186. Von den vorstehenden Sätzen ist der eine, der Satz von Pascal, schon 1640 gefunden worden von Blaise Pascal (1623 bis 1662, der damals noch nicht 17 Jahre alt war), und zwar nach der Methode der Behandlung der Kegelschnitte durch Projektion aus dem Kreise, wie sie in Erkl. 181 vorgeführt wurde. — Der andere Satz wurde 1806 gefunden von Brianchon, nachdem seit 1799 durch Carnot der Begriff der Dualität Geltung gefunden hatte, und infolge dessen ein allgemeines Streben geweckt worden war, um früher bekannte Sätze auf ihre dualistische Uebertragbarkeit zu prüfen.

Erkl. 187. Statt zu sagen, sechs Gerade gehören einem Strahlenbüschel zweiter Klasse an bezw. sechs Punkte einer Punktreihe zweiter Ordnung, kann man auch sagen, das sechste Element gehört demselben Gebilde zweiten Grades an, wie die fünf ersten: denn durch fünf Elemente wird ja stets ein solches Gebilde bestimmt. Ist dann die Bedingung für das sechste Element in Bezug auf eines der aus den sechs Elementen zu bildenden einfachen Sechsecke bezw. Sechsseite erfüllt, so ist sie es auch für jedes andere Sechseck aus denselben sechs Elementen.

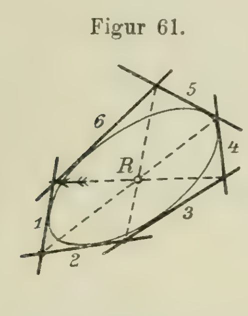
Erkl. 188. Aus denselben sechs Elementen kann man aber nach Figur 91 und 92 des I. Teils nicht weniger als 60 verschiedene einfache Sechsecke bezw. Sechsseite bilden. Und für jedes derselben gelten obige Sätze. Zum gleichen Ergebnis gelangt man durch Beachtung der verschiedenen Gruppierungen der Elemente im ersten und zweiten Teile obiger Antwort: Von den

fünf ursprünglich vorhandenen Elementen kann man behufs Auffindung des sechsten $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ verschiedene Paare als Grundelemente (Träger $t_1 t_2$ der Punktreihen bezw. Scheitel $S_1 S_2$ der Büschel) wählen, dann bleibt noch aus den übrigen drei Elementen $\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}$ oder dreifache Auswahl für die Vermittlungselemente je in doppelter Möglichkeit der Beziehung (S_1 oder S_2 bezw. t_1 oder t_2), also im ganzen Auswahl für das endgültige Sechseck unter $10 \cdot 3 \cdot 2 = 60$ verschiedenen Anordnungen. Für jede dieser 60 Anordnungen gibt es einen verschiedenen Punkt des Brianchon bezw. Gerade des Pascal: vergl. Aufgabe 285 der Aufgabensammlung am Schluss dieses Teiles.

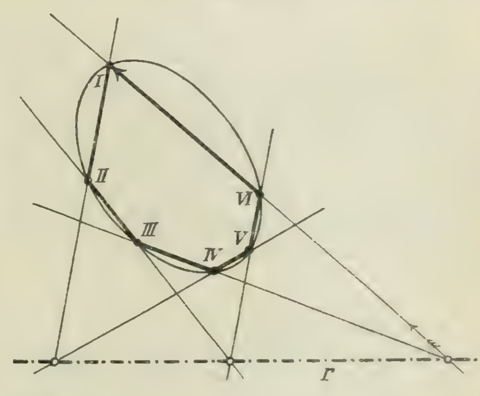
Erkl. 189. Man beachte übrigens auch, dass die Sätze von Pascal und Brianchon selbst für den Fall der ausgearteten Kurven gelten. Dieser besondere Fall — Brianchon für das Sechsseit, dessen Seiten zu je drei durch zwei Punkte gehen, Pascal für das Sechseck, dessen Ecken zu je drei auf zwei Geraden liegen — ist schon früher behandelt worden in Aufgabe 157 bis 159 des I. Teiles. Vergl. auch Aufgabe 287 dieses Teiles.

Frage 56. Welche Anwendung gestattet der Satz von Brianchon bezw. Pascal fürs Sechseck auf die Konstruktion der entsprechenden Elemente zweier projektivischen Gebilde bezw. der Elemente einer Kurve zweiten Grades?

Figur 61.



Figur 62.



Antwort.

1. Statt für die Auffindung des Punktes P_2 zum Punkte P_1 die gesamten Zwischenkonstruktionen der Elemente $S_1 S_2 t_0$ in Figur 59 durchzuführen, kann man nunmehr weit einfacher verfahren, indem man die gesuchte Gerade $P_1 P_2$ als erste und die fünf gegebenen Geraden $t_1 b a c t_2$ als zweite bis sechste Seite des Sechsseits auffasst (Fig. 61). Die fehlende Seite 1 desselben wird dann dadurch gefunden, dass die Verbindungsgeraden zweier Paare Gegenecken (1, 2) und (4, 5); (2, 3) und (5, 6) des Sechsseits den Punkt des Brianchon bestimmen, und die fehlende Ecke (6, 1) auf derselben Geraden liegen muss mit der Ecke (3, 4) und dem Punkt des Brianchon.

1. Statt für die Auffindung des Strahles p_2 zum Strahle p_1 die gesamten Zwischenkonstruktionen der Elemente $t_1 t_2 S_0$ in Figur 60 durchzuführen, kann man nunmehr weit einfacher verfahren, indem man den gesuchten Schnittpunkt $(p_1 p_2)$ als erste und die fünf gegebenen Punkte $S_1 B A C S_2$ als zweite bis sechste Ecke des Sechsecks auffasst (Fig. 62). Die fehlende Ecke I desselben wird dann dadurch gefunden, dass die Schnittpunkte zweier Paare Gegenseiten (I, II) und (IV, V); (II, III) und (V, VI) des Sechsecks die Gerade des Pascal bestimmen, und die fehlende Seite (VI, I) durch denselben Punkt gehen muss mit der Seite (III, IV) und der Geraden des Pascal.

2. In derselben Weise erhält man daher auch zu fünf gegebenen Tangenten einer Kurve zweiter Klasse eine weitere Tangente, wenn deren Schnittpunkt P_1 mit einer der fünf vorigen bekannt ist: Man beziffert die gesuchte Tangente vorläufig mit 1, die von ihr in P_1 geschnittene mit 2, die übrigen in ganz beliebiger Reihenfolge mit 3, 4, 5, 6; verbindet die Schnittpunkte (1, 2) mit (4, 5) und (2, 3) mit (5, 6), und zieht durch den Schnittpunkt R dieser beiden Geraden als dritte Gerade die nach (3, 4). Der Schnittpunkt mit dieser dritten Geraden auf der Tangente 6 liefert als Verbindungsgerade mit dem bekannten Schnittpunkt (1, 2) die gesuchte Tangente 1.

3. Vermittelst des Satzes von Brianchon fürs Sechsseit findet man also die zweite Tangente an einer Kurve (den zweiten Strahl eines Büschels) zweiter Klasse durch einen beliebigen Punkt ausserhalb der Kurve, wenn die erste Tangente durch diesen Punkt und vier weitere Tangenten gegeben sind.

2. In derselben Weise erhält man daher auch zu fünf gegebenen Kurvenpunkten einer Kurve zweiter Ordnung einen weiteren Kurvenpunkt, wenn dessen Verbindungsgerade p_1 mit einem der fünf vorigen bekannt ist: Man beziffert den gesuchten Kurvenpunkt vorläufig mit I, den mit ihm durch p_1 verbundenen mit II, die übrigen in ganz beliebiger Reihenfolge mit III, IV, V, VI; bringt zum Schnitt die Verbindungsgerade (I, II) mit (IV, V) und (II, III) mit (V, VI), und zeichnet auf der Verbindungsgeraden r dieser beiden Schnittpunkte als dritten Schnittpunkt den mit (III, IV). Die Verbindungsgerade nach diesem dritten Schnittpunkte durch Punkt VI liefert als Schnittpunkt mit der bekannten Verbindungsgeraden (I, II) den gesuchten Kurvenpunkt I.

3. Vermittelst des Satzes von Pascal fürs Sechseck findet man also den zweiten Schnittpunkt mit einer Kurve (den zweiten Punkt einer Punktreihe) zweiter Ordnung auf einer beliebigen Schnittgeraden der Kurve, wenn der erste Schnittpunkt auf dieser Geraden und vier weitere Kurvenpunkte gegeben sind.

Erkl. 190. Ebenso wie man Punkte mit grossen und Gerade mit kleinen Buchstaben buchstabiert, so beziffert man auch Punkte mit grossen (römischen) und Gerade mit kleinen (arabischen) Ziffern. Dadurch wird man in jedem Stadium einer Aufgabe daran erinnert, mit was für Elementen und was für Sätzen gearbeitet wird — ob nach Brianchon mit Tangenten oder nach Pascal mit Punkten. Dass man dabei das gesuchte Element gleich mit der ersten Ziffer bezeichnet, gibt gleich zu Anfang die Entscheidung zwischen den beiden genannten Arten der Behandlung, entspricht aber allgemein dem auch in andern Zweigen der Mathematik (z. B. allen Arten von Textgleichungen oder Konstruktionsaufgaben) bewährten Grundsatz, dass man gleich zu Anfang einer Aufgabe sich über deren Endziel genau Rechenschaft gibt.

Erkl. 191. Sind die sechs Seiten bezw. sechs Ecken eines einfachen Sechsecks mit den Ziffern 1 bis 6 bezeichnet, so sind gegenüberliegende Elemente 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 bezw. (1, 2) und (4, 5), (2, 3) und (5, 6), (3, 4) und (6, 1). Man findet also für ein beliebiges durch zwei Ziffern bezeichnetes Element das gegenüberliegende, indem man einfach von dessen erster Ziffer um vier weiterzählt und dabei die mittlere Ziffer überspringt; nämlich:

$$\widehat{12}(3)\widehat{45},\ \widehat{23}(4)\widehat{56},\ \widehat{34}(5)\widehat{61},\ \widehat{45}(6)\widehat{12},\ \widehat{56}(1)\widehat{23},\ \widehat{61}(2)\widehat{34}.$$

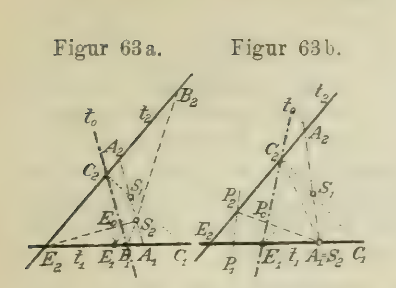
Frage 57. Welche Folgerungen gestatten die Sätze von Brianchon und Pascal fürs Fünfeck bezw. Fünfseit?

Antwort.

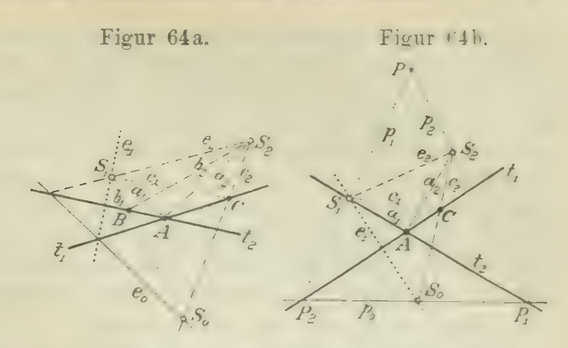
1. Wenn in Figur 61 (Seite 95) die Tangente 1 längs der Kurve gegen Tangente 6 hin verschoben wird, so muss nach Satz 23 in jeder Lage ein

1. Wenn in Figur 62 (Seite 95) der Kurvenpunkt I längs der Kurve gegen Punkt VI hin verschoben wird, so muss nach Satz 24 in jeder Lage eine

Figur 63a. Figur 63b.



Figur 64a. Figur 64b.



gemeinsamer Schnittpunkt R der Verbindungsgeraden von Gegenecken aufrecht erhalten bleiben. Das wird also auch der Fall sein müssen unmittelbar vor und wieder unmittelbar nach dem Zusammenfallen der Tangenten 1 und 6. Im Zustande des Zusammentreffens beider Tangenten aber ist der Schnittpunkt der Tangenten 1 und 6 zum Berührungspunkt geworden, da dieser als Schnittpunkt zweier unendlich nahe benachbarten Tangenten angesehen werden muss (Antw. auf Frage 26). Von den sechs Seiten des Sechsseits sind also nur noch fünf als Tangenten vorhanden, eine davon aber ist doppelt zu zählen, und ihr Berührungspunkt gilt als sechste Ecke des Sechsseits; der Berührungspunkt dieser Fünfecksseite ist verbunden mit deren Gegenecke, und auf ihrer Verbindungsgeraden liegt auch der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der noch übrigen Gegenecken.

2. Zum gleichen Ergebnis kann man aber auch ohne den Grenzübergang gelangen durch Abänderung der Figur 59 in Figur 63a. Sucht man nämlich dort statt der beliebigen Tangente P_1P_2 den Berührungspunkt auf Träger t_1, so wird der Schnittpunkt der Träger, aufgefasst als Punkt E_2 auf t_2, verbunden mit S_2 (Figur 63a), und durch den Punkt E_0 gehen dann im Fünfseit $S_1S_2B_1E_2C_2$ die Verbindungsgeraden S_1E_1, sowie S_2E_2 und B_1C_2. Dasselbe muss aber nach Satz 16 für jede beliebige Anordnung der Tangenten und Träger stattfinden.

3. Ein dritter Beweis für das gleiche Ergebnis entsteht aus Figur 63b, wenn

gemeinsame Verbindungsgerade r der Schnittpunkte von Gegenseiten aufrecht erhalten bleiben. Das wird also auch der Fall sein müssen unmittelbar vor und wieder unmittelbar nach dem Zusammenfallen der Punkte I und VI. Im Zustande des Zusammentreffens beider Kurvenpunkte ist aber die Verbindungsgerade der Punkte I und VI zur Tangente geworden, da diese als Verbindungsgerade zweier unendlich nahe benachbarten Kurvenpunkte angesehen werden muss (Antw. auf Frage 26). Von den sechs Ecken des Sechsecks sind also nur noch fünf als Kurvenpunkte vorhanden, einer davon aber ist doppelt zu zählen, und seine Tangente gilt als sechste Seite des Sechsecks; die Tangente dieses Fünfeckspunktes ist geschnitten mit der Gegenseite, und durch ihren Schnittpunkt geht auch die Verbindungsgerade der Schnittpunkte der noch übrigen Gegenseiten.

2. Zum gleichen Ergebnis kann man aber auch ohne den Grenzübergang gelangen durch Abänderung der Figur 60 in Figur 64a. Sucht man nämlich dort statt des beliebigen Kurvenpunktes P die Tangente im Scheitel S_1, so wird der Verbindungsstrahl der Scheitel, aufgefasst als Strahl e_2 in S_2, geschnitten mit t_2 (Figur 64a), und auf dem Strahl e_0 liegen dann im Fünfeck S_1S_2CAB die Schnittpunkte von t_1 mit e_1, sowie von t_2 mit e_2 und von b_1 mit c_2. Dasselbe muss aber nach Satz 16a für jede beliebige Anordnung der Kurvenpunkte und Scheitel stattfinden.

3. Ein dritter Beweis für das gleiche Ergebnis entsteht aus Figur 64b, wenn

von der Kurve gegeben sind vier Tangenten und der Berührungspunkt auf einer derselben. Letztere Tangente wird zu t_1, A_1 zu S_2, C_2E_1 zu t_0 (vergl. Aufgabe 82 der Aufgabensamml.), und durch denselben Punkt P_0 auf t_0 gehen im Fünfseit $S_1A_1P_1P_2C_2$, die Verbindungsgeraden S_1P_1, sowie S_2P_2 und E_1C_2 selbst. Nach Satz 16 muss aber auch diese Beziehung als allgemein bewiesen gelten.

4. Man erhält also den neuen Satz:

Satz 23a. (Satz von Brianchon fürs Fünfseit.) In jedem einer Kurve zweiter Klasse umgeschriebenen (einfachen) Fünfseit geht die Verbindungsgerade einer Ecke mit dem Berührungspunkt auf ihrer Gegenseite und die Verbindungsgeraden der beiden übrigen Paare von Gegenecken durch einen Punkt.

von der Kurve gegeben sind vier Kurvenpunkte und die Tangente in einem derselben. Letzterer Kurvenpunkt wird zu S_1, a_1 zu t_2, Punkt (c_2e_1) zu S_0 (vergl. Aufgabe 152), und auf derselben Geraden p_0 durch S_0 liegen im Fünfeck S_1ACS_2P, die Schnittpunkte von t_1 mit p_1, t_2 mit p_2, sowie e_1 und c_2 selbst. Nach Satz 16a muss aber auch diese Beziehung als allgemein bewiesen gelten.

4. Man erhält also den neuen Satz:

Satz 24a. (Satz von Pascal fürs Fünfeck.) In jedem einer Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen (einfachen) Fünfeck liegt der Schnittpunkt einer Seite mit der Tangente in ihrer Gegenecke und die Schnittpunkte der beiden übrigen Paare von Gegenseiten auf einer Geraden.

Erkl. 192. Man beachte in den beiden Figuren 61 und 62 den Erfolg der Verschiebung der Tangente 1 bezw. des Eckpunktes I auf der Kurve:

In Figur 61 ändern sich dabei die Schnittpunkte (1, 6) und (1, 2), nicht aber die übrigen vier Schnittpunkte (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6); folglich ändern sich zwar die Verbindungsgeraden von (1, 6) mit (3, 4) und (1, 2) mit (4, 5), nicht aber die Verbindungsgerade von (2, 3) und (5, 6). Man erkennt also, dass der bei der Veränderung von 1 stets gemeinsam bleibende Schnittpunkt R der drei Geraden (1, 2) und (4, 5), (2, 3) und (5, 6), (3, 4) und (6, 1) bei der Bewegung der Geraden 1 nur verschoben wird auf der Geraden von (2, 3) nach (5, 6). Bei derjenigen Lage dieses Punktes R auf der genannten Geraden in Figur 61, für welche die Verbindungsgerade von R mit dem Punkte (4, 5) durch den Schnittpunkt der Geraden 6 und 2 hindurchgeht, trifft die Verbindungsgerade von R mit dem Punkte (3, 4) den Berührungspunkt auf der Tangente 6.

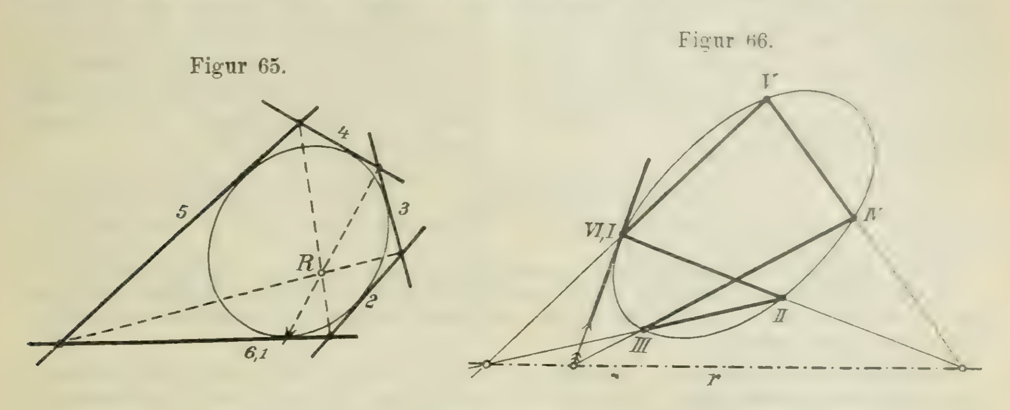
In Figur 62 ändern sich dabei die Verbindungsgeraden I, VI und I, II, nicht aber die übrigen vier Verbindungsgeraden II, III; III, IV; IV, V; V, VI; folglich ändern sich zwar die Schnittpunkte von I, VI mit III, IV und I, II mit IV, V, nicht aber der Schnittpunkt von II, III und V, VI. Man erkennt also, dass die bei der Veränderung von I stets gemeinsam bleibende Verbindungsgerade r der drei Schnittpunkte von I, II und IV, V; II, III und V, VI; III, IV und VI, I bei der Bewegung des Punktes I nur gedreht wird um den Schnittpunkt von II, III und V, VI. Bei derjenigen Lage dieser Geraden r in Figur 62, für welche der Schnittpunkt von r mit der Geraden IV, V auf die Verbindungsgerade der Punkte VI und II fällt, liegt der Schnittpunkt von r mit der Geraden III, IV auf der Tangente des Kurvenpunktes VI.

Erkl. 193. Im einfachen Fünfeck bezw. Fünfseit hat nach Antwort auf Frage 48 des I. Teiles jede Ecke eine Gegenseite, jede Seite eine Gegenecke; werden z. B. die Ecken bezeichnet mit den Buchstaben $ABCDE$, so sind gegenüberliegende Elemente A und CD, B und DE, C und EA, D und AB, E und BC. Wird aber eine Ecke, z. B. E, vorweggenommen, so bleiben vier Ecken $ABCD$ übrig, und von diesen sind dann A und C bezw. B und D als Gegenecken zu bezeichnen; ebenso bleiben, wenn eine Seite vorweggenommen wird, noch vier Seiten übrig, und von diesen kann man je zwei nicht aufeinanderfolgende als Gegenseiten unter den übrig bleibenden Seiten ansehen.

Erkl. 194. Figur 63a bezw. 64a geben jeweils einen Teil der früheren Figuren 29 bezw. 34, wie es für den vorliegenden Zweck nötig ist. Man hätte selbstverständlich ebensowohl statt E_1 und e_1 die Elemente D_1 und d_1 als unbekannte aufsuchen können, und dadurch statt der gegenüberliegenden Elemente des Fünfecks bezw. Fünfseits nicht S_1 und t_1, sondern S_2 und t_2 erhalten. Unter den noch übrigen Elementen wären dann nicht S_2E_2 bezw. t_2e_2, sondern S_1D_1 bezw. t_1d_1 als gegenüberliegende aufgetreten, dagegen B_1C_2 bezw. b_1c_2 wären in gleicher Eigenschaft verblieben, wie zuvor.

Erkl. 195. Die Figuren 63b bezw. 64b entsprechen einander ebenso dualistisch, wie zuvor 63a und 64a. Unter den Elementen der projektivischen Gebilde ist hier jedesmal das gemeinsame Element beider Gebilde vertreten mit seinem entsprechenden. Und dadurch erhält von den vermittelnden Zwischenelementen je eines eine besondere Lage: in Figur 63b S_2 auf t_1, t_0 durch den Berührungspunkt von t_1, in Figur 64b t_2 durch S_1, S_0 auf der Tangente in S_1. Als Ergebnis aber entsteht wieder ein Fünfeck bezw. Fünfseit, wie zuvor in Figur 63a bezw. 63b.

Frage 58. Welche Anwendung gestattet der Satz von Brianchon bezw. Pascal fürs Fünfeck auf die Konstruktion von Kurvenelementen?



Figur 65. Figur 66.

Antwort.

1. Statt für die Auffindung der Berührungspunkte E_1 in Figur 63a oder der Tangente P_1P_2 in Figur 63b die gesamten Zwischenkonstruktionen der Elemente $S_1S_2t_0$ durchzuführen, kann man nunmehr weit einfacher verfahren, indem man die fünf in Betracht kommenden Tangenten als Seiten des Fünfseits (Figur 65) auffasst, und von ihnen noch diejenige doppelt zählt, auf welcher der Berührungspunkt auftritt. Wird letzterer gesucht, so beziffert man diese Tangente mit (6, 1), die andern in beliebiger Reihenfolge mit 2, 3, 4, 5; die Verbindungsgeraden der Ecken (1, 2) u. (4, 5), (2, 3) u. (5, 6) liefern den Punkt R des Brianchon; und dessen Verbindungsgerade mit Ecke (3, 4) geht durch den Berührungspunkt 6, 1. — Wird eine beliebige neue Tangente gesucht, so beziffert man diese vorläufig mit 1, die andern mit 2 bis 6, wobei die von 1 im gegebenen Punkte geschnittene die Ziffer 2, und die samt Berührungspunkt gegebene Tangente zwei benachbarte Ziffern erhält. Wieder entsteht R durch (1, 2), (4, 5) und (2, 3), (5, 6), und die Verbindungsgerade von R mit

1. Statt für die Auffindung der Tangente e_1 in Figur 64a oder des Kurvenpunktes P in Figur 64b die gesamten Zwischenkonstruktionen der Elemente $t_1t_2S_0$ durchzuführen, kann man nunmehr weit einfacher verfahren, indem man die fünf in Betracht kommenden Kurvenpunkte als Eckpunkte des Fünfecks (Figur 66) auffasst, und von ihnen noch denjenigen doppelt zählt, in welchem die Tangente auftritt. Wird letztere gesucht, so beziffert man diesen Kurvenpunkt mit (VI, I), die andern in beliebiger Reihenfolge mit II, III, IV, V; die Schnittpunkte der Seiten I, II und IV, V; II, III und V, VI liefern die Gerade r des Pascal; und deren Schnittpunkt mit Seite III, IV liegt auf der Tangente VI, I. — Wird ein beliebiger neuer Kurvenpunkt gesucht, so beziffert man diesen vorläufig mit I, die andern mit II bis VI, wobei der mit I durch die gegebene Gerade verbundene die Ziffer II, und der samt Tangente gegebene Kurvenpunkt zwei benachbarte Ziffern erhält. Wieder entsteht r durch I, II; IV, V und II, III; V, VI, und der Schnittpunkt von r mit III, IV liefert

(3, 4) liefert (6, 1), d. h. denjenigen Punkt auf 6, durch welchen 1 hindurchgeht.

2. Vermittelst des Satzes von Brianchon fürs Fünfseit findet man also:

α) den Berührungspunkt auf einer beliebigen von fünf gegebenen Tangenten einer Kurve,

β) die zweite Tangente an die Kurve durch einen beliebigen Punkt ausserhalb der Kurve, wenn gegeben sind die erste Tangente durch diesen Punkt und drei weitere Tangenten, sowie auf einer dieser vier Tangenten der Berührungspunkt.

VI, I, d. h. diejenige Gerade durch VI, auf welcher Punkt I liegt.

2. Vermittelst des Satzes von Pascal fürs Fünfeck findet man also:

α) die Tangente in einem beliebigen von fünf gegebenen Punkten einer Kurve,

β) den zweiten Schnittpunkt mit der Kurve auf einer beliebigen Schnittgeraden, wenn gegeben sind der erste Schnittpunkt auf dieser Geraden und drei weitere Kurvenpunkte, sowie in einem dieser vier Kurvenpunkte die Tangente.

Erkl. 196. Die vorstehenden Erörterungen sind unmittelbar für Elemente der Kurven ausgesprochen. Man könnte dieselben selbstverständlich auch für „Auffindung der zugeordneten Elemente projektivischer Gebilde“ formulieren. Man findet darnach auf die obenstehend beschriebene Art und Weise

α) das entsprechende Element zum gemeinsamen Element zweier projektivischen Gebilde,

β) das zugeordnete Element zu einem beliebigen Element in zwei projektivischen Gebilden, wenn unter den gegebenen Elementen auch das dem gemeinsamen Elemente beider Gebilde zugeordnete vertreten ist.

Erkl. 197. Ist das gesuchte Element mit 1 bezw. I bezeichnet, so kann von den andern jedes als Doppelelement auftreten: (2, 3), (3, 4), (4, 5) oder (5, 6). Ist das Doppelelement das gesuchte (und dieser zweite Fall ist in Figur 65 bezw. 66 dargestellt), so erreicht man durch Bezeichnung desselben mit (6, 1) bezw. (VI, I) den Vorteil, dass der gesuchte Berührungspunkt bezw. Tangente wieder wie sonst durch das Element (3, 4) gefunden wird. — Dadurch, dass man auch beim Fünfeck mit 1 bis 6, statt nur 1 bis 5 beziffert, hat man ausserdem den Vorzug, dass eigentlich auch hier alles durchs Sechseck geleistet wird, also der neue Satz gewissermassen gar nicht als Konstruktionsmittel, sondern nur als Beweismittel auftritt.

Frage 59. Welche Folgerungen ergeben die Sätze von Brianchon und Pascal fürs Vierseit bezw. Viereck mit benachbarten Doppelelementen?

Antwort.

1. Wenn in Figur 65 (S. 99) nicht nur die Tangente 6, 1 als Doppeltangente mit Berührungspunkt auftritt, sondern auch noch Tangente 4 längs der Kurve gegen Tangente 5 hin verschoben wird, so muss ein gemeinsamer Schnittpunkt *R* der Verbindungsgeraden (1, 2) und (4, 5), (2, 3) und (5, 6), (3, 4) und (6, 1) aufrecht erhalten bleiben, auch unmittelbar vor und unmittelbar nach dem Zusammenfallen der Tangenten 4 und 5. Im Zustande des Zusammentreffens beider Tangenten aber ist der Schnittpunkt der Tangenten 4 und 5 zum Berührungspunkt geworden; und dessen Verbindungsgerade mit der Ecke (1, 2) trifft die Verbindungsgerade des Berührungspunktes (6, 1) mit der (neuen) Ecke (3, 4) im gleichen Punkte, in welchem die Verbindungsgerade der

1. Wenn in Figur 66 (S. 99) nicht nur der Kurvenpunkt VI, I als Doppelpunkt mit Tangente auftritt, sondern auch noch Kurvenpunkt IV längs der Kurve gegen Punkt V hin verschoben wird, so muss eine gemeinsame Verbindungsgerade *r* der Schnittpunkte (I, II) und (IV, V), (II, III) und (V, VI), (III, IV) und (VI, I) aufrecht erhalten bleiben, auch unmittelbar vor und unmittelbar nach dem Zusammenfallen der Punkte IV und V. Im Zustande des Zusammentreffens beider Kurvenpunkte aber ist die Verbindungsgerade der Punkte IV und V zur Tangente geworden; und deren Schnittpunkt mit der Seite (I, II) liegt mit dem Schnittpunkt der Tangente (VI, I) und der (neuen) Seite (III, IV) auf der gleichen Geraden, durch welche der Schnittpunkt der

Gegenecken (5, 6) und (2, 3) dieselbe Gerade trifft.

2. Zum gleichen Ergebnis gelangt man ohne den Grenzübergang durch Abänderung der Figur 63b in 67a. Sucht man nämlich dort statt der beliebigen Tangente P_1P_2 den Berührungspunkt auch noch auf Träger t_2, so wird der Schnittpunkt der Träger, aufgefasst als Punkt D_1 auf t_1, verbunden mit S_1 (Fig. 67a): und durch den Punkt D_0 gehen dann im Vierseit $S_1A_1D_1C_2$ die Verbindungsgeraden C_2E_1, A_1D_2, sowie S_1D_1. Nach Satz 16 gilt aber auch diese Beziehung allgemein.

3. Man erhält demnach den neuen Satz:

Satz 23b. In jedem einer Kurve zweiter Klasse umgeschriebenen Vierseit gehen durch einen Punkt die Verbindungsgerade zweier Gegenecken und die Verbindungsgeraden der einander gegenüberliegenden Berührungspunkte und Eckpunkte auf den zwei durch je eine dieser Ecken gehenden Seiten.

Gegenseiten (V, VI) und (II, III) mit dem vorigen Punkt verbunden wird.

2. Zum gleichen Ergebnis gelangt man ohne den Grenzübergang durch Abänderung der Figur 64b in 68a. Sucht man nämlich dort statt des beliebigen Kurvenpunktes (p_1p_2) die Tangente auch noch im Scheitel S_2, so wird der Verbindungsstrahl der Scheitel, aufgefasst als Strahl d_1 in S_1, geschnitten mit t_1 (Fig. 68a): und auf der Geraden d_0 liegen dann im Viereck S_1ACS_2 die Schnittpunkte (c_2e_1), (a_1d_2), sowie (t_1d_1). Nach Satz 16a gilt aber auch diese Beziehung allgemein.

3. Man erhält demnach den neuen Satz:

Satz 24b. In jedem einer Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen Viereck liegen auf einer Geraden der Schnittpunkt zweier Gegenseiten und die Schnittpunkte der einander gegenüberliegenden Tangenten und Seiten durch die zwei auf je einer dieser Seiten liegenden Ecken.

Erkl. 198. Lässt man in Figur 61 nicht die Tangentenpaare 4, 5 und 6, 1, sondern die Tangentenpaare 1, 2 und 3, 4 zusammenrücken, so treten anstatt der Berührungspunkte (4, 5) und (6, 1) die Berührungspunkte (1, 2) und (3, 4) auf; es verbleiben aber als Gegenecken (2, 3) und (5, 6), also auch deren Verbindungsgerade, auf welcher der Schnittpunkt der neuen Geraden (4, 5), (1, 2) und (6, 1), (3, 4) verbleibt. — Wählt man entsprechend in Figur 67a als Träger die Geraden A_1A_2 und C_2C_1 anstatt A_1D_1 und C_2E_2, so treten an Stelle der Berührungspunkte E_1 und D_2 die Berührungspunkte auf S_1A_1 und S_1C_2, es verbleiben aber als Gegenecken S_1, D_1, also auch deren Verbindungsgerade, auf welcher nun auch der Schnittpunkt der neuen Geraden verbleibt.

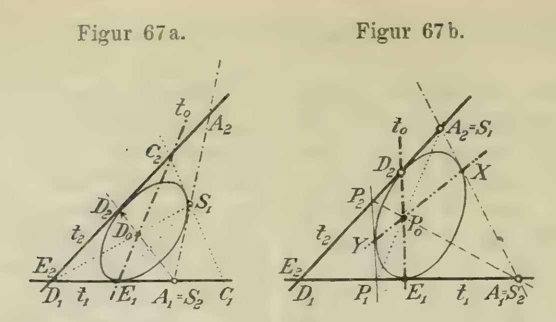
Erkl. 199. Lässt man in Figur 62 nicht die Punktepaare IV, V und VI, I, sondern die Kurvenpunkte I, II und III, IV zusammenrücken, so treten anstatt der vorigen Tangenten diese neuen auf; es verbleiben aber als Gegenseiten II, III und V, VI, also auch deren Schnittpunkt, durch welchen die Verbindungsgerade der neuen Schnittpunkte IV, V und I, II; VI, I und III, IV hindurchgeht. — Wählt man entsprechend in Figur 68a als Scheitel die Punkte A und C anstatt S_1 und S_2, so treten an Stelle der Tangenten e_1 und d_2 die Tangenten in A und C, es verbleiben aber als Gegenseiten t_1 und d_1, also auch deren Schnittpunkt, durch welchen nun auch die Verbindungsgerade der neuen Schnittpunkte hindurchgeht.

Erkl. 200.

Satz 23b entnimmt einem Vierseit erst zwei Gegenecken; durch eine jede dieser beiden Ecken gehen zwei Seiten mit je einem Berührungspunkt B und einer benachbarten Ecke E. Der Berührungspunkt B auf der einen wird verbunden mit dem ihm gegenüberliegenden Eckpunkt E auf der andern; und der Schnittpunkt BE, BE liegt jedesmal auf derselben Verbindungsgeraden der Gegenecken, ob man die zwei Seiten der einen oder die zwei Seiten der andern Gegenecke gewählt hat. — Auf jeder der zwei Verbindungsgeraden von Gegenecken des (einfachen) Vierseits liegen zwei solche Schnittpunkte.

Satz 24b entnimmt einem Viereck erst zwei Gegenseiten; auf einer jeden dieser beiden Seiten liegen zwei Ecken mit je einer Tangente t und einer benachbarten Seite s. Die Tangente t durch die eine wird geschnitten mit der ihr gegenüberliegenden Seite s durch die andere; und die Verbindungsgerade (ts), (ts) geht jedesmal durch denselben Schnittpunkt der Gegenseiten, ob man die zwei Ecken der einen oder die zwei Ecken der andern Gegenseite gewählt hat. — Durch jeden der zwei Schnittpunkte von Gegenseiten des (einfachen) Vierecks gehen zwei solche Verbindungsgeraden.

Figur 67a. Figur 67b.



Frage 60. Welche Folgerungen ergeben die Sätze von Brianchon und Pascal fürs Vierseit bezw. Viereck mit gegenüberliegenden Doppelelementen?

Antwort.

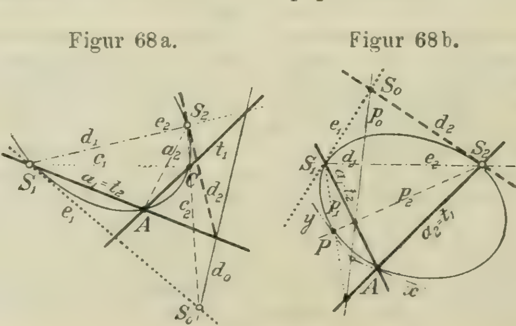
1. Wenn in Figur 65 (Seite 99) nicht nur die Tangente 6, 1 als Doppeltangente mit Berührungspunkt auftritt, sondern auch noch Tangente 3 längs der Kurve gegen Tangente 4 hin verschoben wird, so wird der Eckpunkt (3, 4) zum Berührungspunkt auf der gegenüberliegenden Seite zu 6, 1; und die Verbindungsgerade der Berührungspunkte auf diesen Gegenseiten geht durch denselben Punkt, wie die Verbindungsgerade der Gegenecken (1, 2) und (4, 5) bezw. (2, 3) und (5, 6).

2. Zum gleichen Ergebnis gelangt man durch Betrachtung der projektivischen Punktreihen, wenn die Kurve gegeben ist durch drei Tangenten und den Berührungspunkt auf zweien derselben (Figur 67b). Letztere Tangenten werden zu t_1 und t_2, A_1 und A_2 zu S_2 und S_1, $E_1 D_2$ zu t_0; und durch denselben Punkt P_0 auf t_0 gehen im Vierseit $A_1 A_2 P_2 P_1$ die Verbindungsgeraden $A_1 P_2$, $A_2 P_1$ und $E_1 D_2$ selber.

1. Wenn in Figur 66 (Seite 99) nicht nur der Punkt VI, I als Doppelpunkt mit Tangente auftritt, sondern auch noch Kurvenpunkt III längs der Kurve bis zum Punkt IV hin verschoben wird, so wird die Verbindungsgerade III, IV zur Tangente in der Gegenecke zu VI, I; und der Schnittpunkt der Tangenten in diesen Gegenecken liegt auf derselben Geraden, wie die Schnittpunkte der Gegenseiten I, II und IV, V bezw. II, III und V, VI.

2. Zum gleichen Ergebnis gelangt man durch Betrachtung der projektivischen Strahlenbüschel, wenn die Kurve gegeben ist durch drei Punkte und die Tangenten in zweien derselben (Fig. 68b). Letztere Punkte werden zu S_1 und S_2, a_1 und a_2 zu t_2 und t_1, Punkt $(e_1\, d_2)$ zu S_0; und auf derselben Geraden p_0 durch S_0 liegen im Viereck APS_1S_2 die Schnittpunkte $(a_1\, p_2)$, $(a_2\, p_1)$ und $(e_1 d_2)$ selber.

Figur 68a. Figur 68b.



3. Jede dieser beiden Beweisführungen lässt aber noch eine Erweiterung zu. Denkt man sich nämlich in dem entstehenden Vierseit (Figur 69) nicht die untere und obere Gegenseite als Doppeltangenten, sondern die linke und rechte, so muss wieder die Verbindungsgerade der gegenüberliegenden Berührungspunkte durch den Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der Gegenecken gehen. Die letzten beiden Verbindungsgeraden bleiben aber völlig ungeändert, also bleibt auch ihr Schnittpunkt; und folglich muss die neuentstehende Verbindungsgerade durch denselben Punkt gehen wie die vorige. — Dieselbe Eigenschaft entsteht aus der zweiten Betrachtungsweise, wenn in Figur 67b statt $A_1 P_1$ und $A_2 P_2$ die Tangenten $A_1 A_2$ und $P_1 P_2$ zu Trägern gewählt werden.

4. Man erhält also den bemerkenswerten neuen Satz:

Satz 23c. (Satz von Brianchon fürs Vierseit.) In jedem einer Kurve zweiter Klasse umgeschriebenen Vierseit gehen die Verbindungsgeraden der Gegenecken und die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte auf Gegenseiten alle vier durch einen Punkt.

3. Jede dieser beiden Beweisführungen lässt aber noch eine Erweiterung zu. Denkt man sich nämlich in dem entstehenden Viereck (Figur 70) nicht die linke und rechte Gegenecke als Doppelpunkte, sondern die untere und obere, so muss wieder der Schnittpunkt der gegenüberliegenden Tangenten auf der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte der Gegenseiten liegen. Die letzten beiden Schnittpunkte bleiben aber völlig ungeändert, also bleibt auch ihre Verbindungsgerade; und folglich muss der neuentstehende Schnittpunkt auf derselben Geraden liegen, wie der vorige. Dieselbe Eigenschaft entsteht aus der zweiten Betrachtungsweise, wenn in Figur 68b statt $(a_1 p_1)$ und $(a_2 p_2)$ die Punkte A und P zu Scheiteln gewählt werden.

4. Man erhält daher den bemerkenswerten neuen Satz:

Satz 24c. (Satz von Pascal fürs Viereit.) In jedem einer Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen Viereck liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten und die Schnittpunkte der Tangenten in Gegenecken alle vier auf einer Geraden.

Erkl. 201. Die Figuren 67 und 68 gehören alle vier zur Erörterung des Vierecks, und zwar 67a zum Satz 23b, 68a zum Satz 23c, dagegen 67b zum Satz 24b, 68b zum Satz 24c. In den Figuren 67 hat man jedesmal ein konvexes umgeschriebenes Vierseit, in 68a ein konvexes eingeschriebenes, in 68b ein überschlagenes eingeschriebenes, nämlich $S_1 A S_2 P$, also Gegenseiten $a_1 p_2$ und $a_2 p_1$, Gegenecken $S_1 S_2$ und AP. — In Figur 67b und 68b sind bei der Konstruktion verwendet die Berührungselemente E_1, D_2 bezw. e_1, d_2. Dagegen sind an den Figuren noch angedeutet die Berührungspunkte XY auf $A_1 A_2$ bezw. $P_1 P_2$ in Figur 67b und ihre Verbindungsgerade durch P_0, sowie die Tangenten xy in A bezw. P in Figur 68b und deren Schnittpunkt auf p_0.

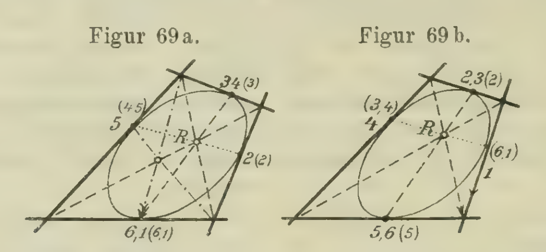
Erkl. 202. Wenn in Figur 66 (Seite 99) die Punkte III und IV miteinander zur Deckung gebracht werden sollen, so muss der eine Punkt III durch den Punkt II auf der Kurve hindurchgehen, um nach IV zu gelangen. Das hat in Hinsicht der allgemeinen Gültigkeit keinerlei Bedenken. Jedoch kann man auch diesem Umstande dadurch ausweichen, dass man die Figur 66 in anderer Weise zeichnet; die Ecken II, III, IV auf der Kurve müssen dann in dieser Reihenfolge als Nachbarecken liegen.

Erkl. 203. Die im dritten Teil obiger Antwort angestellte Ueberlegung wurde schon einmal verwendet in Antwort auf Frage 37, Erkl. 126 bezw. Figur 36 und 37 zum Beweise der Identität der Ordnungskurve und Klassenkurve. Man hätte also schon dort die Sätze 23c und 24c aussprechen können; jedoch finden dieselben an dieser Stelle ihren geeigneten Platz im Zusammenhang mit den übrigen Sätzen von Brianchon und Pascal. — Dieselbe Ueberlegung des dritten Teils der Antwort auf Frage 60 ist in den Figuren 69b und 70b in den Ziffern zu erkennen. Es sind dort die Elemente mit zweifacher Bezifferung versehen: die eine derselben (Ziffern ohne Klammer) gibt das eine Paar gegenüberliegender Berührungselemente.

die andere Bezifferung (Ziffern in Klammer) gibt das andere Paar gegenüberliegender Berührungselemente. Identisch bleiben für beide Fälle die Gegenecken und deren Verbindungsgerade bezw. die Gegenseiten und deren Schnittpunkt, nämlich in beiden Figuren 1, 2 mit 4, 5 bezw. (1), (2) mit (4), (5). und 3, 4 mit 6, 1 bezw. (2), (3) mit (5). (6). Dazu gesellen sich aber im ersten Falle 2, 3 mit 5, 6, im zweiten Falle (3), (4) mit (6), (1).

Erkl. 204. Die vorliegenden Sätze 23c und 24c unterscheiden sich insofern wesentlich von den übrigen Sätzen 23 bis 23d und 24 bis 24d, dass hier vier Elemente in vereinigter Lage sich befinden, während dies in den übrigen Fällen nur von dreien nachgewiesen ist. Ist es schon eine Merkwürdigkeit, wenn drei Elemente kein Dreieck bilden, sondern vereinigt liegen, so ist es eine weit höhere Stufe der Besonderheit, wenn vier Elemente nicht ein Viereck bilden, sondern vereinigt liegen. — Aber damit nicht genug wird sich an die Sätze 23c und 24c sogar eine ganz neue Theorie anschliessen, indem mit diesen jetzt schon vorhandenen vier vereinigt liegenden Elementen noch weitere zwei bis vier Elemente vereinigt liegen; dies führt dann zur Lehre von der Polarität bezw. Reciprocität (erster Abschnitt des folgenden III. Teiles dieses Lehrbuches).

Figur 69a. Figur 69b.



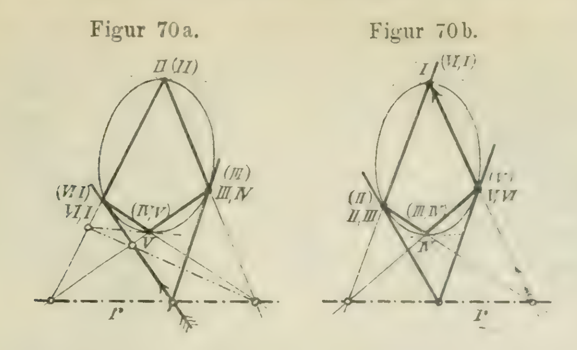
Frage 61. Welche Anwendung gestatten die beiderlei Sätze von Brianchon und Pascal fürs Viereck auf die Konstruktion von Kurvenelementen?

Antwort.

1. Für die Auffindung der Berührungspunkte D_2 in Figur 67a oder 67b bezw. der Tangente P_1P_2 in Figur 67b kann man die Konstruktion der Zwischenelemente $S_1S_2t_0$ unterlassen und die vier in Betracht kommenden Tangenten als Seiten des Vierseits auffassen, davon aber diejenigen doppelt zählen, auf welchen die Berührungspunkte auftreten. Wird einer der letzteren gesucht, so beziffert man seine Tangente mit 6, 1, die andern in beliebiger Reihenfolge mit 2 bis 5, nur diejenige mit zwei benachbarten Ziffern, auf der noch ein Berührungspunkt gegeben ist. Dann liefern wieder (1, 2) und (4, 5), (2, 3) und (5, 6) den Punkt R des Brianchon, und dessen Verbindungsgerade mit (3, 4) geht durch den Berührungspunkt (6, 1). — Wird eine beliebige neue Tangente gesucht, so beziffert man diese vorläufig mit 1, die andern mit 2 bis 6 in der Art, dass die von 1 im gegebenen Punkte geschnittene die Ziffer 2, und jede samt Berührungspunkt gegebene Tangente zwei benachbarte Ziffern erhält. Wieder

1. Für die Auffindung der Tangente d_2 in Figur 68a oder 68b bezw. der Kurvenpunkte P in Fig. 68b kann man die Konstruktion der Zwischenelemente $t_1t_2S_0$ unterlassen und die vier in Betracht kommenden Kurvenpunkte als Ecken des Vierecks auffassen, davon aber diejenigen doppelt zählen, in welchen die Tangenten auftreten. Wird eine der letzteren gesucht, so beziffert man ihren Kurvenpunkt mit VI, I, die andern in beliebiger Reihenfolge mit II bis V, nur denjenigen mit zwei benachbarten Ziffern, in welchem noch die Tangente gegeben ist. Dann liefern wieder I, II und IV, V; II, III und V, VI die Gerade r des Pascal, und deren Schnittpunkt mit III, IV liegt auf der Tangente VI, I. — Wird ein beliebiger neuer Kurvenpunkt gesucht, so beziffert man diesen vorläufig mit I, die andern mit II bis VI in der Art, dass der mit I durch die gegebene Gerade verbundene die Ziffer II, und jeder samt Tangente gegebene Kurvenpunkt zwei benachbarte Ziffern erhält. Wieder entsteht r durch

Figur 70a. Figur 70b.



entsteht R durch (1, 2) (4, 5) und (2, 3) (5, 6); und die Verbindungsgerade von R mit (3. 4) liefert (6, 1), d. h. denjenigen Punkt auf 6, durch welchen 1 hindurchgeht.

I, II; IV, V und II, III; V, VI; und der Schnittpunkt von r mit III, IV liefert VI, I, d. h. diejenige Gerade durch VI, auf welcher I liegt.

2. Vermittelst der Sätze von Brianchon fürs Vierseit findet man also:

α) den Berührungspunkt auf einer beliebigen von vier gegebenen Tangenten einer Kurve, wenn auf einer derselben der Berührungspunkt gegeben ist,

β) die zweite Tangente an die Kurve durch einen beliebigen Punkt ausserhalb der Kurve, wenn die erste Tangente durch diesen Punkt und zwei weitere Tangenten, sowie auf zweien von den drei Tangenten die Berührungspunkte gegeben sind.

2. Vermittelst der Sätze von Pascal fürs Viereck findet man also:

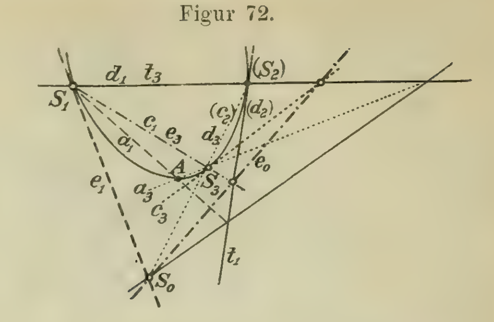
α) die Tangente in einem beliebigen von vier gegebenen Punkten einer Kurve, wenn durch einen derselben die Tangente gegeben ist,

β) den zweiten Schnittpunkt mit der Kurve auf einer beliebigen Schnittgeraden, wenn der erste Schnittpunkt auf dieser Geraden und zwei weitere Kurvenpunkte, sowie durch zwei von diesen drei Kurvenpunkten die Tangenten gegeben sind.

Erkl. 205. Auch für obenstehende Ueberlegung gelten — mit den entsprechenden Abänderungen — die Erkl. 196 und 197. — In der Anwendung auf die Konstruktion erweisen sich die Sätze 23b und 23c bezw. 24b und 24c als völlig gleichwertig — solange man sie durch Bezifferung von 1 bis 6 auf die Sechsecksätze zurückführt. Würde man das nicht thun, so könnten zwar beide Sätze b und c die Auffindung einer fünften Tangente bezw. eines fünften Kurvenpunktes leisten; die Auffindung eines Berührungselementes aber wäre mittels der Sätze 23b, 24b nur auf benachbarten, mittels 23c, 24c nur auf gegenüberliegenden Viereckselementen möglich. Jedoch auch dieser Umstand verliert seine Beschränkung, da aus vier Tangenten bezw. vier Kurvenpunkten je dreierlei einfache Vierecke gebildet werden können, darunter stets ein solches, in welchem zwei beliebige Elemente je nach Wahl zu gegenüberliegenden oder zu benachbarten Elementen des einfachen Vierecks gemacht werden können.

Erkl. 206. In Figur 69a und 70a ist die Auffindung desselben Berührungselementes doppelt dargestellt, nämlich nach dem wichtigeren Satz 23c, 24c durch Ziffern ohne Klammer, und nach dem minder folgenreichen Satz 23b, 24b durch Ziffern in Klammer. Beidemale ist 6, 1 bezw. VI, I das gesuchte Berührungselement. — Angedeutet ist in der Figur auch das vierte Element, welches im ersteren Falle mit den drei vorhergehenden vereinigt liegt: in Figur 69a geht die Verbindungsgerade der Berührungspunkte auf der links und rechts berührenden Tangente ebenfalls durch Punkt R; in Figur 70a liegt der Schnittpunkt der oben und unten berührenden Tangenten ebenfalls auf der Geraden r. — Gleiche Andeutung befindet sich in Figur 69b bezw. 70b, wofür die doppelte Bezifferung bereits in Erkl. 203 erklärt wurde.

Figur 71.



Figur 72.

Frage 62. Welche Folgerungen ergeben die bisherigen Sätze von Brianchon und Pascal fürs Dreiseit bezw. Dreieck?

Antwort.

1. Lässt man in der Figur für das Vierseit mit benachbarten Doppelelementen (Figur 67a bezw. Figur 69a mit der eingeklammerten Bezifferung) auch noch die Tangenten a und c bezw. 2 und 3 durch Verschiebung der erstern längs der Kurve zusammenrücken, so verbleibt nur mehr ein der Kurve umgeschriebenes Dreiseit mit drei doppelt zu zählenden Tangenten 1, 2; 3, 4; 5, 6. Und die in jeder Lage durch einen Punkt gehenden Verbindungsgeraden der Gegenecken (1, 2) und (4, 5), (2, 3) und (5, 6), (3, 4) und (6, 1) werden zu Verbindungsgeraden jeder Ecke mit dem Berührungspunkt der Gegenseite.

2. Um dasselbe Ergebnis ohne den Grenzübergang zu erhalten, kann man ausgehen von Figur 67a (Seite 102). Dort sind $t_1 t_2$ zwei projektivisch verwandte Punktreihen; und ebensolche Punktreihen entstehen nach Satz 16 auch auf zwei beliebigen Tangenten als neuen Trägern. Wählt man in Figur 71 als solche die bisherige Gerade t_1 und die Tangente $C_1 C_2$ als t_3, so sind schon vorhanden als zugeordnete Punkte auf t_1 und t_3 die Schnittpunkte A_1 u. A_3 mit der vorherigen Tangente $A_1 A_2$, die Schnittpunkte D_1 und D_3 mit dem vorherigen Träger t_2, sowie die Punkte E_1 und E_3, indem der Berührungspunkt E_1 auf t_1 der zugeordnete Punkt zum Schnittpunkt der Träger $t_1 t_3$ sein muss. Wählt man nun als Projektionsscheitel S_1 für t_1 den Berührungspunkt D_2 auf dem vor-

1. Lässt man in der Figur für das Viereck mit benachbarten Doppelelementen (Figur 68a bezw. Figur 70a mit der eingeklammerten Bezifferung) auch noch die Kurvenpunkte A und C bezw. II und III durch Verschiebung des erstern längs der Kurve zusammenrücken, so verbleibt nur mehr ein der Kurve eingeschriebenes Dreieck mit drei doppelt zählenden Eckpunkten I, II; III, IV; V, VI. Und die in jeder Lage auf einer Geraden liegenden Schnittpunkte der Gegenseiten I, II und IV, V; II, III und V, VI; III, IV und VI, I werden zu Schnittpunkten jeder Seite mit der Tangente in der Gegenecke.

2. Um dasselbe Ergebnis ohne den Grenzübergang zu erhalten, kann man ausgehen von Figur 68a (Seite 102). Dort sind S_1 und S_2 zwei projektivisch verwandte Strahlenbüschel; und ebensolche Strahlenbüschel entstehen nach Satz 16a auch in zwei beliebigen Kurvenpunkten als neuen Scheiteln. Wählt man in Figur 72 als solche den bisherigen Scheitel S_1 und den Kurvenpunkt $C (c_1 c_2)$ als S_3, so sind schon vorhanden als zugeordnete Strahlen in S_1 und S_3 die Verbindungsgeraden a_1 und a_3 mit dem vorigen Kurvenpunkte A, die Verbindungsgeraden d_1 u. d_3 mit dem vorherigen Scheitel S_2, sowie die Geraden e_1 u. e_3, indem die Tangente e_1 durch S_1 der zugeordnete Strahl zum Verbindungsstrahl der Scheitel $S_1 S_3$ sein muss. Wählt man nun als schneidenden Träger t_1 für S_1

herigen Träger t_2, als S_3 für t_3 den Schnittpunkt D_1 der beiden vorherigen Träger t_1t_2, so müssen die Büschel S_1 und S_3 ebenfalls projektivisch sein: und zwar müssen sie, weil die Strahlen S_1D_1 und S_3D_3 zusammenfallen, sich in perspektivischer Lage befinden. Die Perspektivitätsachse t_0 wird geliefert durch die Schnittpunkte der Strahlen S_1A_1, S_3A_3 und S_1E_1, S_3E_3, sie ist also dieselbe Gerade t_0, die vorher zur Vermittlung der Reihen t_1 und t_2 gedient hatte. — Nun ist der Berührungspunkt auf t_3 der entsprechende Punkt C_3 zum Schnittpunkt C_1 der Träger t_1t_3. Um ihn zu finden, zieht man S_1C_1, schneidet diese Gerade mit t_0 und verbindet den Schnittpunkt E_0 mit S_3: der Schnittpunkt von S_3E_0 mit t_3 ist C_3. Und nun gehen wieder im umgeschriebenen Dreieck $S_3C_1D_3$ durch einen Punkt E_0 die drei Verbindungsgeraden der Berührungspunkte $C_3E_1S_1$ mit den gegenüberliegenden Eckpunkten $S_3D_3C_1$.

die Tangente d_2 im vorherigen Scheitel S_2, als t_3 für S_3 den Verbindungsstrahl d_1 der beiden vorherigen Scheitel S_1S_2, so müssen die Punktreihen t_1 und t_3 ebenfalls projektivisch sein; und zwar müssen sie, weil die Punkte (t_1d_1) und (t_3d_3) zusammenfallen, sich in perspektivischer Lage befinden. Der Projektionsscheitel S_0 wird geliefert durch die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte (t_1a_1), (t_3a_3) und (t_1e_1), (t_3e_3), er ist also derselbe Punkt S_0, der vorher zur Vermittlung der Büschel S_1 und S_2 gedient hatte. — Nun ist die Tangente in S_3 der entsprechende Strahl c_3 zum Verbindungsstrahl c_1 der Scheitel S_1S_3. Um sie zu finden, schneidet man t_1 mit c_1, verbindet den Schnittpunkt mit S_0 und schneidet die Verbindungsgerade e_0 mit t_3; die Verbindungsgerade von (t_3e_0) mit S_3 ist c_3: Und nun liegen wieder im eingeschriebenen Dreieck $t_3c_1d_3$ auf einer Geraden die drei Schnittpunkte der Tangenten $c_3e_1t_1$ mit den gegenüberliegenden Seiten $t_3d_3c_1$.

3. Man erhält also den letzten Satz:

Satz 23d. (Satz von Brianchon fürs Dreiseit.) In jedem einer Kurve zweiter Klasse umgeschriebenen Dreiseit gehen die Verbindungsgeraden der Eckpunkte mit den Berührungspunkten auf den Gegenseiten durch einen Punkt.

3. Man erhält also den letzten Satz:

Satz 24d. (Satz von Pascal fürs Dreieck.) In jedem einer Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen Dreieck liegen die Schnittpunkte der Seiten mit den Tangenten in den Gegenecken auf einer Geraden.

Erkl. 207. Wenn man in den Vierecken mit gegenüberliegenden Doppelelementen (Figur 67b, 68b, 69b und 70b; 69a und 70a mit der Bezifferung ohne Klammer) noch ein Element mit einem andern zusammenfallen lässt, so entsteht keinerlei neue Beziehung, indem von vornherein drei Punkte mit einem vierten verbunden bezw. drei Gerade mit derselben vierten geschnitten werden, so dass nun selbst die drei Elemente vereinigt liegen müssen. Daher können die Sätze 23d, 24d nicht aus 23c, 24c, sondern nur aus 23b und 24b abgeleitet werden.

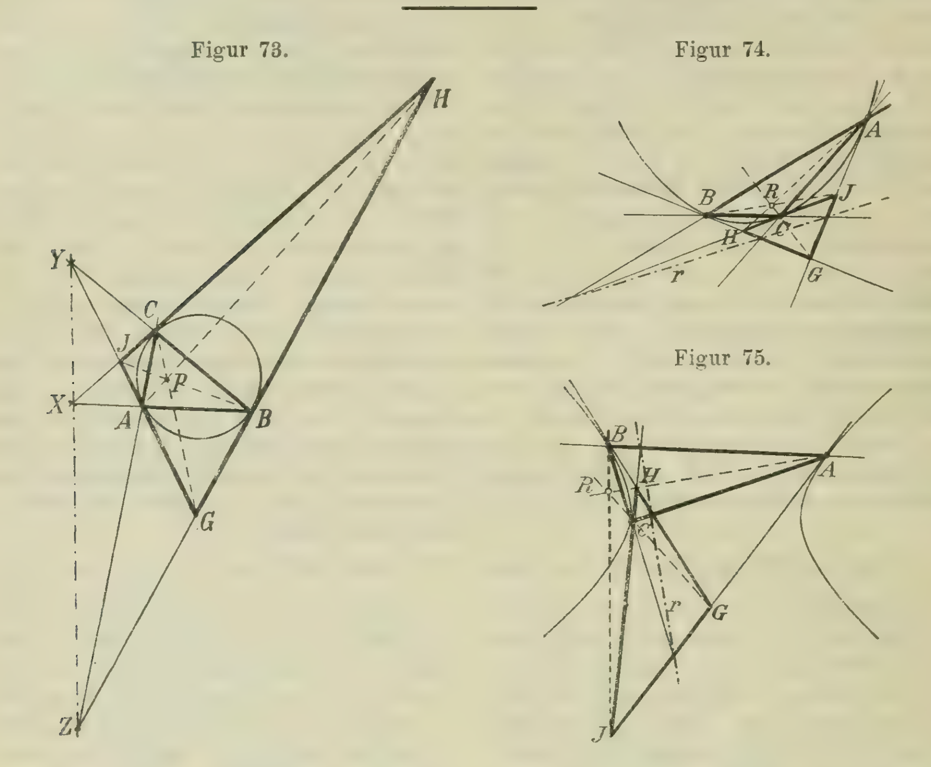
Erkl. 208. Dass für den direkten Beweis der Sätze 23d, 24d eine neue Betrachtungsweise aufgestellt werden muss, rührt daher, dass die bis dahin verwendeten Verschiedenheiten der Konstruktionsarten aufgebraucht sind. Die vermittelnden Elemente $S_1S_2t_0$ bezw. $t_1t_2S_0$ haben alle möglichen Lagen durchgemacht, welche sie auf Grund der gegebenen Elemente bei festen Grundgebilden einnehmen können, folglich muss der neue Beweis durch Wechsel der Grundgebilde geliefert werden.

Erkl. 209. Eine ähnliche Betrachtung, wie die obenstehende, ist schon gemacht worden in Erkl. 165 durch Uebergang von der Figur 29 auf Figur 53. Um die metrischen Eigenschaften der Asymptoten zusammen zu erhalten, ist dort eine Art Vorausnahme des obenstehenden eingetreten und durch den Grenzübergang an Figur 53b erwiesen worden. Nunmehr ist gezeigt, dass jene Beziehung allgemeine Geltung besitzt, und man kann daher auf Grund der Figur 53b bezw. der Vierecke $XYCA$, $YZAB$, $ZXBC$ in Figur 73 die in Erkl. 126 gegebene Andeutung in Gestalt der allgemeinen Sätze aufstellen:

Satz. In jedem einer Kurve umgeschriebenen Dreiseit entsteht zu den zwei Eckpunkten und dem Berührungspunkt auf einer Tangente der vierte harmonische Punkt durch den Schnittpunkt mit der Verbindungsgeraden der Berührungspunkte der beiden andern Tangenten.

Und dualistisch:

Satz. In jedem einer Kurve eingeschriebenen Dreieck entsteht zu den zwei Seiten und der Tangente in einem Eckpunkt der vierte harmonische Strahl durch die Verbindungsgerade mit dem Schnittpunkt der Tangenten in den beiden andern Eckpunkten.



Figur 73. Figur 74. Figur 75.

Frage 63. Welche Anwendung gestatten die Sätze von Brianchon und Pascal fürs Dreieck auf die Konstruktion von Kurvenelementen?

Antwort.

1. Für die Auffindung des Berührungspunktes C_3 in Fig. 71 kann man die Konstruktion der Zwischenelemente $S_1 S_3 t_0$ unterlassen und die drei in Betracht kommenden Tangenten als Seiten des Dreiecks auffassen, wobei jede doppelt gezählt wird, und zwar diejenige mit 6, 1, auf welcher der Berührungspunkt gesucht wird. Dann liefern (1, 2) und (4, 5), (2, 3) und (5, 6) den Punkt R des Brianchon, und dessen Verbindungsgerade mit (3, 4) geht durch den Berührungspunkt (6, 1).

2. Vermittelst des Satzes von Brianchon fürs Dreiseit findet man also:

1. Für die Auffindung der Tangente c_3 in Figur 72 kann man die Konstruktion der Zwischenelemente $t_1 t_3 S_0$ unterlassen und die drei in Betracht kommenden Kurvenpunkte als Ecken des Dreiecks auffassen, wobei jede doppelt gezählt wird, und zwar diejenige mit VI, I, in welcher die Tangente gesucht wird. Dann liefern I, II und IV, V; II, III und V, VI die Gerade r des Pascal, und deren Schnittpunkt mit III, IV liegt auf der Tangente VI, I.

2. Vermittelst des Satzes von Pascal fürs Dreieck findet man also:

den Berührungspunkt auf einer beliebigen von drei gegebenen Tangenten einer Kurve, wenn auf den beiden andern der Berührungspunkt gegeben ist.

die Tangente in einem beliebigen von drei gegebenen Punkten einer Kurve, wenn in den beiden andern die Tangente gegeben ist.

Erkl. 210. Die Anwendung der obenstehenden Vorschrift ist eine so einfache, dass eine Wiedergabe an einer Figur mit der Bezifferung entbehrlich erscheint. Dagegen ist in den Figuren 73 bis 75 die Gültigkeit beider dualistisch gegenüberstehenden Sätze je an derselben Figur gezeigt: ABC ist jeweils das eingeschriebene Dreieck und hat die Pascalsche Gerade XYZ bezw. r; GHI ist das umgeschriebene Dreieck und hat den Punkt des Brianchon P bezw. R.

Erkl. 211. Da für die Sätze 23d, 24d stets drei Tangenten nebst ihren Berührungspunkten bezw. drei Kurvenpunkte nebst ihren Tangenten auftreten, so muss für die Darstellung beider Sätze ganz die gleiche Gruppe von Kurvenelementen gezeichnet werden. Dies geschieht in Figur 73 am Kreis mit einem umgeschriebenen Tangentendreiseit und eingeschriebenen Dreieck (Punkt P innerhalb, Gerade r ausserhalb der Kurve); in Figur 74 an einem Kurvenbogen, der ebensowohl einer Ellipse als Parabel oder Hyperbel angehören mag, mit einem angeschriebenen Tangentendreiseit und eingeschriebenen Dreieck; in Figur 75 an einer Hyperbel wieder mit angeschriebenem Tangentendreiseit, und mit eingeschriebenem Dreieck mit Eckpunkten auf getrennten Aesten. Jedesmal liegt die Gerade r ausserhalb der Kurve, und das muss sein, da ja Tangentenschnittpunkte nie im Innern einer Kurve vorhanden sein können. Und jedesmal liegt Punkt R innerhalb der Kurve; dass dies mit Notwendigkeit aus dem vorigen folgt, kann mit dem Satze in Erkl. 209 (rechts) oder einfacher später mit Hilfe von Pol und Polare gezeigt werden.

Erkl. 212. Die Rückführung aller Sätze 23 bis 23d, 24 bis 24d auf die Sechsecksätze behufs Konstruktion der neuen Kurvenelemente ermöglicht diese Konstruktionen auszuführen, ohne jedesmal zu berücksichtigen, welcher der Sätze gerade zur Anwendung gelangt. Die andere Art, wo die Sätze stets einzeln namhaft gemacht werden müssen, ist natürlich auch anwendbar, erfordert aber stets eingehendere Feststellung der Vieleckselemente.

Aufgaben-Sammlung.

I. Aufgaben über die harmonischen Gebilde.

(Zu Abschnitt 1.)

Aufgabe 1. Man soll in den Figuren 76 und 77 einige ausser $abcd$ vorhandenen vollständigen Vierseite nebst ihren harmonischen Punktgruppen aufstellen.

Erkl. 213. In nebenstehender Aufzählung werden nur die Seiten $abcdef$ verwendet, und bei der Schreibung der harmonischen Punkte sind jeweils die beiden ersten und die beiden letzten zusammengehörige Paare; die beiden Paare getrennt durch Strichpunkt, die beiden Punkte eines Paares durch Komma. Wo die Figur für die Schnittpunkte keine besondere Bezeichnung enthält, sind die Punkte nur als Schnittpunkte der beiden Nebenseiten angeführt, z. B. (ci) als Schnittpunkt der beiden Geraden c und i. — Auch treten einige Schnittpunkte auf, welche in der Figur erst durch Verlängerung der Seiten erhalten werden: so (bl), (ch), (dh).

Auflösung. Das vollständige Vierseit $abcd$ der Fig. 77 hat die sieben Geraden $abcdefi$. Diese können auf verschiedene Art zu vollständigen Vierseiten zusammengefasst werden, ausser $abcd$ selbst. Man hat nämlich:

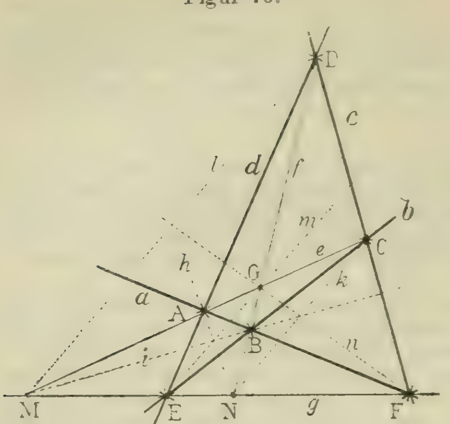
1. Vollständiges Vierseit $abeg$ mit Nebenseiten c, d, i und harmonischen Punkten:

auf c) $F, C; D, (ci)$, auf d) $E, A; D, (di)$,
auf i) $M, B; (ci), (di)$.

2. Vollständiges Vierseit $acef$ mit Nebenseiten b, d, n und harmonischen Punkten:

auf b) $C, B; E, (bn)$ auf d) $D, A; E, (dn)$
oder $C, B; E, J$, oder $D, A; E, L$.
auf n) $F, G; (nb), (nd)$
oder $F, G; J, L$.

Figur 76.



Vollständiges Viereck.

● 4 Ecken: A, B, C, D.

——— 6 Seiten: a, b, c, d, e, f.

○ 3 Nebenecken: E, F, G.

—·—·— 3 Verbindungsgeraden dieser Nebenecken: g, m, n.

—·×·— 6 Schnittpunkte der Seiten mit letzteren: H, J, K, L, M, N.

Figur 77.

Vollständiges Vierseit.

——— 4 Seiten: a, b, c, d.

✻ 6 Ecken: A, B, C, D, E, F.

—— 3 Nebenseiten: e, f, g.

• 3 Schnittpunkte dieser Nebenseiten: G, M, N.

······ 6 Verbindungsgeraden der Ecken mit letzteren: h, i, k, l, m, n.

Erkl. 214. Jede der vier Hauptseiten des Vierseits $abcd$, Fig. 77, tritt im nebenstehenden dreimal als Nebenseite mit je andern vier harmonischen Punkten auf. Dabei tritt jede der drei auf einer Seite enthaltenen Ecken des Vierseits einmal als trennender Punkt der beiden andern auf, mit einem zugeordneten vierten Punkt, nämlich in folgenden Anordnungen:

auf a)

A, B; $F, (am)$ — A, F; $B, (al)$ — B, F; $A, (ak)$.

auf b)

B, C; $E, (bn)$ — B, E; $C, (bh)$ — C, E; $B, (bl)$,

auf c)

C, D; $F, (cm)$ — C, F; $D, (ci)$ — D, F; $C, (ch)$.

auf d)

A, D; $E, (dn)$ — A, E; $D, (di)$ — D, E; $A, (dk)$.

3. Vollständiges Vierseit $adfg$ mit Nebenseiten b, c, h und harmonischen Punkten:

auf b) E, B; $C, (bh)$, auf c) D, F; $C, (ch)$,
auf h) A, N; (bh), (ch).

4. Vollständiges Vierseit $bcfg$ mit Nebenseiten a, d, k und harmonischen Punkten:

auf a) F, B; $A, (ak)$, auf d) D, E; $A, (dk)$
auf k) C, N; (ak), (dk).

5. Vollständiges Vierseit $bdef$ mit Nebenseiten a, c, m und harmonischen Punkten:

auf a) A, B; $F, (am)$ auf c) D, C; $F, (cm)$
oder A, B; F, H, oder D, C; F, K,

auf m) E, G; (am), (cm)
oder E, G; H, K.

6. Vollständiges Vierseit $cdeg$ mit Nebenseiten a, b, l und harmonischen Punkten:

auf a) A, F; $B, (al)$, auf b) C, E; $B, (bl)$.
auf l) D, M; (al), (bl).

Aufgabe 2. Man soll noch weitere Vierseite der Figuren 76 und 77 aufstellen nebst ihren harmonischen Punkten.

Andeutung. Je vier Geraden, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen, sind zu verwenden.

Aufgabe 3. Man suche in den Figuren 76 und 77 harmonische Punktgruppen der Art, dass zu demselben ersten Punktepaar verschiedene zweite Paare zugeordnet erscheinen.

Auflösung. Die in der gestellten Aufgabe verlangte dreifache Paarung muss durch sechs Punkte erfüllt werden. Solche Anzahl

Erkl. 215. In nebenstehender Auflösung ist aus der Fig. 77 als Thatsache der Zeichnung angenommen, dass die sechs Geraden h, i, k, l, m, n zu je dreien durch einen der vier Punkte gehen (him), (ikn), (klm), (hln), dass sie also die sechs Seiten des von diesen vier Punkten gebildeten vollständigen Vierecks bilden. Der Nachweis, dass diese Gruppierung notwendig stattfinden muss, könnte zwar auch schon mittels Satz 1 an dieser Stelle geführt werden; er ergibt sich aber an einer späteren Stelle so viel einfacher, dass man den Beweis lieber bis dorthin aufschiebt und hier die Thatsache gelten lässt. (Vergl. die dualistische Uebertragung des Satzes der Erkl. 20 in Aufgabe 9, sowie Aufgabe 10.)

Erkl. 216. Sechs Punkte von der Art, dass zu zweien derselben als erstem Paar je zwei von den übrigen als zweites Paar vier harmonische Punkte ergeben, bilden eine ganz bemerkenswerte Zusammenstellung. Dieselbe wird später (siehe den nächsten Band dieses Lehrbuches) zu ganz besonderen Erörterungen Anlass bieten. Man nennt solche Gruppen von Punkten (oder Strahlen) eine Involution oder eine involutorische Gruppe. Zugleich bildet das Auftreten dieser Gruppen hier nur einen ganz speziellen Fall einer allgemeinen Eigenschaft des vollständigen Vierecks und Vierseits, von welcher an der genannten späteren Stelle ebenfalls zu handeln sein wird. (Vergl. Erkl. 27 zu Fig. 7.)

findet sich auf den Geraden a bis d der Figuren 76 und 77; jedoch sind nach voriger Aufgabe dort die Paare jedesmal vertauscht. Auf den Geraden e, f, g zeigt die Figur überhaupt nur vier Schnittpunkte, also müssen die Geraden h bis n geprüft werden.

In der That hat man z. B. auf der Geraden n einmal — wie schon vorige Aufgabe zeigte — wegen des Vierseits $acef$ die harmonischen Punkte F, G; (nb), (nd) und ferner wegen des Vierseits $hikl$ mit Nebenseiten gmn auf der letzteren auch die harmonische Gruppe F, G; (nik), (nhl). Also bestehen zu demselben ersten Punktpaare F und G die zweierlei zweiten Paare (nb), (nd) und (nik), (nhl). — Dieselbe Erscheinung zeigt sich auf jeder der sechs Geraden h bis n, nämlich:

auf h)
zu A, N die Paare (hb), (hc) und (him), (hln),

auf i)
zu B, M die Paare (ic), (id) und (imh), (ikn),

auf k)
zu C, N die Paare (ka), (kd) und (kin), (klm),

auf l)
zu D, M die Paare (la), (lb) und (lhn), (lkm),

auf m)
zu E, G die Paare (ma), (mc) und (mhi), (mkl).

Aufgabe 4. Man soll die Definition harmonischer Strahlen in dualistischer Weise zu jener der harmonischen Punkte durchführen.

Auflösung. Durch dualistische Uebertragung der Antworten 2 u. ff. dieses Lehrbuches erhält man folgende Aussagen:

Unter vier harmonischen Strahlen versteht man vier Strahlen eines Punktes, welche zu einem einfachen Vierseit solche Lage haben, dass auf dem ersten und dritten je zwei Gegenecken, auf dem zweiten und vierten die beiden übrigen Schnittpunkte der Seiten liegen. — Bezieht man dieselbe Ausdrucksweise auf ein vollständiges Vierseit, so bleiben die beiden ersten Paare von Gegenecken bestehen, und die übrigen Schnittpunkte der Seiten werden zum letzten Paare derselben, so dass folgende Fassung entsteht:

Unter vier harmonischen Strahlen versteht man vier Strahlen eines Punktes, welche zu einem vollständigen Vierseit solche Lage haben, dass auf dem ersten und dritten je zwei Gegenecken, auf dem zweiten und vierten die beiden übrigen Gegenecken des Vierseits liegen. — Nun ist aber das einfache Vierseit identisch mit dem einfachen Viereck. Und wenn man aus dessen

Erkl. 217. Bezieht man die erste bezw. zweite Definition auf das (einfache bezw. vollständige) Vierseit $abcd$ der Figuren 76 u. 77, so sind vier harmonische Strahlen:

1. $fenm$ durch G, denn
auf f liegen die Gegenecken (ab) und (cd),
auf e liegen die Gegenecken (bc) und (da),
auf n und m liegt je eine der (übrigen Seitenschnittpunkte) Gegenecken (ac) und (bd).

2. $egil$ durch M, denn
auf e liegen die Gegenecken A und C,
auf g liegen die Gegenecken E und F,
auf i und l liegt je eine der Gegenecken B und D.

3. $gfhk$ durch N, denn
auf g liegen die Gegenecken E und F,
auf f liegen die Gegenecken B und D,
auf h und k liegt je eine der Gegenecken A und C.

Durch Auswahl anderer Vierseite erhält man auch wieder andere Gruppen von je vier harmonischen Strahlen.

Erkl. 218. Ebenso, wie in Figur 3 (Seite 3) für die Definition der harmonischen Punkte die verschiedenen Lagen des einfachen Vierecks zur Geraden $EFHK$ dargestellt sind, könnte man auch aus den Figuren 76 und 77 die Unterscheidung für die harmonischen Strahlen entnehmen, je nachdem ihr Scheitelpunkt, wie G im Innern oder wie E, F ausserhalb der entstehenden Vierecksfläche $ABCD$, gelegen ist. Die beiden letzten Fälle sind völlig gleichartig und dadurch für den Anfänger etwas übersichtlicher, dass nur die Halbstrahlen der Geraden (z. B. von F aus) auftreten, während beim Scheitel G jede der Geraden nach beiden Seiten ausgezogen erscheint. Aber gerade der letztere Fall ist der bemerkenswertere, der auch für spätere Anwendungen festgehalten werden muss.

vier Eckpunkten ein vollständiges Viereck bildet, so werden die zwei übrigen Seitenschnittpunkte zu zwei Nebenecken; und der Schnittpunkt, durch welchen die vier Geraden gehen, wird zur dritten Nebenecke. Dadurch erhält man folgende Ausdrucksweise:

Unter vier harmonischen Strahlen versteht man die in jeder Nebenecke eines vollständigen Vierecks entstehende Strahlengruppe, welche gebildet wird von den zwei Seiten des Vierecks und den Verbindungsgeraden der beiden andern Nebenecken mit der ersten Nebenecke.

Aufgabe 5. Man soll durch Aufstellung verschiedener Vierecke in den Figuren 76 und 77 neue Gruppen harmonischer Strahlen finden.

Andeutung. Man verfahre dualistisch zu Aufgabe 1 und 2.

Aufgabe 6. Die Uebereinstimmung der Ergebnisse der beiden Definitionen harmonischer Strahlen in Antwort auf Frage 8 und Aufgabe 4 nachzuweisen.

Erkl. 219. Man erkennt aus nebenstehender Auflösung, dass man auch zum gleichen Ziele gelangen könnte, indem man ursprünglich vier harmonische Geraden nach Aufgabe 4 definierte und vier harmonische Punkte ganz analog der Antwort auf Frage 8 als Schnittpunkte von vier harmonischen Geraden mit einer beliebigen Geraden definierte. — Vor der unmittelbar dualistischen Definition hätte auch dieser Gedankengang den Vorzug der Vereinfachung für eine Reihe von Beweisen, die man sonst doppelt führen müsste (vergl. auch Aufgabe 15).

Auflösung. 1. Die Definition der harmonischen Strahlen mittels des Vierecks in Aufgabe 4 stimmt überein mit der Definition aus vier harmonischen Punkten in Antwort auf Frage 8, denn auch bei dieser neuen Konstruktionsweise entstehen $MENF$ oder $EHGK$ oder $FJGL$ als harmonische Punkte nach früherer Definition, und die nach Aufgabe 4 entstehenden Strahlen $emfn$ oder $ganc$ oder $gbmd$ sind dabei nichts anderes als die Verbindungsstrahlen der Scheitel G oder F oder E mit jenen Punkten.

2. Und wird umgekehrt nach Antwort auf Frage 8 ein beliebiger Punkt G mit vier harmonischen Punkten $MENF$ verbunden, so erzeugt die Hinzunahme eines beliebigen Strahles ED ein Viereck, in welchem auf Grund des Satzes 1 dem Punkte G diejenige Lage zukommt, welche er in der Definition der Aufgabe 4 besitzt.

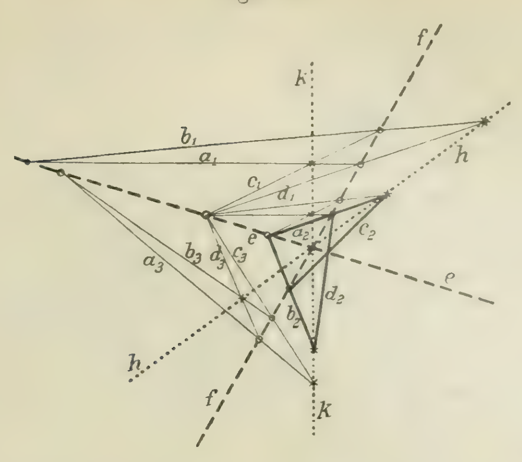
Aufgabe 7. Die Eindeutigkeit des vierten harmonischen Strahles in der Definition der Aufgabe 4 nachzuweisen.

Erkl. 220. In Figur 78, welche die dualistische Figur bildet zu Figur 4 (Seite 4), sind gegeben die Geraden efh. Im linksseitigen Winkelraum von (ef), der von der Geraden h innen geteilt wird, ist ein Viereck $a_3 b_3 c_3 d_3$ gezeichnet, in welchem der auf h liegende Schnittpunkt der Gegenseiten die Lage des Punktes G

Auflösung. Dieser Nachweis wird geführt durch den dualistischen Satz zu Satz 1, nämlich:

Satz. Liegen auf zwei festen Geraden e, f eines Punktes je zwei Gegenecken und auf einem dritten Strahl h desselben Punktes eine fünfte Ecke eines vollständigen Vierseits, so liegt dessen sechste Ecke jedesmal auf derselben Geraden k durch den Punkt.

Figur 78.



aus den Figuren 76 und 77 hat, und daher der die Gerade k liefernde Punkt und der Scheitel der vier harmonischen Geraden die Lage der Punkte E bezw. F jener Figur; im oberen Nebenwinkelraum von (ef), der von der Geraden h äusserlich geteilt wird, sind zwei Vierecke gezeichnet, in welchen umgekehrt der auf h liegende Punkt und der Scheitel der vier harmonischen Geraden die Lage von E oder F, und der auf k fallende Punkt die Lage von G (der Figuren 76 und 77) einnimmt. Endlich ist im innersten Teil der Figur ein Viereck $a_2 b_2 c_2 d_2$ gezeichnet, für welches die auf h und k liegenden Punkte beide die äussere Lage (E oder F), dagegen der Scheitel der vier harmonischen Geraden die innnere Lage (von G) hat. Man hat also die Darstellung für beide Konstruktionsfälle der Erkl. 218.

Oder in anderer Ausdrucksweise (für ein vollständiges Viereck):

Satz. Haben zwei (oder mehrere) vollständige Vierecke eine gemeinsame Nebenecke und durch dieselbe gemeinsam zwei Seiten e, f und die Verbindungsgerade h mit einer der zwei anderen Nebenecken, so liegt auch die dritte Nebenecke jedesmal auf derselben Geraden k durch die erste Nebenecke.

Der Beweis wäre auch hier in doppelter Weise zu führen nach Analogie der Antwort auf Frage 4: unmittelbar durch räumliche Projektion oder durch Berufung auf die Sätze der Antwort auf Frage 29, 6 des I. Teils.

Aufgabe 8. Man soll einen direkten Beweis für die Sätze der vorigen Aufgabe aufstellen.

Aufgabe 9. Die Gleichwertigkeit der beiden Paare von vier harmonischen Strahlen soll unmittelbar aus der Definition nachgewiesen werden.

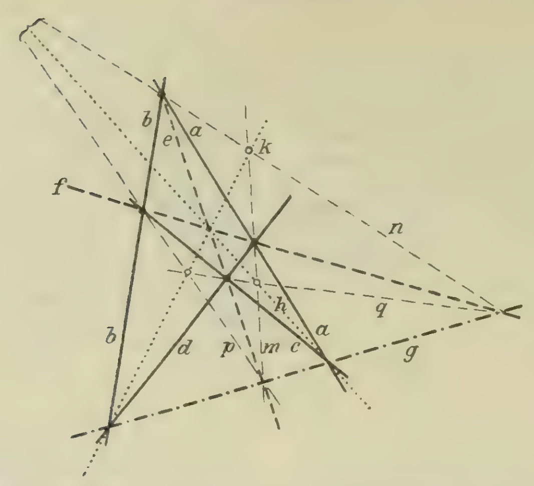
Erkl. 221. In allen den Fällen, wo eine Unterscheidung der beiden zusammengehörigen Paare der vier harmonischen Strahlen erforderlich wird, ist auch eine verschiedene Art von Zeichnung derselben angeraten. So sind in den Figuren 78 und 79 die Strahlen e, f des einen Paares durch gestrichelte, die Strahlen h, k des andern Paares durch punktierte Geraden angegeben — entsprechend der Bezeichnung der beiden Paare unter vier harmonischen Punkten durch Ring und Stern.

Auflösung. Sind die vier harmonischen Geraden $efhk$ in Figur 79 konstruiert nach Art des Vierseits $a_2 b_2 c_2 d_2$ in Figur 78, so verbinde man die Schnittpunkte (bd) und (ac) und schneide diese Gerade g mit e und f. Dadurch erhält man:

1. Vierseit $angm$ mit Gegenecken
   (an) und (mg) auf e,
   (am) und (ng) auf f
   und fünfter Ecke (ag) auf h;

folglich muss die sechste Ecke (mn) auf k liegen.

Figur 79.



Erkl. 222. Die Figur 79 zeigt bis ins einzelnste der Buchstabierung die dualistische Durchführung gegen Fig. 6 (Seite 9). Während aber bei Figur 6 zum äusseren Viereck $ABCD$ ein inneres $PQMN$ hinzukommt, so tritt in Figur 79 zu einem inneren Vierseit $abcd$ ein äusseres $pqmn$. Man wird also umgekehrt auch bei Figur 6 ein äusseres Viereck mit Seiten HB, HD; KA, KC zufügen können — und dessen vier Eckpunkte müssten nach Figur 79 zu je zweien liegen auf EG und FG; und man würde bei Figur 79 ein inneres Vierseit zufügen können mit Ecken (hb) (hd), (ka) (kc) — und dessen vier Seiten müssten nach Figur 6 zu je zweien hindurchgehen durch (eg) und (fg).

Erkl. 223. Vergleicht man Figur 79 mit Figur 77, so sind in ersterer Figur $abcd$ die Seiten, efg die Nebenseiten eines vollständigen Vierseits, und man erhält als veränderten Ausdruck der nebenstehenden Auflösung den Beweis für den dualistischen Satz zu jenem in Erkl. 20 (vergl. die Geraden him, hln, ckn, klm der Figur 77).

Satz. Im vollständigen Vierseit gehen die Verbindungsgeraden der Ecken mit den Schnittpunkten der Nebenseiten zu je dreien durch einen von vier Punkten.

2. Vierseit $mgqd$ mit Gegenecken
(mg) und (dq) auf e,
(md) und (gq) auf f
und einer fünften Ecke (dg) auf k;
folglich muss die sechste Ecke (mq) auf h liegen.

3. Vierseit $nbpg$ mit Gegenecken
(nb) und (gp) auf e,
(bp) und (ng) auf f
und einer fünften Ecke (gb) auf k;
folglich muss die sechste Ecke (np) auf h liegen.

4. Vierseit $gpcq$ mit Gegenecken
(gp) und (qc) auf e,
(pc) und (gq) auf f
und fünfter Ecke (cg) auf h;
folglich muss die sechste Ecke (pq) auf k liegen.

Von dem neuen Vierseit $mnpq$ liegen nun umgekehrt je zwei Gegenecken auf h und k, die zwei übrigen auf e und f, und dabei sind gegen die ursprüngliche Definition die Geradenpaare ef und hk gerade vertauscht.

Aufgabe 10. Man soll die Sätze in Erkl. 20 und 223 durch Satz 3 beweisen.

Andeutung. Die Sätze ergeben sich durch Projektion der in Antwort auf Frage 2 bezw. Aufgabe 1 festgestellten harmonischen Gruppen.

Aufgabe 11. Man beweise, dass die Punkte G der Figur 7 (Seite 11) alle auf einer Geraden durch E liegen müssen.

Andeutung. Analog der vorigen Aufgabe zu lösen.

Aufgabe 12. Man erörtere die Lage der vierten harmonischen Geraden zu einer veränderlichen dritten, wenn die beiden Geraden des ersten Paares fest blieben.

Auflösung. In Fig. 7 (S. 11) sind BE, BF; BH_x, BK_x oder CE, CF; CH_x, CK_x stets vier harmonische Geraden — ob man die Definition der Antwort auf Frage 8 oder die Aufgabe 4 zugrunde legt. Also werden auch die Geraden nach E und F stets getrennt durch jene nach H und K: Fällt der dritte Strahl mit einem der zwei ersten zusammen, so fällt der vierte mit demselben zusammen; bewegt sich der dritte von einem der zwei ersten weg und zum andern hin, so bewegt sich der vierte vom gleichen Strahl weg und ebenfalls zum gleichen andern hin, aber jedesmal in entgegengesetzter Umlaufsrichtung, so dass jeweils der Winkel des dritten und vierten (und sein Scheitelwinkel) vergrössert, ihr Nebenwinkel (und sein Scheitelwinkel) verkleinert wird, indem die eine Bewegung im einen, die andere im andern von zwei Nebenwinkeln der Strahlen des ersten Paares und in entgegengesetzter Richtung vor sich geht.

Erkl. 224. Die Masseigenschaften der Winkelhalbierenden und Senkrechten dazu können selbstverständlich erst bei der metrischen Behandlung auftreten (s. Antwort auf Frage 16). Dort stellt sich heraus, dass bei dieser Bewegung des dritten und vierten Strahles jeder gleichzeitig zum Halbierungsstrahl desjenigen Winkels wird, innerhalb dessen seine Bewegung vor sich geht. Wenn also in Figur 7 etwa der Strahl BH_5 den Winkel EBF halbierte, so halbiert auch der zugehörige Strahl BK_5 den Winkel EBC; oder wenn etwa CH_5 den Winkel ECF halbierte, so halbiert auch der zugehörige Strahl CK_5 den Nebenwinkel FCD: die Strahlen des zweiten Paares stehen senkrecht aufeinander.

Aufgabe 13. Man soll zu einem bestimmten von drei gegebenen Elementen (Punkten oder Geraden) das zugeordnete vierte harmonische Element konstruieren.

Auflösung.

I. Um zu einem bestimmten von drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen zu konstruieren, ziehe man

1. durch jeden der drei Punkte eine beliebige Gerade,

2. verzeichne die Schnittpunkte der Strahlen durch die gepaarten Punkte mit dem dritten Strahle und miteinander,

3. verbinde jeden der ersteren Schnittpunkte mit dem andern gepaarten Punkte und

4. den letzteren Schnittpunkt mit dem Schnittpunkt dieser beiden neuen Verbindungsgeraden, — dann ist

5. der Schnittpunkt dieser letzten Verbindungsgeraden mit dem Träger der drei gegebenen Punkte der gesuchte vierte harmonische Punkt.

II. Um zu einem bestimmten von drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen zu konstruieren, ziehe man

1. zwei beliebige Geraden durch einen der gepaarten Punkte,

2. schneide sie mit einer beliebigen Geraden durch den dritten (einzelnen) Punkt,

3. verbinde beide Schnittpunkte mit dem andern gepaarten Punkte und

I. Um zu einem bestimmten von drei gegebenen Strahlen den vierten harmonischen zu konstruieren, wähle man

1. auf jeder der drei Geraden einen beliebigen Punkt,

2. zeichne die Verbindungsgeraden der Punkte auf den gepaarten Strahlen mit dem dritten Punkte und miteinander,

3. schneide jede der ersteren Geraden mit dem andern gepaarten Strahle und

4. die letztere Gerade mit der Verbindungsgeraden dieser beiden neuen Schnittpunkte, — dann ist

5. die Verbindungsgerade dieses letzten Schnittpunktes mit dem Scheitel der drei gegebenen Strahlen der gesuchte vierte harmonische Strahl.

II. Um zu einem bestimmten von drei gegebenen Strahlen den vierten harmonischen zu konstruieren, wähle man

1. zwei beliebige Punkte auf einem der gepaarten Strahlen,

2. verbinde sie mit einem beliebigen Punkte auf dem dritten (einzelnen) Strahl,

3. schneide beide Verbindungsgeraden mit dem andern gepaarten Strahle und

4. verbinde die beiden neuentstehenden Schnittpunkte dieser letzten Geraden und der beiden erstgewählten Geraden, — dann ist

5. der Schnittpunkt dieser letzten Verbindungsgeraden mit dem Träger der drei gegebenen Punkte der gesuchte vierte harmonische Punkt.

III. Um zu einem bestimmten von drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen zu konstruieren, lege man

1. durch den ungepaarten Punkt eine beliebige Gerade und wähle auf ihr zwei beliebige Punkte;

2. man verbinde jeden dieser Punkte mit den beiden gepaarten Punkten,

3. verzeichne die beiden durch diese Geraden neu entstehenden Schnittpunkte und

4. ziehe deren Verbindungsgerade: ihr Schnittpunkt mit dem ursprünglichen Träger ist der gesuchte vierte Punkt.

IV. Man projiziere die drei gegebenen Punkte aus irgend einem Scheitel durch drei Strahlen und konstruiere nach I bis III den vierten harmonischen Strahl: dann ist dessen Schnittpunkt mit dem Träger der gesuchte vierte harmonische Punkt.

4. schneide die beiden neuentstehenden Verbindungsgeraden dieser letzteren Punkte und die beiden erstgewählten Punkte, — dann ist

5. die Verbindungsgerade dieses letzten Schnittpunktes mit dem Scheitel der drei gegebenen Strahlen der gesuchte vierte harmonische Strahl.

III. Um zu einem bestimmten von drei gegebenen Strahlen den vierten harmonischen zu konstruieren, wähle man

1. auf dem ungepaarten Strahl einen beliebigen Punkt und lege durch ihn zwei beliebige Geraden;

2. man bringe jede dieser Geraden zum Schnitt mit den beiden gepaarten Strahlen,

3. ziehe die beiden durch diese Punkte gehenden neuen Verbindungsgeraden und

4. bringe dieselben zum Schnitt: die Verbindungsgerade ihres Schnittpunktes mit dem ursprünglichen Scheitel ist der gesuchte vierte Strahl.

IV. Man schneide die drei gegebenen Strahlen mit irgend einer Geraden in drei Punkten und konstruiere nach I bis III den vierten harmonischen Punkt: dann ist dessen Verbindungsgerade mit dem Scheitel der gesuchte vierte harmonische Strahl.

Erkl. 225. Die obenstehende Auflösung ist absichtlich ohne Figurenbuchstaben durchgeführt, weil sie in vollständiger Allgemeinheit gilt, während jede Figur den Anschein erwecken könnte, als ob die gegenseitige Lage der Elemente dieselbe werden müsste, wie dort. — Der einzige Unterschied unter den drei gegebenen Elementen ist der zwischen dem einzelnen, zu welchem das gesuchte vierte zugeordnet ist, und den beiden Elementen des ersten Paares. Man nennt daher die letzteren die gepaarten Elemente, das erstere das ungepaarte.

Erkl. 226. In der ersten Auflösungsweise [vergl. Erkl. 9. 7), 8)] werden die drei gegebenen Elemente zunächst ganz gleich behandelt, und auch nachher nur das ungepaarte Element den gleichwertig auftretenden beiden gepaarten gegenüber unterschieden. In der zweiten Auflösung [Erkl. 9. 1), 2), 4), 5)] wird gleich von vornherein dreifacher Unterschied gemacht, indem das eine der gepaarten Elemente zwei, das ungepaarte ein, das zweite gepaarte kein neues Element erzeugen muss. Die dritte Auflösung [Erkl. 9. 3), 6)] und die vierte werden besonders dann in Wirksamkeit treten, wenn von den dazu gehörigen Linien und Punkten eine Anzahl schon in der vorhandenen Figur vorliegt, so dass weniger Zeichnung nötig wird, als bei direkter Konstruktion. Vergl. auch Aufl. der Aufg. 50 und 51.

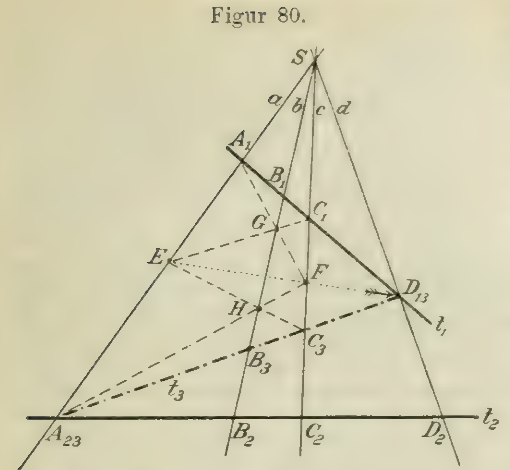
Aufgabe 14. Man unterscheide die verschiedenen Arten von Figuren, auf welche jede der vorigen Lösungen führt.

Andeutung. Man vergl. Figur 4 und 78 sowie Erkl. 9 und 18.

Aufgabe 15. Satz 2 (Antwort der Frage 9) soll nicht räumlich nach dem ersten, sondern in der Ebene nach dem zweiten Beweisverfahren der Antwort auf Frage 4 bewiesen werden.

Auflösung. 1. Seien $abcd$ in Figur 80 vier harmonische Strahlen, erzeugt durch Projektion der vier harmonischen Punkte $A_1B_1C_1D_1$, und $A_2B_2C_2D_2$ ihre vier Schnitt-

Figur 80.



Erkl. 227. Das erste Beweisverfahren in Antwort auf Frage 9 projiziert das ganze Viereck, durch welches die vier ursprünglichen harmonischen Punkte geliefert werden. Bei nebenstehender Abänderung beschränkt sich die Beweisführung auf zwei kollineare Dreiecke, für welche allerdings ein Satz verwendet wird, der früher räumlich bewiesen wurde. — Während also in Auflösung der Aufgabe 6 nur eine äussere Bestätigung von der Uebereinstimmung der beiden dualistischen Definitionen harmonischer Punkte und Strahlen gegeben wurde, so leistet die nebenstehende Ausführung einen vollgültigen Beweis von gleicher Sicherheit, wie jener in Antwort auf Frage 9.

Erkl. 228. Die Erleichterung des Beweises für Satz 2 für den Fall, dass die zwei Träger einen der vier harmonischen Punkte gemeinsam haben (bezw. dass die zwei Scheitel einen der vier harmonischen Strahlen gemeinsam haben), kehrt auch später bei der metrischen Beweisführung wieder. Hier wird die Gerade t_3 in der Weise verwendet, dass erst wegen des gemeinsamen Punktes D_{13} die Gruppen $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_3 B_3 C_3 D_3$, dann wegen des gemeinsamen Punktes A_{23} die Gruppen $A_3 B_3 C_3 D_3$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$, also zuletzt auch $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ gleichzeitig harmonisch sein müssen.

Erkl. 229. Man beachte wohl, dass die nebenstehende Beweisführung auch wohl geeignet ist zu dualistischer Uebertragung, dass man also hiermit an den beiden Definitionen harmonischer Punkte und Strahlen auch die Invarianz der harmonischen Beziehung bei jeglicher Art von Projektion in genau dualistischer Weise durchführen kann.

punkte mit einer beliebigen Geraden t_2. Dann verbinde man A_2 mit D_1 durch eine Gerade t_3 mit den Schnittpunkten $A_{23} B_3 C_3 D_{13}$. Wählt man dann einen beliebigen Punkt G auf b und verbindet ihn mit A_1 und C_1, so entsteht ein vollständiges Vierseit $A_1 G C_1 S$. und dessen Nebenseite $A_1 C_1$ muss durch die neuentstehende Nebenseite EF im bereits vorhandenen vierten harmonischen Punkte D_{13} geschnitten werden.

2. Verbindet man nun noch E mit C_3 und F mit A_{23}, so sind $A_1 F A_3$ und $C_1 E C_3$ zwei Dreiecke von derartiger Verwandtschaft, dass die Verbindungsgeraden der entsprechenden Eckpunkte A_1 und C_1, F und E, A_3 und C_3 alle drei durch den einen Punkt D_{13} hindurchgehen. Folglich müssen nach Antwort auf Frage 29,6 des ersten Teiles auch die Schnittpunkte entsprechender Seiten $A_1 F$ und $C_1 E$, FA_3 und EC_3, $A_3 A_1$ und $C_3 C_1$ auf einer Geraden liegen. Das erste und letzte Paar bestimmt die Punkte S und G der Geraden b, also muss auch der Schnittpunkt H der Geraden FA_{23} und $C_3 E$ auf b liegen.

3. Hiernach hat man wieder ein vollständiges Vierseit $SEHF$, dessen Nebenseiten SH und EF die dritte Nebenseite $A_3 C_3$ in zwei harmonisch zugeordneten Punkten B_3 und D_3 treffen; und somit ist bewiesen, dass wenn $A_1 B_1 C_1 D_1$ vier harmonische Punkte sind, dann auch die auf einer Geraden durch D_1 entstehenden vier Punkte $A_3 B_3 C_3 D_3$ solche sein müssen.

4. Derselbe Beweisgang führt aber auch von $A_3 B_3 C_3 D_3$ wieder auf $A_2 B_2 C_2 D_2$ wegen des gemeinsamen Punktes A_{23}, also sind die Schnittpunkte der vier Strahlen $abcd$ mit jeder Geraden vier harmonische Punkte, auch wenn diese nicht selbst durch einen der erzeugenden vier harmonischen Punkte hindurchgeht.

Aufgabe 16. Man soll die Beweisführung in der Auflösung der vorigen Aufgabe dualistisch übertragen.

Aufgabe 17. Man entnehme aus voriger Aufgabe einen Schluss für die perspektivische Lage harmonischer Elementegruppen.

Auflösung. Man kann die Behauptung aufstellen:

Satz. Wenn zwei Gruppen von vier harmonischen Elementen ein gemeinsames Element besitzen, so befinden sie sich in perspektivischer Lage (und zwar auf zweifache Weise).

Zum Beweis wähle man die beiden Punktgruppen $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_3 B_3 C_3 D_3$ der Figur 80, nehme also als bekannt an, dass beide harmonisch sind. Bringt man nun die Verbindungsgeraden $A_1 A_3$ und $C_1 C_3$ zum Schnitt in S, verbindet S mit D_{13}, so muss der vierte harmonische Strahl zu d die beiden Träger t_1 und t_3 im vierten harmonischen Punkt zu D treffen, d. h. die Verbindungsgeraden $A_1 A_3$, $B_1 B_3$, $C_1 C_3$ müssen durch einen Punkt gehen. Dasselbe gilt auch für den Schnittpunkt der Verbindungsgeraden $A_1 C_3$ und $A_3 C_1$. —

Hat man statt dessen zwei Strahlengruppen $a_1 b_1 c_1 d_1$ und $a_3 b_3 c_3 d_3$, die beide harmonisch sind und d_{13} gemeinsam haben, so verbinde man die Schnittpunkte $a_1 a_3$ und $c_1 c_3$ durch t und schneide t mit d_{13} in D, dann muss der vierte harmonische Punkt zu D aus beiden Scheiteln S_1 und S_3 durch den vierten harmonischen Strahl zu d projiziert werden, d. h. die Schnittpunkte der Strahlen $a_1 a_3$, $b_1 b_3$, $c_1 c_3$ müssen auf einer Geraden liegen. Dasselbe gilt auch für die Verbindungsgerade der Schnittpunkte $a_1 c_3$ und $a_3 c_1$ (vergl. Figur zu Aufgabe 16).

Erkl. 230. Der nebenstehende Satz ist in so allgemeiner Form ausgesprochen, dass er sowohl für harmonische Punkte als harmonische Strahlen gilt. Will man denselben einzeln ausdrücken, so kann man folgende beiden Sätze daraus herstellen:

Haben zwei Gruppen von vier harmonischen Punkten einen Punkt gemeinsam, so gehen die Verbindungsgeraden der andern drei Paare entsprechender Punkte auf zweifache Weise durch einen Punkt.

Haben zwei Gruppen von vier harmonischen Strahlen einen Strahl gemeinsam, so liegen die Schnittpunkte der andern drei Paare entsprechender Strahlen auf zweifache Weise auf einer Geraden.

Erkl. 231. Um den Beweis unmittelbar für die vorigen Sätze einzurichten, kann man denselben in der folgenden dualistischen Weise durchführen:

Unter den Verbindungsgeraden entsprechender Punkte befindet sich jedenfalls $B_1 B_3$, zugeordnet zum gemeinsamen Punkte D_{13}; auf $B_1 B_3$ müssen dann liegen die Schnittpunkte der Geraden $A_1 A_3$ und $C_1 C_3$ (in S), aber auch von $A_1 C_3$ und $A_3 C_1$ (in S'), beides wegen des vollständigen Vierecks $A_1 C_1 A_3 C_3$; daher können die Punktgruppen $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_3 B_3 C_3 D_3$ sowohl S als S' zum Perspektivitätsscheitel erhalten.

Unter den Schnittpunkten entsprechender Strahlen befindet sich jedenfalls $b_1 b_2$, zugeordnet zum gemeinsamen Strahle d_{13}; durch $(b_1 b_3)$ müssen dann hindurchgehen die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte $a_1 a_3$ und $c_1 c_3$ (auf t), aber auch von $a_1 c_3$ und $c_3 a_1$ (auf t'), beides wegen des vollständigen Vierseits $a_1 c_1 a_3 c_3$; daher können die Strahlengruppen $a_1 b_1 c_1 d_1$ und $a_3 b_3 c_3 d_3$ sowohl t als t' zur Perspektivitätsachse erhalten.

Aufgabe 18. Man bringe zwei harmonische Gebilde in perspektivische Lage, so dass zwei vorgegebene Elementepaare zugeordnet werden.

Andeutung. Man unterscheide, ob Punktreihen oder Strahlenbüschel vorgelegt sind.

Aufgabe 19. Man beweise, dass harmonische Elementegruppen stets projektivisch sind.

Auflösung.

1. Sind $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ in Figur 80 zwei harmonische Punktgruppen, so verbinde man zwei beliebige Punkte beider

2. Sind $a_1 b_1 c_1 d_1$ und $a_2 b_2 c_2 d_2$ zwei harmonische Strahlengruppen, so bringe man zwei beliebige Strahlen beider Gruppen, z. B.

Gruppen, z. B. $A_2 D_1$ durch eine Gerade t_3, und zeichne auf $A_3 D_3$ eine beliebige harmonische Punktgruppe derart, dass A_3 und D_3 zwei von den vier Punkten sind. Dann ist nach dem Satze in Aufgabe 17 sowohl $A_1 B_1 C_1 D_1$ mit $A_3 B_3 C_3 D_3$, als auch $A_2 B_2 C_2 D_2$ mit $A_3 B_3 C_3 D_3$ in perspektivischer Lage, und folglich auch $A_1 B_1 C_1 D_1$ mit $A_2 B_2 C_2 D_2$ projektivisch bezogen.

$a_2 d_1$, zum Schnitte im Punkte S_3 und zeichne durch $(a_3 d_3)$ eine beliebige harmonische Strahlengruppe derart, dass a_3 und d_3 zwei von den vier Strahlen sind. Dann ist nach dem Satze in Aufgabe 17 sowohl $a_1 b_1 c_1 d_1$ mit $a_3 b_3 c_3 d_3$, als auch $a_2 b_2 c_2 d_2$ mit $a_3 b_3 c_3 d_3$ in perspektivischer Lage, und folglich auch $a_1 b_1 c_1 d_1$ mit $a_2 b_2 c_2 d_2$ projektivisch bezogen.

3. Ist $A_1 B_1 C_1 D_1$ eine harmonische Punktgruppe und $a_1 b_1 c_1 d_1$ eine harmonische Strahlengruppe, so zeichne man entweder zu $A_1 B_1 C_1 D_1$ eine perspektivische Strahlengruppe $a_2 b_2 c_2 d_2$ oder zu $a_1 b_1 c_1 d_1$ eine perspektivische Punktgruppe $A_2 B_2 C_2 D_2$ und beweise ganz wie zuvor. Ebenso ist zu verfahren, wenn die gegebenen harmonischen Elementegruppen gemeinsame Träger bezw. gemeinsame Scheitel haben.

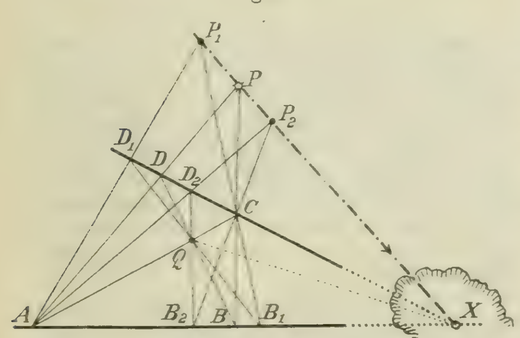
Erkl. 232. Wenn A_3 und D_3 zwei von den vier harmonischen Punkten sind, so kann man einen dritten Punkt ganz beliebig wählen und dazu oder zu einem der andern dann den vierten harmonischen aufsuchen. Es gibt dann einen Punkt S oder S' (s. Erkl. 231) zur Vermittlung der Verwandtschaft zwischen t_1 und t_3, zwei ebensolche Punkte zwischen t_2 und t_3, also sind auch t_1 und t_2 projektivisch verwandt. — Gleiche Ueberlegung gilt für S_1 und S_2: Auch hier wird $S_1 \barwedge S_3$, $S_2 \barwedge S_3$, folglich $S_1 \barwedge S_3$. (Vergl. auch die andere Beweisführung in Antwort auf Frage 11.)

Aufgabe 20. Man soll für zwei harmonische Elementegruppen $ABCD$ und $EFHK$ die projektivische Beziehung durch Zeichnung herstellen.

Andeutung. Man verfahre nach Aufgabe 17 und 19.

Aufgabe 21. Man ziehe durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade nach dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden.

Figur 81.



Erkl. 233. Liegt Punkt P zwischen den Geraden, so liegt Q ausserhalb, liegt umgekehrt P ausserhalb, so kommt Q innerhalb zu liegen, und die ganze Figur nebst Beweisführung ist beidemale in genau gleicher Weise durchzuführen. — Man kann das Ergebnis auch in folgendem Satze aussprechen:

„Werden zwei beliebige Geraden von den Strahlen eines Büschels (Scheitel Q) geschnitten, und verbindet man wechselweise ihre Schnittpunkte mit je zweien der Strahlen, so liegen sämtliche Schnittpunkte dieser Verbindungsgeraden auf einer einzigen Geraden durch den Schnittpunkt der gegebenen Geraden.“

Auflösung. 1. Man lege durch den Punkt P Figur 81 zwei beliebige Geraden AD und BC: dann entsteht ein vollständiges Viereck $ABCD$ und in dessen Nebenecke X würde die gesuchte Gerade XP der vierte harmonische Strahl werden zu XQ und den beiden gegebenen Geraden.

2. Legt man nun durch Q noch eine Gerade $B_1 D_1$ (oder $B_2 D_2$), so ist $AB_1 CD_1$ (oder $AB_2 CD_2$) wieder ein vollständiges Viereck, und wieder XP_1 (oder XP_2) vierte harmonische Gerade zu XQ.

3. Daher müssen alle Punkte P_1 (oder P_2), welche auf diese Weise entstehen, auf derselben vierten harmonischen Geraden liegen, d. h. die gesuchte Gerade geht von P durch P_1 und P_2 u. s. w. nach X.

Man vergleiche hierzu auch Figur 7, S. 11, wo alle Punkte G auf einer Geraden durch Punkt E liegen. Der oberste der Punkte G liefert durch das Viereck $A_1 D_1 A_2 D_2$ den Punkt F, und dieser liefert durch alle Transversalen lauter Punkte G auf der Geraden nach dem unzugänglich gedachten Punkte E.

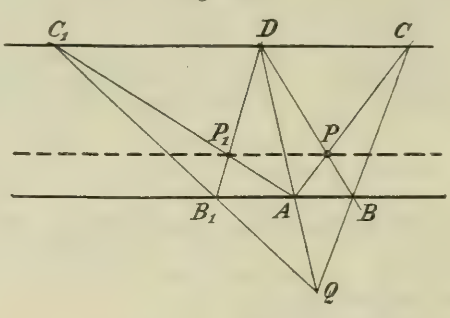
Aufgabe 22. Dieselbe Aufgabe für einen Punkt G zwischen den beiden Geraden zu lösen.

Aufgabe 23. Zu zwei gegebenen Parallelen soll durch einen Punkt P eine dritte Parallele gelegt werden.

Erkl. 234. Der vierte harmonische Strahl zu PP_1 und AB, CD ist die vierte Parallele durch Q. Solche vier parallele harmonischen Strahlen müssen immer entstehen, wenn vier harmonische Punkte von einem unendlich fernen Scheitel projiziert werden, bezw. wenn zwei Seiten eines Vierecks parallel laufen.

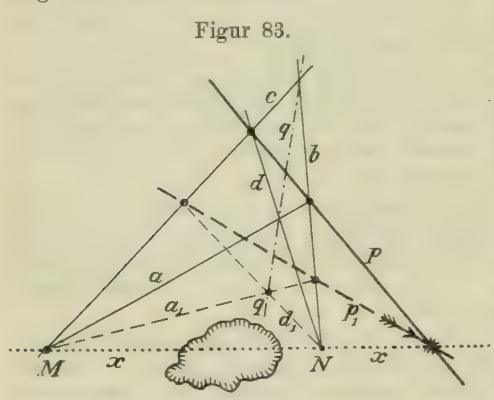
Auflösung. Die Aufgabe bildet eine Anwendung der beiden vorigen Aufgaben: die Geraden APC und BPD liefern Punkt Q, QB_1C_1 mit QAD den Punkt P_1, und PP_1 geht durch den unendlich fernen Schnittpunkt der beiden Parallelen, ist also selbst parallel zu beiden.

Figur 82.



Aufgabe 24. Man soll auf einer Geraden p den Schnittpunkt bestimmen mit der Verbindungsgeraden zweier Punkte M und N, die wegen eines Hindernisses nicht geradlinig verbunden werden können.

Figur 83.



Erkl. 235. In den Figuren 81 und 83 ist ein Hindernis angedeutet etwa in Gestalt einer Wasserfläche oder eines Hügels oder Bergvorsprungs. Vorhanden sein muss allerdings die Möglichkeit, z. B. in Figur 83 Gerade zu ziehen von p aus nach M und N, d. h. allgemein die zur Figur sonst nötigen Zeichnungen in irgend einer Lage vorzunehmen.

Auflösung. 1. Man wähle auf p zwei beliebige Punkte und verbinde sie mit den gegebenen Punkten M und N durch die Geradenpaare ac und bd. Dann bilden diese vier Geraden ein vollständiges Vierseit $abcd$, und auf dessen Nebenseite x würde der gesuchte Schnittpunkt (xp) der vierte harmonische Punkt werden zum Schnittpunkt (xq) der Nebenseite q und der beiden gegebenen Punkte MN.

2. Legt man nun durch einen weiteren Punkt auf q noch zwei weitere Geraden $a_1 d_1$, so ist $a_1 b c d_1$ (oder auch $a d a_1 d_1$) wieder ein vollständiges Vierseit, und wieder (xp_1) vierter harmonischer Punkt zu (xq) und M, N.

3. Daher müssen alle Geraden p_1, welche auf diese Weise entstehen, durch denselben vierten harmonischen Punkt hindurchgehen, d. h. der gesuchte Schnittpunkt (px) ist der Schnittpunkt von p mit p_1.

Erkl. 236. Die obenstehende Aufgabe 24 bildet in leicht erkennbarer Weise die dualistische Uebertragung zur Aufgabe 21 und ist auch in der Auflösung dualistisch behandelt. Beide bedürfen keiner weiteren Hilfsmittel, als der durch Figur 76 und 77 gebotenen. Daher findet man dieselben auch schon elementar behandelt als Aufgabe 264 und 265 in Kleyer-Sachs, Ebene Elementar-Geometrie, VI. Teil (s. S. 174).

Aufgabe 25. Dieselbe Aufgabe in verschiedenen anderen Lagen zu wiederholen.

Aufgabe 26. Aus der dualistischen Definition harmonischer Punkte und Strahlen soll ein allgemeines Ergebnis für dualistisch verwandte Figuren abgeleitet werden.

Auflösung. Da die Definitionen der harmonischen Punkte und Geraden einander völlig dualistisch gegenübergestellt werden können, so muss auch ganz allgemein bei beliebiger dualistischer Uebertragung irgend einer Figur eine neue Figur von der Art entstehen, dass gegenüber beliebigen vier harmonischen Elementen der einen Figur auch immer wieder vier harmonische Elemente in der andern Figur entstehen.

Nimmt man hierzu das Ergebnis der Erklärung 36, wonach Figuren projektivisch sind, wenn je vier harmonischen Elementen der einen vier harmonische der andern entsprechen, so kann man den bemerkenswerten Satz aufstellen:

Satz. Dualistisch verwandte Figuren sind zugleich stets projektivisch verwandt.

Erkl. 237. Sind in der einen Figur vier harmonische Punkte oder vier harmonische Strahlen entstanden durch irgend ein Viereck, so liefert das Viereck dualistisch ein Vierseit, und wie die ersten Elemente zu dem Viereck liegen, so liegen die neuentstehenden zu ihrem Vierseit; wenn also die ersten vier harmonisch liegen, so müssen auch die neuen vier harmonisch liegen. — Dieses Ergebnis erfährt später wichtige Anwendung bei der Kurventheorie und der Polarentheorie.

Erkl. 238. Die ursprüngliche Anlage zweier dualistischen Figuren mag beginnen wie sie will: jedesmal entsprechen einander nach Antwort der Frage 46 des I. Teils n Punkte einer Geraden und n Strahlen eines Punktes u. s. w. Man sieht also, dass diese projektivische Verwandtschaft nie zur perspektivischen Lage kommen kann, weil ja stets ungleichartige Elemente zugeordnet sind. Die innigste Beziehung könnte also die der vereinigten Lage je zweier entsprechenden Elemente sein.

Aufgabe 27. Von vier harmonischen Punkten sei gegeben der erste P, und dazu drei beliebige Geraden abc, auf deren jeder einer der drei andern liegen soll. Man konstruiere dieselben.

Auflösung. I. Analysis. Angenommen die Gerade t durch P (siehe Figur 84) sei der Träger der gesuchten vier harmonischen Punkte P, A, B, C. Dann müssen diese aus jedem Punkte, z. B. (ab) durch vier harmonische Strahlen (hier p, a, b, c') projiziert werden. Von letzteren vier Geraden kennt man pab, also muss (ct) auf dem vierten harmonischen Strahl c' liegen.

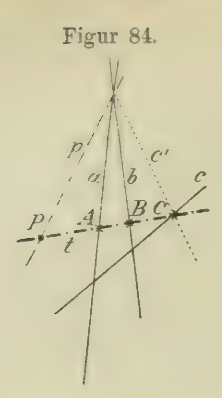
II. Konstruktion. Man verbinde P mit (ab) und konstruiere nach Aufgabe 13

Aufgabe 28. Von vier harmonischen Geraden sei gegeben die erste p, und dazu drei beliebige Punkte ABC, durch deren jeden eine der drei andern hindurchgehen soll. Man konstruiere dieselben.

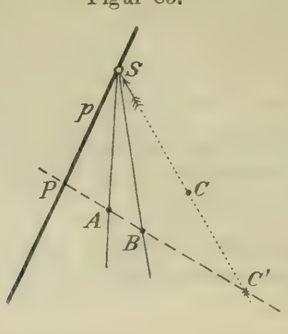
Auflösung. I. Analysis. Angenommen der Punkt S auf p (Figur 85) sei der Scheitel der gesuchten vier harmonischen Geraden p, SA, SB, SC. Dann müssen diese durch jede Gerade, z. B. durch AB in vier harmonischen Punkten (hier $PABC'$) geschnitten werden. Von letzteren vier Punkten kennt man PAB, also muss CS durch den vierten harmonischen Punkt C' hindurchgehen.

II. Konstruktion. Man ziehe AB und konstruiere nach Aufgabe 13 zu PAB den

Figur 84.




Figur 85.



zu p, a, b den vierten harmonischen Strahl c'. Verbindungsgerade von (cc') mit P ist t.

III. **Beweis.** Die vier Punkte P, A, B, C sind vier harmonische, weil sie auf t durch vier harmonische Strahlen $p\,a\,b\,c'$ ausgeschnitten werden.

IV. **Determination.** Da man die Gerade c' konstruieren kann als vierten harmonischen Strahl, zugeordnet zu p oder a oder b, so lässt die Aufgabe im allgemeinen dreierlei Lösungen zu. Daher kann auch in der Aufgabe vorgeschrieben werden, auf welcher der gegebenen Geraden $a\,b\,c$ der zu P zugeordnete Punkt liegen soll. Dann hat man einerlei Lösung; denn wegen der Eindeutigkeit der harmonischen Beziehung kann keine verschiedene Lösung entstehen, ob man zur Konstruktion Punkt (ab) oder (bc) oder (ac) verwendet.

vierten harmonischen Punkt C'. Die Gerade CC' trifft p in S.

III. **Beweis.** Die vier Geraden p, SA, SB, SC sind vier harmonische, weil sie von S durch die vier harmonischen Punkte $P\,A\,B\,C'$ hindurchgehen.

IV. **Determination.** Da man den Punkt C' konstruieren kann als vierten harmonisch zugeordneten zu P oder A oder B, so lässt die Aufgabe im allgemeinen dreierlei Lösungen zu. Daher kann auch in der Aufgabe vorgeschrieben werden, durch welchen der gegebenen Punkte $A\,B\,C$ der zu p zugeordnete Strahl gehen soll. Dann hat man einerlei Lösung; denn wegen der Eindeutigkeit der harmonischen Beziehung kann keine verschiedene Lösung entstehen, ob man zur Konstruktion Gerade AB oder BC oder AC verwendet.

Erkl. 239. Die beiden Aufgaben 27 und 28 sind so gleichartig gebaut, dass auch ihre Lösung genau dualistisch durchgeführt werden kann. Doch ist in vorstehender Ausführung absichtlich nicht mechanisch Wort für Wort übertragen, sondern hie und da freiere Uebersetzung gewählt, wie es der Anschauung von Schnittpunkten und Verbindungsgeraden entspricht.

Erkl. 240. Die Punkte $A\,B\,C$ bezw. die Geraden $a\,b\,c$ müssen ein Dreieck bilden. Denn wären die Punkte $A\,B\,C$ selbst auf einer Geraden, oder gingen die Geraden $a\,b\,c$ selbst durch einen Punkt, so wäre die Lösung überhaupt unmöglich, wenn das Element P bezw. p nicht selbst das vierte harmonische wäre; ist es dies aber, dann kann S jeder Punkt auf p, t jede Gerade durch P sein. Zur Konstruktion vergleiche man auch Erkl. 226.

Aufgabe 29. Auf einer gegebenen Seite eines Fünfecks einen Punkt zu suchen, aus dem alle fünf Eckpunkte durch vier harmonische Strahlen projiziert werden.

Andeutung. Man vergleiche die beiden vorigen Aufgaben.

Aufgabe 30. Durch einen gegebenen Punkt auf einer Seite im Fünfseit eine Gerade zu legen, durch welche die vier übrigen Seiten in vier harmonischen Punkten geschnitten werden.

Aufgabe 31, 32. Die dualistischen Aufgaben zu den Aufgaben 30 und 31 aufzustellen und zu lösen.

Aufgabe 33. Vier beliebig gegebene Punkte sollen durch vier harmonische Strahlen aus einem Scheitel S projiziert werden.

Auflösung. Zieht man durch einen der gegebenen Punkte eine beliebige Gerade als ersten der vier harmonischen Strahlen, so ist die Aufgabe zurückgeführt auf Aufgabe 28, hat also bei jeglicher der möglichen drei Zuordnungen eine bestimmte Lösung. Die allgemeine Aufgabe hat daher soviel Lösungen, als Gerade durch den ersten Punkt möglich waren, nämlich einfach unendlich viele.

Aufgabe 34. Vier beliebig gegebene Geraden sollen in vier harmonischen Punkten durch eine Gerade t geschnitten werden.

Auflösung. Wählt man auf einer der gegebenen Geraden einen beliebigen Punkt als ersten der vier harmonischen Punkte, so ist die Aufgabe zurückgeführt auf Aufgabe 27, hat also bei jeglicher der drei möglichen Zuordnungen eine bestimmte Lösung. Die allgemeine Aufgabe hat daher soviel Lösungen, als Punkte auf der ersten Geraden möglich waren, nämlich einfach unendlich viele.

Erkl. 241. Alle Punkte, welche für Aufgabe 33 als Scheitel, bezw. alle Geraden, welche für Aufgabe 34 als Träger erhalten werden können, bilden offenbar eine besondere Art von Punktreihe bezw. Strahlenbüschel, welche man definieren kann als „geometrischen Ort“ eines Punktes oder eines Strahls von der bestimmten Eigenschaft. Es sind, wie sich bald zeigen wird, Kegelschnitte.

Aufgabe 35. Von zwei projektivischen Punktreihen sind die drei zugeordneten Elementenpaare gegeben. Man soll zu einem beliebigen weiteren Element des ersten Gebildes das zugeordnete des zweiten Gebildes konstruieren.

Aufgabe 36. Von zwei projektivischen Strahlenbüscheln sind die drei zugeordneten Elementenpaare gegeben. Man soll zu einem beliebigen weiteren Element des ersten Gebildes das zugeordnete des zweiten Gebildes konstruieren.

Auflösung. Wegen ihrer grossen Wichtigkeit für den weiteren Aufbau der projektivischen Geometrie sind diese beiden Aufgaben im dritten Kapitel dieses Buches ganz besonders behandelt, und zwar Aufgabe 35 in Antwort der Frage 28, Aufgabe 36 in Antwort der Frage 32. Man vergleiche jeweils den zweiten bis fünften Teil dieser Antworten.

Erkl. 242. Die Auflösung wird vollständig geleistet mit den hier zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln, kann also am genannten Orte ohne weitere Vorbereitung entnommen werden. Sie besteht in der Aufsuchung solcher Vermittlungselemente, dass das erste und letzte Gebilde durch eine Reihe von Projektionen und Schnitten miteinander verbunden werden. Dass dabei durch jede verschiedene Art doch stets gleiches Ergebnis entstehen muss, folgt aus der Eindeutigkeit der harmonischen Beziehung.

Aufgabe 37. Drei gegebene Geraden abc sollen durch eine Gerade aus gegebenem Punkte P so geschnitten werden, dass die vier entstehenden Punkte zu einer beliebig gegebenen Gruppe von vier gegebenen Elementen projektivisch werden.

Auflösung. I. Analysis. Angenommen die Gerade t durch P (siehe Figur 84) sei der Träger der gesuchten vier Schnittpunkte $PABC$. Dann müssen diese aus jedem Punkte, z. B. (ab) durch vier Strahlen $pabc'$ projiziert werden, welche ebenfalls mit der gegebenen Elementengruppe projektivisch sind. Von letzteren vier Geraden kennt man

Aufgabe 38. Drei gegebene Punkte ABC sollen aus einem Punkte einer gegebenen Geraden p so projiziert werden, dass die vier entstehenden Geraden zu einer beliebig gegebenen Gruppe von vier gegebenen Elementen projektivisch werden.

Auflösung. I. Analysis. Angenommen Punkt S auf p (s. Figur 85) sei der Scheitel der gesuchten vier Strahlen $pabc$. Dann müssen diese von jeder Geraden, z. B. AB in vier Punkten $PABC'$ geschnitten werden, welche ebenfalls mit der gegebenen Elementengruppe projektivisch sind. Von letzteren vier Punkten kennt man aber PAB

aber pab als zugeordnet zu drei Elementen, also muss c' der zum vierten Element der gegebenen Gruppe zugeordnete Strahl sein, wenn pab zu den drei ersten projektivisch zugeordnet sind. Und (ct) ist der Schnittpunkt von c mit dem hiernach zu konstruierenden vierten Strahle c'.

II. Konstruktion. Man verbinde P mit (ab) und konstruiere nach Aufgabe 36 denjenigen vierten Strahl c' zu pab, der dem vierten Element der gegebenen Gruppe projektivisch ist, wenn pab den drei ersten zugeordnet sind.

III. Beweis. Die Punkte $PABC$ sind projektivisch zu den vier gegebenen Elementen, denn sie sind perspektivisch mit den vier Strahlen $pabc'$, welche mit jenen projektivisch konstruiert sind.

IV. Determination. Da die vier gesuchten Punkte zu den vier gegebenen Elementen auf 24 verschiedene Arten zugeordnet werden können, so hätte man ursprünglich 24 Lösungen. Von diesen fallen aber je vier in eine einzige zusammen, die wegen paarweiser Elementenvertauschung sich selbst projektivisch sind. Daher bleiben sechs verschiedene Lösungen — wenn nicht in der Aufgabe über eine der sechserlei Zuordnungen bestimmte Vorschrift gegeben wird.

als zugeordnet zu drei Elementen, also muss C' der zum vierten Element der gegebenen Gruppe zugeordnete Punkt sein, wenn PAB, zu den drei ersten projektivisch zugeordnet sind. Und CS ist der Strahl von C durch den hiernach zu konstruierenden vierten Punkt C'.

II. Konstruktion. Man schneide p mit AB und konstruiere nach Aufgabe 35 denjenigen vierten Punkt C' zu PAB, der dem vierten Element der gegebenen Gruppe projektivisch ist, wenn PAB den drei ersten zugeordnet sind.

III. Beweis. Die Strahlen $pabc$ sind projektivisch zu den vier gegebenen Elementen, denn sie sind perspektivisch mit den vier Punkten $PABC'$, welche mit jenen projektivisch konstruiert sind.

IV. Determination. Da die vier gesuchten Strahlen zu den vier gegebenen Elementen auf 24 verschiedene Arten zugeordnet sein können, so hätte man ursprünglich 24 Lösungen. Von diesen fallen aber je vier in eine einzige zusammen, die wegen paarweiser Elementenvertauschung sich selbst projektivisch sind. Daher bleiben sechs verschiedene Lösungen — wenn nicht in der Aufgabe über eine der sechserlei Zuordnungen bestimmte Vorschrift gegeben wird.

Erkl. 243. Die vier gegebenen Elemente können für jede der beiden Aufgaben vier Punkte einer Geraden oder vier Strahlen eines Punktes sein. Sind sie gleichartig mit den durch die Aufgabe verlangten Elementen, so ist die Konstruktion genau wie in Antwort auf Frage 28 und 32; sind sie ungleichartig, so erhält man gleichartige durch eine beliebige Projektion derselben.

Erkl. 244. Die gefundenen Elemente $PABC$ bezw. $pabc$ können zu jeder der 24 Permutationen der vier gegebenen Elemente zugeordnet werden. Nach Antwort der Frage 35 und 36 des I. Teiles sind aber je solche zwei von diesen 24 Permutationen zu sich selbst projektivisch, welche sich nur unterscheiden durch Vertauschung zweier Elemente und der zwei andern. Folglich kommen wieder so viele in Wegfall, dass nur sechs selbständige Unterscheidungen übrig bleiben.

Erkl. 245. Würden die gegebenen Geraden abc bezw. die gegebenen Punkte ABC in solcher Lage sein, dass die ersten durch einen Punkt gehen, die letzten in einer Geraden liegen, so wäre die Aufgabe überhaupt unmöglich, wenn nicht das neuentstehende Element P bezw. p selbst das vierte projektivisch zugeordnete ist; ist es dies aber, dann erfüllt jede Gerade durch P bezw. jeder Punkt auf p die Forderungen der Aufgabe.

Aufgabe 39, 40, 41, 42. Man bilde aus den Aufgaben 37 und 38 abgeänderte Aufgaben nach derselben Art, wie die Aufgaben 29 bis 32 aus den Aufgaben 27 und 28 entstanden — und löse sie.

Aufgabe 43. Vier beliebig gegebene Punkte sollen aus einem Scheitel durch vier Strahlen projiziert werden, welche mit einer Gruppe von vier beliebig gegebenen Elementen projektivisch sind.

Aufgabe 44. Vier beliebig gegebene Geraden sollen durch eine Gerade in vier Punkten geschnitten werden, welche mit einer Gruppe von vier beliebig gegebenen Elementen projektivisch sind.

Auflösung. Zieht man durch einen der gegebenen Punkte eine beliebige Gerade als ersten der vier projizierenden Strahlen, so ist die Aufgabe zurückgeführt auf Aufgabe 38, hat also bei jeglicher der sechs möglichen Zuordnungen eine bestimmte Lösung, bei der allgemeinen Auffassung aber je unendlich viele Lösungen.

Auflösung. Wählt man auf einer der gegebenen Geraden einen beliebigen Punkt als ersten der vier Schnittpunkte, so ist die Aufgabe zurückgeführt auf Aufgabe 37, hat also bei jeglicher der sechs möglichen Zuordnungen eine bestimmte Lösung, bei der allgemeinen Auffassung aber je unendlich viele Lösungen.

Erkl. 246. Auch bei dieser Aufgabe kann man die Gesamtheit der als Lösung entstehenden Punkte bezw. Strahlen auffassen als „geometrischen Ort“. Derselbe ist auch hier eine Kurve, ein Kegelschnitt.

Aufgabe 45. Man soll die durch die harmonische Beziehung festgelegte Eindeutigkeit der projektivischen Beziehung in Sätzen ausdrücken.

Erkl. 247. Man kann die nebenstehenden Ergebnisse in Formelschreibung wiedergeben, wie folgt:

$$\text{a)}\quad \begin{array}{c} t_1 \overline{\wedge}\, t_3 \\ t_2 \overline{\wedge}\, t_3 \\ \hline t_1 \overline{\wedge}\, t_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} S_1 \overline{\wedge}\, S_3 \\ S_2 \overline{\wedge}\, S_3 \\ \hline S_1 \overline{\wedge}\, S_2 \end{array} \qquad\qquad \text{b)}\quad \begin{array}{c} t_1 \overline{\wedge}\, t_2 \\ t_1 \overline{\wedge}\, t_3 \\ \hline t_2 \overline{\wedge}\, t_3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} S_1 \overline{\wedge}\, S_2 \\ S_1 \overline{\wedge}\, S_3 \\ \hline S_2 \overline{\wedge}\, S_3. \end{array}$$

Die Beweise zu allen drei Sätzen stützen sich jeweils darauf, dass dem vierten harmonischen Element eines Gebildes auch stets das vierte harmonische Element des andern Gebildes entsprechen muss; und zwar gleichgültig, welche Zwischengebilde zur Vermittlung der projektivischen Verwandtschaft gedient haben.

Auflösung. Man erhält die folgenden Aussagen:

Satz a. Ist von zwei gegebenen Gebilden jedes zu demselben dritten projektivisch, so sind sie auch miteinander projektivisch.

Satz b. Ist von zwei projektivischen Gebilden das eine zu einem dritten projektivisch, so ist auch das andere mit diesem dritten projektivisch.

Satz c. Haben zwei projektivische Gebilde in vereinigter Lage drei gemeinsame entsprechende Elemente, so haben sie alle zugeordneten Elemente gemeinsam, sie sind identisch.

---

2. Aufgaben über die Massbeziehungen harmonischer Gebilde.

(Zu Abschnitt 2.)

Aufgabe 46. Man konstruiere vier beliebige harmonischen Strahlen auf Grund der metrischen Eigenschaften.

Erkl. 248. Die erste Konstruktion geschieht auf Grund des Satzes 6b, die zweite und dritte geben beide dieselbe Konstruktion auf Grund des Satzes 7, nur ausgehend die eine von den Halbierungsgeraden, die andere von den Winkelschenkeln.

Auflösung. Man verfährt nach den Sätzen 6 und 7, wie folgt:

I. Man verbindet einen beliebigen Scheitel mit Endpunkten, Mittelpunkt und unendlich fernem Punkt einer beliebigen Strecke.

II. Man zeichnet einen rechten Winkel und trägt am einen Schenkel beiderseits gleichgrosse Winkel an.

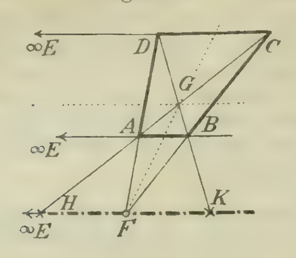
III. Man zeichnet zwei beliebige Geraden sowie die Halbierungsgeraden ihres Winkels und Nebenwinkels.

Aufgabe 47. Beliebige harmonische Punkte aus den metrischen Eigenschaften zu finden.

Aufgabe 48. Lehrsätze fürs Dreieck, Trapez und Parallelogramm aus den harmonischen Beziehungen in Figur 86 und 87 abzuleiten.

Auflösung. Man gewinnt die Sätze:

Figur 86.



Figur 87.

Erkl. 249. Die erste der nebenstehenden Aussagen ist nur eine andere Ausdrucksweise des Satzes 6b, und in Fig. 86 anwendbar auf Dreieck FAB oder FCD. — Der erste Satz über das Trapez besagt die Eigenschaft, dass in Fig. 84 Punkt E ins Unendliche gefallen, folglich Punkt F zum Mittelpunkt von HK geworden ist. — Der zweite Satz über das Trapez ist in Figur 86 daraus zu entnehmen, dass auch die Strahlen FE, FA, FG, FB vier harmonische sind, also auf der Verbindungsgeraden EG vier harmonische Punkte ausschneiden müssen. Von diesen liegt E unendlich fern, folglich G in der Mitte.

Erkl. 250. Die Sätze über das Parallelogramm folgen aus Figur 87 in derselben Weise, dass nämlich die Parallelseiten mit der unendlich fernen Geraden und mit EG bezw. FG vier harmonische Strahlen bilden, also auch sowohl auf Seiten als Diagonalen vier harmonische Punkte ausschneiden.

Fürs Dreieck:

Satz. Jede Schwerlinie eines Dreiecks bildet mit den beiden Nachbarseiten und der Parallelen zur Gegenseite vier harmonische Strahlen.

Fürs Trapez:

Satz. Auf der Parallelen zu den Grundseiten des Trapezes durch den Schnittpunkt der nichtparallelen Seiten wird die Strecke zwischen den Diagonalen in diesem Punkte halbiert.

Satz. Auf der Parallelen zu den Grundseiten des Trapezes durch den Schnittpunkt der Diagonalen wird die Strecke zwischen den nichtparallelen Seiten in diesem Punkte halbiert.

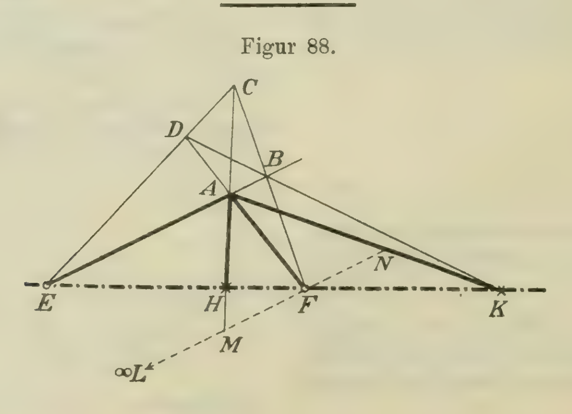
Fürs Parallelogramm:

Satz. Die Mittelparallelen des Parallelogramms gehen durch den Diagonalenschnittpunkt.

Satz. Die Parallelen zu den Parallelogrammseiten durch den Diagonalenschnittpunkt halbieren die Gegenseiten.

Aufgabe 49. Man soll die vorigen Sätze vom Trapez weiterführen und auch in Sätze vom Dreieck umsetzen.

Figur 88.



Aufgabe 50. Zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen zu konstruieren.

Auflösung. Man verbinde die drei Punkte mit einem beliebigen äusseren Punkte A, ziehe durch einen der gepaarten Punkte die Parallele zum Verbindungsstrahl des andern und verdopple die darauf durch den ungepaarten Strahl entstehende Strecke in entgegengesetzter Richtung vom ersteren. Die Verbindungsgerade des Endpunktes mit dem Scheitel A trifft den gesuchten vierten Punkt.

Erkl. 251. Sind gegeben EHF, gesucht K in Figur 88, so ziehe man EA, HA, FA und $FM \parallel AE$, mache $FN = FM$ und verbinde AN. — Sind gegeben EFK, gesucht H, so verbinde man wieder EA, FA, KA, ziehe $FN \parallel AE$, mache $FM = FN$ und ziehe AM. Jedesmal ist AF Schwerlinie im Dreieck AMN, und AE Parallele zur Gegenseite. Vergleiche Aufgabe 13.

Aufgabe 51. Zu drei gegebenen Strahlen den vierten harmonischen zu konstruieren.

Auflösung. I. Man schneide die drei gegebenen Strahlen durch eine Parallele zu einem der gepaarten und verdopple die darauf durch den ungepaarten Strahl entstehende Strecke in entgegengesetzter Richtung vom ersteren. Die Verbindungsgerade des Endpunktes mit dem Scheitel ist der gesuchte vierte Strahl.

II. Man schneide die drei gegebenen Strahlen durch eine Parallele zum ungepaarten und halbiere die darauf durch die gepaarten Strahlen entstehende Strecke. Die Verbindungsgerade des Mittelpunktes mit dem Scheitel ist der gesuchte vierte Strahl.

Erkl. 252. Im ersten Falle ist gegeben in Figur 88 AE, AF und AH. Man zieht $FM \parallel AE$, macht $FN = FM$ und zieht AN. — Ist gegeben AE, AF, AK, so zieht man $FN \parallel AE$, macht $FM = FN$ und zieht AM.

Im zweiten Falle ist gegeben in Figur 88 AE, AH, AK, man zieht $MN \parallel AE$, halbiert MN und verbindet AF. — Ist gegeben AF, AH, AK, so wird die Parallele zu AF von AK geschnitten in der Verlängerung über A hinaus. Der Halbierungspunkt wird wieder mit A verbunden und liefert AE nach dem ersten Satze der Aufgabe 48. Vergl. Aufgabe 13.

Aufgabe 52. Die beiden vorigen Aufgaben in möglichst verschiedenen Lagen zu wiederholen.

Aufgabe 53. Den Mittelpunkt einer Strecke durch lineare Konstruktion zu finden.

Auflösung. Man sucht den vierten harmonischen Punkt zum unendlich fernen Punkte der Strecke, wenn deren Endpunkte zugeordnet sind.

Erkl. 253. Man braucht zu nebenstehender Konstruktion parallele Geraden (wie wenn in Figur 14 zu gegebenen Punkten EFK der Punkt H gesucht würde); deren Konstruktion gilt aber als linear, nämlich als Verbindung mit gegebenem (unendlich fernem) Punkt. Man zieht EA, FA, BD, ED, FB, CA.

Aufgabe 54. Eine gegebene Strecke durch lineare Konstruktion zu verdoppeln.

Auflösung. Man sucht den vierten harmonischen Punkt zum einen Endpunkt der Strecke, wenn der andere Endpunkt mit dem unendlich fernen zugeordnet ist.

Erkl. 254. Man denke in Figur 86 als gegeben EHF, gesucht K (oder gegeben EFK, gesucht H). Man zieht HA, FA, DC, FC, AB, DB.

Aufgabe 55. Eine gegebene Fläche durch lineare Konstruktion zu ver-n-fachen.

Andeutung. Man wiederhole Aufgabe 54.

Aufgabe 56. Die harmonischen Eigenschaften des Vierecks sollen allein auf Grund der Doppelverhältnisse nachgewiesen werden.

Auflösung. In der Nebenecke F des vollständigen Vierecks (Figur 76) bezw. in der Ecke F des vollständigen Vierseits (Figur 77) haben die vier Strahlen $gnac$ das Doppelverhältnis $(gnac)$. Nach Satz 9 des I. Teils hat denselben Wert auch das Doppelverhältnis der von den vier Strahlen $gnac$ ausgeschnittenen Punkte auf b oder auf d, also:

$$(gnac) = (EIBC) = (ELAD).$$

Wegen der Strahlen $mfne$ durch G haben aber auch gleiches Doppelverhältnis die von diesen Strahlen auf b und d ausgeschnittenen Punkte, also:

$$(EIBC) = (mnfe) = (ELDA).$$

Nach dem vorigen muss daher hier:

$$(ELAD) = ELDA)$$

sein; nach Satz 6 des I. Teiles aber ist allgemein:

$$(ELDA) = \frac{1}{(ELAD)}.$$

Hiernach muss das Doppelverhältnis $(ELAD)$ den ausgezeichneten Wert haben, dass:

$$(ELAD) = \frac{1}{(ELAD)}, \text{ oder } (ELAD)^2 = 1.$$

Dies kann nur zutreffen, wenn $(ELAD)$ entweder gleich $+1$ oder gleich -1 ist. Der Wert $+1$ kann nicht vorliegen, weil in diesem Falle drei Punkte zusammenfallen müssten, also hat man $(ELAD) = -1$; und das ist der Wert des Doppelverhältnisses für vier harmonische Elemente, hier für die Punkte $ELAD$ oder $EIBC$, auch $EGHK$ sowie $MGAC$, $NGBD$ und die Strahlen $gnac$.

Erkl. 255. Da das Doppelverhältnis von vier Punkten definiert ist als Quotient der Teilungsverhältnisse der Strecke der beiden ersten Punkte durch den dritten und vierten, so schreibt man auch die Reihenfolge der Strahlen $ganc$ im Doppelverhältnis so, dass zwei Strahlen gn durch a innen, durch c aussen geteilt werden. Dann muss natürlich auch in jedem projektivischen Gebilde die Anordnung der entsprechenden Elemente so sein, dass das erste und zweite durchs dritte innen, durchs vierte aussen getrennt werden.

Erkl. 256. Nach Satz 9 des I. Teiles ist das Doppelverhältnis von vier Punkten dasselbe wie das Doppelverhältnis der Strahlen, durch welche sie geschnitten werden; und auch das Doppelverhältnis von vier Punkten dasselbe wie das Doppelverhältnis derjenigen vier andern Punkte (in gleicher Reihenfolge), welche durch dieselben vier Strahlen ausgeschnitten werden. — Nach Satz 6 des I. Teiles erhält allgemein ein Doppelverhältnis den reciproken Wert, wenn man die Elemente eines seiner Elementenpaare vertauscht. Hat also hier das Doppelverhältnis den besonderen Wert, dass es seinem reciproken Werte selbst gleich ist, so muss es einen ausgezeichneten, einen konstanten Wert haben; und dieser ist, wie auch in Erkl. 41 ausgeführt wird, der Wert -1 für die harmonische Beziehung.

Erkl. 257. Aus nebenstehendem Ergebnis folgt sofort der Satz 5 in seinen beiden Teilen, da nach Satz 9 des I. Teils die harmonische Beziehung durch Schneidungen der Strahlen $ganc$ und Projektionen ihrer Schnittpunkte sofort übertragen werden muss.

Aufgabe 57. Derselbe Beweis soll statt mit Punkten, mit Strahlen durchgeführt werden.

Andeutung. Man stelle den dualistischen Beweis zur Auflösung der Aufgabe 56 auf.

Aufgabe 58. Man soll die verschiedenen Einführungsarten der harmonischen Gebilde in den Fragen und Aufgaben dieses Lehrbuches übersichtlich zusammenstellen.

Auflösung. Es stehen sechs verschiedene Wege zu Gebote für die Einführung der harmonischen Gebilde:

1. a) Die rein geometrische Definition der harmonischen Punkte auf Grund der Vierecksbeziehung, dazu b) die Definition der harmonischen Strahlen als Projektion der wie eben definierten harmonischen Punkte, und sodann c) der Nachweis der Dualität zwischen diesen harmoni-

Erkl. 258. Als notwendige Ergänzung der nebenstehenden sechs Fälle wäre hinzuzufügen:

7) der Nachweis, dass aus den auf Grund der Vierecksbeziehungen erhaltenen geometrischen Definitionen der harmonischen Gebilde auch die metrischen Eigenschaften des Doppelverhältnisses -1 bezw. der Proportion glei-

cher innerer und äusserer Teilung abgeleitet werden können, bezw. dass die geometrisch definierten harmonischen Gebilde übereinstimmen mit den metrisch definierten; — und umgekehrt

8) der Nachweis, dass aus den auf Grund des Doppelverhältnisses — 1 bezw. der Proportion gleicher innerer und äusserer Teilung erhaltenen metrischen Definitionen der harmonischen Gebilde auch die geometrischen Eigenschaften der Vierecksbeziehungen abgeleitet werden können, bezw. dass die metrisch definierten harmonischen Gebilde übereinstimmen mit den geometrisch definierten.

Erkl. 259. Ordnet man die Antworten und Auflösungen im Buche nach der Reihenfolge der in nebenstehender Auflösung sowie Erkl. 258 aufgestellten Gesichtspunkte, so erhält man:

1a) aus Antwort 2, 1b) aus Antwort 8), 1c) aus Antwort 9 und 10 sowie Auflösung 6 und 15;

2a) aus Auflösung 4, 2b) aus Erkl. 219, 2c) aus Antwort 9 und 10 sowie Erkl. 229;

3a) aus Antwort 2, 3b) aus Auflösung 4, 3c) aus Antwort 9 und 10 sowie Auflösung 6;

4a) aus Antwort 13 und 14, 4b) und 4c) aus Antwort 20 bezw. Satz 9 des I. Teils;

5a) und 5b) aus Antwort 13, 5c) aus Satz 9 des I. Teils;

6a) aus Antwort 13, 6b) und 6c) aus Satz 9 des I. Teils;

7) aus Antwort 16 und 17;

8) mit der Proportion aus Antwort 15, mit dem Doppelverhältnis aus Auflösung 56 und 57.

Erkl. 260. Ordnet man umgekehrt die Fälle 1 bis 8 der nebenstehenden Auflösung und Erkl. 258 nach der Reihenfolge der Antworten und Auflösungen im Buche, in welchen sie behandelt sind, so erhält man:

Antwort 2, 3, 4, 5, 6, 7 zu 1a); Antwort 8 zu 1b); Antwort 9 zu 1c), 2c); Antwort 10 zu 1c), 2c), 3c); Antwort 13 und 14 zu 4a), 5a)b), 6a); Antwort 15 zu 8; Antwort 16 bis 19 zu 7; Antwort 20 zu 4b)c). — Auflösung 1 bis 3 zu 1a); Auflösung 4, 5 zu 2b), 3a); Auflösung 6 zu 2, 3, 4c); Auflösung 7, 8 bis 12 zu 2b), 3a); Auflösung 15 zu 1, 2c); Auflösung 16 zu 2, 3c); Auflösung 46 zu 5b), 6a); Auflösung 47, 52 zu 5b), 6c); Auflösung 50, 52 zu 4c), 5b); Auflösung 51, 52 zu 4, 5b)c); Auflösung 53 bis 55 zu 5b), 6c); Auflösung 56, 57 zu 8.

Erkl. 261. Zur hier gegebenen Uebersicht gehört noch die Bemerkung, dass die Invarianz der harmonischen Beziehung bei der Projektion behandelt ist in Antwort 10 und 11, 19 und 20 sowie Satz 9 des I. Teils.

schen Strahlen und den vorigen harmonischen Punkten.

2. Die rein geometrische dualistische Definition sowohl a) der harmonischen Punkte als auch b) der harmonischen Strahlen auf Grund der Vierecksbeziehungen, und dazu c) der Nachweis, dass Projektionen solcher harmonischen Punkte und Strahlen immer wieder ebensolche harmonische Punkte und Strahlen liefern.

3. a) Die rein geometrische Definition der harmonischen Strahlen auf Grund der Vierecksbeziehungen, dazu b) die Definition der harmonischen Punkte als Schnitt der wie eben definierten harmonischen Strahlen und sodann c) der Nachweis der Dualität zwischen diesen harmonischen Punkten und den vorigen harmonischen Strahlen.

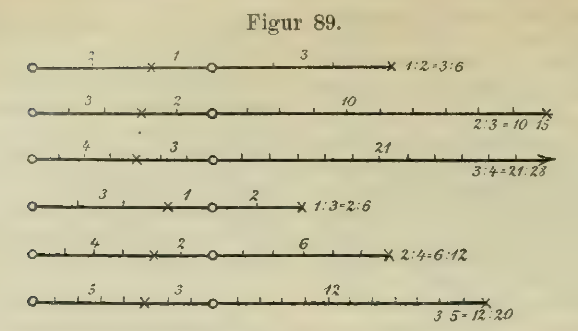
4. a) Die metrische Definition der harmonischen Punkte auf Grund des Doppelverhältnisses — 1, oder was dasselbe heisst, auf Grund der Proportion gleicher innerer und äusserer Teilung, dazu b) die Definition der harmonischen Strahlen als Projektion der wie eben definierten harmonischen Punkte, und sodann c) der Nachweis, dass auch diese harmonischen Strahlen gleiches Doppelverhältnis haben, wie die vorigen harmonischen Punkte.

5. Die metrische dualistische Definition sowohl a) der harmonischen Punkte als auch b) der harmonischen Strahlen auf Grund des Doppelverhältnisses — 1 oder der Proportion gleicher innerer und äusserer Teilung, und dazu c) der Nachweis, dass Projektionen solcher harmonischen Punkte und Strahlen immer wieder ebensolche harmonische Strahlen und Punkte liefern.

6. a) Die metrische Definition der harmonischen Strahlen auf Grund des Doppelverhältnisses — 1 oder der Proportion gleicher innerer und äusserer Teilung, dazu b) die Definition der harmonischen Punkte als Projektion der wie eben definierten harmonischen Strahlen und sodann c) der Nachweis, dass auch diese harmonischen Punkte gleiches Doppelverhältnis haben wie die vorigen harmonischen Strahlen.

Ueber die gegenseitige Ueberführung der Einführungen 1 — 3 und 4—6 sehe man die Erkl. 65.

Figur 89.



Aufgabe 59. Man berechne die Lage des vierten harmonischen Punktes zu drei nach Lage und Zuordnung gegebenen Punkten.

Auflösung. Man unterscheidet die zwei Fälle, ob der gesuchte Punkt ein innerer oder äusserer ist:

1. Ist der gesuchte Punkt ein innerer, so bezeichne a den Abstand des gegebenen mittleren Punktes von dem ihm nicht zugeordneten äusseren Punkte, b den Abstand der beiden äussersten Punkte, x den Abstand des gesuchten Punktes vom ersteren (ihm zugeordneten) äusseren Punkte. Dann hat man x zu finden entweder aus der Gleichung der Proportion gleicher innerer und äusserer Teilung:

$$a:(x-a) = b:(b-x),$$

woraus:

$$x = \frac{2ab}{a+b},$$

oder unmittelbar als harmonisches Mittel, welches genau denselben Wert liefert.

2. Ist der gesuchte Punkt ein äusserer, so bezeichne a den Abstand des gegebenen äusseren Punktes vom nicht zugeordneten, c seinen Abstand vom zugeordneten inneren Punkte, y seinen Abstand vom gesuchten Punkte. Dann hat man y zu finden entweder aus der Gleichung der Proportion gleicher innerer und äusserer Teilung:

$$a:(c-a) = y:(y-c),$$

woraus:

$$y = \frac{ac}{2a-c},$$

oder aus der Gleichung für das harmonische Mittel:

$$b = \frac{2ay}{a+y},$$

woraus derselbe Wert hervorgeht.

Erkl. 262. Wählt man als Beispiel die dritte Zeile der Figur 89, so ist im ersten Falle der nebenstehenden Antwort:

$$\alpha)\ a = 4,\ b = 28,\ x = \frac{2\cdot 4\cdot 28}{4+28} = 7$$

für den einen, und

$$\beta)\ a = 21,\ b = 28,\ x = \frac{2\cdot 21\cdot 28}{21+28} = 24$$

für den andern inneren Punkt.

Im zweiten Falle wird:

$$\alpha)\ a = 4,\ c = 7,\ y = \frac{4\cdot 7}{8-7} = 28$$

für den einen, und

$$\beta)\ a = 21,\ c = 24,\ y = \frac{21\cdot 24}{42-24} = 28$$

für den andern äusseren Punkt.

In der That muss y gleichen Wert erhalten, ob man den Abstand AD oder DA sucht.

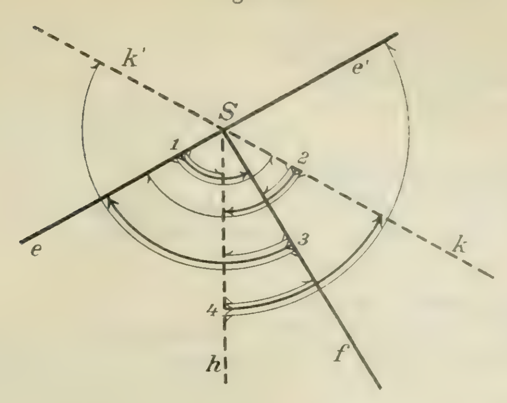
Erkl. 263. Wenn die Abstände der Punkte nur in allgemeinen Grössen gegeben sind, so muss doch über deren Grössenvergleich die Annahme $a < b$ bezw. $a < c$ gemacht werden. Sonst führen die Ausdrücke von x und y auf unbrauchbare Werte. In der That muss im ersten Falle der Wert von x grösser werden als a, aber kleiner als b, im zweiten Falle der Wert von y grösser als c, damit die richtige Lage des vierten Punktes zu den drei ersten herauskommen kann.

Erkl. 264. In den beiden Fällen der nebenstehenden Lösung erkennt man sofort die Uebereinstimmung der Beziehung in der Art, dass der Buchstabe a beide Male dieselbe Strecke bezeichnet, dagegen die Werte x und b des ersten Falles mit den Werten c und y des zweiten Falles übereinstimmen.

Aufgabe 60. Man wiederhole Aufgabe 59 für die Fälle der zweiten und vierten Zeile der Figur 89.

Andeutung. Man verfahre wie in Erkl. 262.

Figur 90.



Aufgabe 61. Man berechne die Lage des vierten harmonischen Strahles zu drei nach Lage und Zuordnung gegebenen Strahlen.

Erkl. 265. Setzt man in Figur 90 als bekannt die Strahlen efh, gesucht k und

$$\sphericalangle(eh) = 48^0,\ (hf) = 29^0,$$

so hat man für die beiden Fälle nebenstehender Berechnung folgenden Plan:

1. Gesucht k als innerer Strahl: Ausgangsstrahl h:

$$\alpha = (hf) = 29^0,$$
$$\beta = (he') = 132^0,$$
$$\varphi = (hk),$$
$$ctg\,\varphi = \frac{1}{2}(ctg\,\alpha + ctg\,\beta)$$
$$= \frac{1}{2}(ctg\,29^0 + ctg\,132^0)$$
$$= \frac{1}{2}(ctg\,29^0 - ctg\,48^0)$$
$$= \frac{1}{2}(1{,}8040478 - 0{,}9004040)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 0{,}9036438 = 0{,}4518219.$$

Also: $\varphi = 65^0\,41'\,17{,}8''$;

$$\sphericalangle(fk) = \varphi - \alpha = 36^0\,41'\,17{,}8''.$$

2. Gesucht k als äusserer Strahl, bezw. als k'; Ausgangsstrahl f:

$$\alpha = (fh) = 29^0, \text{ wie oben,}$$
$$\gamma = (fe) = 77^0,$$
$$\psi = (fk'),$$
$$ctg\,\psi = 2\,ctg\,\gamma - ctg\,\alpha$$
$$= 2\,ctg\,77^0 - ctg\,29^0$$
$$= 2\cdot 0{,}2308682 - 1{,}8040478$$
$$= -1{,}3423114.$$

Also:

$$ctg\,(180^0 - \psi) = +1{,}3423114$$
$$180^0 - \psi = 36^0\,41'\,7{,}7'',$$
$$\psi = 143^0\,18'\,52{,}3'';$$
$$(ek') = \psi - \gamma = 66^0\,18'\,52{,}3''.$$

Auflösung. 1. Man kann den gesuchten Strahl stets als einen inneren behandeln, indem man in Figur 90 für Auffindung der Strahlen h und f die Strahlen e und k als äussere, für Auffindung der Strahlen e bezw. k dagegen f und k' bezw. h und e' als äussere Strahlen betrachtet.

Ist dann nach dieser Auffassung α der Winkel des gegebenen mittleren Strahles mit dem ihm nicht zugeordneten äusseren Strahl, β der Winkel der beiden äussersten Strahlen, φ der Winkel des gesuchten Strahles mit dem ersteren ihm zugeordneten äusseren Strahle (alle drei Winkel in gleicher Umlaufsrichtung gemessen), so findet man φ stets aus der Gleichung:

$$ctg\,\varphi = \frac{1}{2}(ctg\,\alpha + ctg\,\beta).$$

2. Man könnte den gesuchten Strahl auch stets als einen äusseren behandeln, indem man in Figur 90 für Auffindung der Strahlen e, k die Strahlen h und f als innere, für Auffindung der Strahlen h bezw. f dagegen f und k bezw. e und h als innere betrachtet.

Ist dann nach dieser Auffassung α der Winkel des gegebenen äusseren Strahles mit dem nicht zugeordneten, γ sein Winkel mit dem zugeordneten inneren Strahle, ψ sein Winkel mit dem gesuchten Strahle (alle drei in gleicher Umlaufsrichtung gemessen), so findet man ψ aus der Gleichung:

$$ctg\,\gamma = \frac{1}{2}(ctg\,\alpha + ctg\,\psi).$$

woraus:

$$ctg\,\psi = 2\,ctg\,\gamma - ctg\,\alpha.$$

3. Ueber die verschiedenen Auffassungen der Strahlen als innere und äussere vergleiche Figur 90 und Erkl. 61a.

Erkl. 266. Beide Ergebnisse der vorigen Erklärung stimmen überein, da $\psi + \varphi - \alpha = 180^0$. Man erhält also eine Gruppe harmonischer Strahlen, wenn man (bis auf Minuten genau) nebeneinander anträgt die Winkel:
$66^0 19'$, 48^0, 29^0, $36^0 41'$, $66^0 19'$, 48^0, 29^0, $36^0 41'$ — zusammen 360^0.

Aufgabe 62. In Figur 90 sei gegeben:
$\sphericalangle (e'k) = 66^0 19'$, $\sphericalangle (kf) = 36^0 41'$;
gesucht Strahl h.

Andeutung. Man verfahre nach Aufgabe 61 und Erkl. 265.

Aufgabe 63. Man bestätige numerisch an Figur 90 den Wert -1 des Doppelverhältnisses aus den vorigen Winkeln.

Auflösung. Das Doppelverhältnis der Strahlen $efhk$ oder $(efhk)$ ist gleich:
$$\frac{\sin(eh)}{\sin(hf)} : \frac{\sin(ek)}{\sin(kf)},$$
jenes derselben Strahlen in umgekehrter Reihenfolge:
$$(khfe) = \frac{\sin(kf)}{\sin(fh)} : \frac{\sin(ke)}{\sin(eh)}.$$
Die beiden Quotienten müssen also beide Male denselben Wert enthalten. In der That ist auch (ohne Rücksicht aufs Vorzeichen —):
$$\frac{\sin 48^0}{\sin 29^0} = 1{,}533; \quad \frac{\sin 113^0 41'}{\sin 36^0 41'} = 1{,}533$$
und
$$\frac{\sin 36^0 41'}{\sin 29^0} = 1{,}232; \quad \frac{\sin 113^0 41'}{\sin 48^0} = 1{,}232.$$
Man sehe die Ausrechnung in Erkl. 267.

Erkl. 267. Man hat:

$$\log\sin 48^0 = 0{,}87107 - 1$$
$$\log\sin 29^0 = 0{,}68557 - 1$$
$$\log \text{Quot} = 0{,}18550$$
$$\text{Quot} = 1{,}533$$
$$\log\sin 113^0 41' = 0{,}96179 - 1$$
$$\log\sin 36^0 41' = 0{,}77626 - 1$$
$$\log \text{Quot} = 0{,}18553$$
$$\text{Quot} = 1{,}533$$

Und ebenso:

$$\log\sin 36^0 41 = 0{,}77626 - 1$$
$$\log\sin 29^0 = 0{,}68557 - 1$$
$$\log \text{Quot} = 0{,}09069$$
$$\text{Quot} = 1{,}232$$
$$\log\sin 113^0 41' = 0{,}96179 - 1$$
$$\log\sin 48^0 = 0{,}87107 - 1$$
$$\log \text{Quot} = 0{,}09072$$
$$\text{Quot} = 1{,}232$$

Erkl. 268. Dass die beiden Ergebnisse nicht ganz bis auf die letzten Decimalstellen übereinstimmen, rührt daher, dass die Bestimmung des Winkels $36^0 41'$ bezw. $66^0 19'$ aus Erkl. 265 auch nur bis auf Minuten genau entnommen wurde, während die Sekunden ausser Acht gelassen wurden.

Aufgabe 64. Dieselbe Aufgabe für andere Winkelwerte zu wiederholen.

Aufgabe 65. Man berechne und bestätige in Figur 89 Zeile 3 die Beziehung der beiderlei gleichgrossen Teilungsverhältnisse.

Auflösung. In Zeile 3 der Figur 89 ist $AC : CB = AD : DB = 4 : 3 = x$ und $DB : BC = DA : AC = 7 : 1 = y$. In der That ist:
$$\frac{x+1}{x-1} = \left(\frac{4}{3} + 1\right) : \left(\frac{4}{3} - 1\right)$$
$$= \frac{7}{3} : \frac{1}{3} = 7 = y;$$
$$\frac{y+1}{y-1} = (7+1) : (7-1) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = x.$$

Erkl. 269. Die beiden Werte 1,533 und 1,232 für die Strahlen der Aufgabe 63 stehen nicht mehr in dem einfachen Verhältnis, wie in Erkl. 54 für Punkte nachgewiesen wurde. Vielmehr müsste hier eine Umrechnung mit Funktionen gemacht werden, während in Erkl. 54 eine solche viel einfacher mit Strecken durchgeführt werden konnte. Auch ist nach Erkl. 59 die gegenseitige Beziehung der Sinusquotienten bei den Strahlen keine konstante.

Aufgabe 66. Dieselbe Aufgabe für Zeile 2 bezw. 4 der Figur 89 zu lösen.

Aufgabe 67. Man suche durch Berechnung und Konstruktion, welcher Zwischenton im Intervall einer Quinte den besten Wohlklang ergibt, bezw. welche Saitenlängen dabei auftreten.

Auflösung. 1. Bei einer Quinte ist das Verhältnis der Schwingungszahlen wie 1 : 1,5 oder wie 2 : 3. Die Schwingungszahl des bestklingenden Zwischentons hat also die Proportionalzahl:

$$\frac{1}{2}(2+3) = 2\frac{1}{2}$$

und liefert den Dreiklang mit Verhältnis der Schwingungszahlen:

$$1 : 1\frac{1}{4} : 1\frac{1}{2} \text{ oder } 1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2} = 4 : 5 : 6.$$

Der Zwischenton ist also die grosse Terz.

2. Bei einer Quint ist das Verhältnis der Saitenlängen wie $1 : \frac{2}{3}$ oder wie 3 : 2. Die Länge der am besten mitklingenden dritten Saite ist also das harmonische Mittel von 3 und 2, nämlich:

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{3+2} = \frac{12}{5}$$

und liefert das Verhältnis der Längen:

$$3 : \frac{12}{5} : 2 \text{ oder } 15 : 12 : 10 \text{ oder } 1 : \frac{4}{5} : \frac{2}{3}.$$

Die mittlere Saitenlänge klingt in der grossen Terz.

3. Zur Konstruktion letzterer Länge trage man zwei Strecken von der Länge 2 und 3 (bezw. 10 und 15) von gemeinsamem Anfangspunkt in gleicher Richtung an und konstruiere den diesem gemeinsamen Punkt zugeordneten vierten harmonischen zwischen den gepaarten beiden Endpunkten. Man erhält den Punkt im Abstand $2\frac{2}{5}$ (bezw. 12) vom Anfangspunkt.

Erkl. 270. Aufgaben wie die nebenstehende wurden schon im Altertum ausgeführt in der sog. pythagoreischen Schule auf Grund der Experimente mit dem sog. Monochord. Daraus leitete jene Schule ihre Ansicht ab, dass die Zahl das allgemeine Bedingungsprinzip für jede Harmonie der Dinge sei, und diese Auffassung wurde verallgemeinert bis zur Harmonie der sittlichen Ordnung unter den Menschen und bis zur „Harmonie der Sphären".

Erk. 271. Als Figur für nebenstehende Ausführung kann genaue Verwendung finden die zweite Zeile der Figur 89, indem dort von rechts her 10 und 15 angetragen sind, und der vierte harmonische Punkt im Abstand 12 vom rechten Endpunkt erscheint.

Für die Saitenlängen ist bei dieser wie bei allen derartigen Rechnungen die Spannung durch gleiches Gewicht sowie gleiche Masse der Längeneinheit der Saiten vorausgesetzt. Vergl. die physikalische Formel in Erkl. 58.

Aufgabe 68. Die gleiche Aufgabe für das Intervall der Sext zu lösen.

Aufgabe 69. Man soll zu dem Ergebnisse der Erkl. 61 a eine analoge Beziehung unter vier harmonischen Punkten aufsuchen und beides dualistisch gegenüberstellen.

Auflösung. 1. Aus Erkl. 61 a entnimmt man für vier harmonische Strahlen $efhk$, wovon e und f getrennt sind durch h und k, und wobei $e'f'h'k'$ die Gegenstrahlen zu $efhk$ sind,

$$ctg(ef) = \frac{1}{2}[ctg(eh) + ctg(ek)] = \frac{1}{2}[ctg(eh) - ctg(k'e)]$$

$$= \frac{1}{2}[ctg(hf) + ctg(k'f)] = \frac{1}{2}[ctg(hf) - ctg(fk)].$$

Und ebenso:

$$ctg\,(hk) = \frac{1}{2}\,[ctg\,(fk) + ctg\,(ek)] = \frac{1}{2}\,[ctg\,(fk) - ctg\,(ke')]$$
$$= \frac{1}{2}\,[ctg\,(hf) + ctg\,(he')] = \frac{1}{2}\,[ctg\,(hf) - ctg\,(eh)].$$

2. In gleicher Weise erhält man aber auch für vier harmonische Punkte $EFHK$, wovon E und F getrennt sind durch H und K, die Beziehungen:

$$\frac{1}{EF} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{EH} + \frac{1}{EK}\right) \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{HF} - \frac{1}{FK}\right),$$

und ebenso:

$$\frac{1}{HK} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{FK} + \frac{1}{EK}\right) \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{HF} - \frac{1}{EH}\right).$$

Siehe den Beweis in Erkl. 273.

3. Man kann daher die dualistischen Sätze aufstellen:

Satz. Das Reciproke der Strecke zwischen zwei zugeordneten harmonischen Punkten ist:

a) gleich der halben Summe der Reciproken der zwei Strecken zwischen ihrem äusseren Endpunkte und dem inneren und äusseren (von ihm aus in gleicher Richtung liegenden) Teilpunkte;

b) gleich der halben Differenz der Reciproken der zwei Strecken zwischen ihrem inneren Endpunkte und dem inneren und äusseren (von ihm aus in entgegengesetzter Richtung liegenden) Teilpunkte.

Satz. Die Kotangente des Winkels zwischen zwei zugeordneten harmonischen Strahlen ist:

a) gleich der halben Summe der Kotangenten der zwei Winkel zwischen seinem äusseren Schenkel und dem inneren und äusseren (von ihm aus in gleicher Umlaufsrichtung zu erreichenden) Teilstrahle;

b) gleich der halben Differenz der Kotangenten der zwei Winkel zwischen seinem inneren Schenkel und dem inneren und äusseren (von ihm aus in entgegengesetzter Umlaufsrichtung zu erreichenden) Teilstrahle.

4. Dadurch treten für jede Gruppe von vier harmonischen Punkten zwei Paare Gleichungen auf, für jede Gruppe von harmonischen Strahlen vier Paare Gleichungen, weil bei vier harmonischen Punkten nur zwei Punkte als äussere, die zwei andern nur als innere angesehen werden können, bei vier harmonischen Strahlen aber jeder sowohl als ein äusserer wie auch als ein innerer Strahl betrachtet werden kann. Von diesen letzteren Gleichungen fallen aber in den Zahlenwerten doch wieder je zwei in eine zusammen, weil sie sich nur unterscheiden durch den positiven bezw. negativen Wert der Kotangenten eines Winkels bezw. Nebenwinkels.

Erkl. 272. Im obenstehenden ist jede Winkelgrösse durch gleiche Drehungsrichtung der Schenkel angegeben. Wird daran festgehalten, dass (pq) der entgegengesetzte und daher negative Winkel zu (qp) ist, so hat man $(pq) = 180 - (qp') = 180 - (q'p)$ und

$$ctg\,(pq) = -ctg\,[180 - (pq)] = -ctg\,(q'p) = ctg\,(pq') = ctg\,(p'q).$$

Erkl. 273. Während der erste Teil obenstehender Auflösung nur Wiederholung der Ergebnisse aus Erkl. 61 a ist, erfordert der zweite Teil besonderen Beweis, wenigstens in seiner zweiten Hälfte, da ja die erste Hälfte nur der Ausdruck für das harmonische Mittel darstellt. Der Beweis für die Richtigkeit der zweiten Hälfte kann folgendermassen erbracht werden:

I. Eine Strecke $EF = a$ sei geteilt innen durch H und aussen durch K im Verhältnis $m:n$, wo $m > n$, dann ist nach früherem:

$$EH = \frac{m}{m+n}\cdot a,\; HF = \frac{n}{m+n}\cdot a;\; EK = \frac{m}{m-n}\cdot a,\; FK = \frac{n}{m-n}\cdot a;\; HK = \frac{2\,mna}{m^2-n^2}.$$

Nun ist:

a) $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{EH}+\frac{1}{EK}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{ma}+\frac{m-n}{ma}\right)=\frac{2m}{2ma}=\frac{1}{a}=\frac{1}{EF};$$

und

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{FK}+\frac{1}{EK}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{na}+\frac{m-n}{ma}\right)=\frac{(m-n)}{2mna}(m+n)=\frac{m^2-n^2}{2mna}=\frac{1}{HK}.$$

b) $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{HF}-\frac{1}{FK}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{na}-\frac{m-n}{na}\right)=\frac{2n}{2na}=\frac{1}{a}=\frac{1}{EF};$$

und

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{HF}-\frac{1}{EH}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{na}-\frac{m+n}{ma}\right)=\frac{m+n}{2mna}(m-n)=\frac{m^2-n^2}{2mna}=\frac{1}{HK}.$$

Erkl. 274. Derselbe Beweis bei anderer Grundlage kann folgendermassen lauten:

II. Zum Grenzpunkt H zweier aneinanderstossenden Strecken $EH=m$ und $HF=n$, wo $m>n$, sei der äussere vierte harmonische Punkt K gefunden, so dass $EK=\frac{m(m+n)}{m-n}$, $FK=\frac{n(m+n)}{m-n}$. Dann wird $HK=\frac{2mn}{m-n}$; und es ist:

a) $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{EH}+\frac{1}{EK}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{m-n}{m(m+n)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2m}{m(m+n)}=\frac{1}{m+n}=\frac{1}{EF};$$

und

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{FK}+\frac{1}{EK}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n(m+n)}+\frac{m-n}{m(m+n)}\right)=\frac{m-n}{2}\cdot\frac{m+n}{mn(m+n)}=\frac{m-n}{2mn}=\frac{1}{HK}.$$

b) $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{HF}-\frac{1}{FK}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{m-n}{n(m+n)}\right)=\frac{2n}{2n(m+n)}=\frac{1}{m+n}=\frac{1}{EF};$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{HF}-\frac{1}{EH}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=\frac{m-n}{2mn}=\frac{1}{HK}.$$

Erkl. 275. Setzt man die beiden Ausdrücke a) und b) des obenstehenden Satzes für EF bezw. $\sphericalangle(ef)$ einander gleich, so kann man zu folgendem bemerkenswerten Ergebnis gelangen:

$$\frac{1}{EH}+\frac{1}{EK}=\frac{1}{HF}-\frac{1}{FK} \text{ oder } \frac{1}{EH}+\frac{1}{EK}+\frac{1}{FH}+\frac{1}{FK}=0$$

$$ctg(eh)+ctg(ek)=ctg(hf)-ctg(fk) \text{ oder } ctg(eh)+ctg(ek)+ctg(fh)+ctg(fk)=0.$$

Und genau gleiches Ergebnis liefert die Gleichsetzung der Ausdrücke für HK bezw. $\sphericalangle(hk)$.

Aufgabe 70. Man bestätige ziffernmässig die Ergebnisse der vorigen Sätze an Figur 89 und 90.

Aufgabe 71. Gleiche Aufgabe für die Aufstellung der Erklärung 275.

Erkl. 276. Auch die Antworten der Fragen 22, 23, 24 bieten eine grosse Zahl von Anwendungen für rechnungsmässige Bestätigung an den Figuren 89 und 90, welche hier nicht alle einzeln als „Aufgaben“ angeführt sind. Dasselbe gilt für Aufgabe 74.

Aufgabe 72. Die Sätze 9, 9a, 9b an den Figuren 89 und 90 zu bestätigen.

Aufgabe 73. Man bestätige die Uebereinstimmung der Erkl. 77 mit Auflösung der Aufgabe 61.

Auflösung. In Figur 90 ist nach Aufgabe 61 in der Bezeichnungsweise der Erkl. 77 zu setzen:

Erkl. 277. Die wirkliche Ausrechnung würde am besten logarithmisch geschehen, wie folgt:

$$\begin{aligned} \log tg\, 38^0\, 30' &= 0{,}9006052 - 1 \\ 2.\ \log tg\, 38^0\, 30' &= 0{,}8012104 - 1 \\ \log ctg\, 9^0\, 30' &= 0{,}7763935 \\ \log ctg\,(mq) &= 0{,}5776039 \\ \sphericalangle (mq) &= 75^0\, 11'\, 7{,}8''. \end{aligned}$$

Und diese Rechnung ist bequemer als jene in Auflösung der Aufgabe 61; das Ergebnis stimmt bestens überein.

$(ab) = 77^0$, $(am) = (mb) = \frac{(ab)}{2} = 38^0\, 30'$. also $(mp) = 38^0\, 30' - 29^0 = 9^0\, 30'$. Und nach Auflösung der Aufgabe 61 müsste gefunden werden $(mq) = 75^0\, 11'\, 7{,}7''$.

Nach Satz 10a bezw. Antwort auf Frage 23, 1 wird:

$$\begin{aligned} tg\,(mq) &= ctg\,(mp) \cdot tg^2 \frac{(ab)}{2} \\ &= ctg\, 9^0\, 30' \cdot tg^2\, 38^0\, 30. \end{aligned}$$

Dies Produkt gibt 3,780976, und das ist wirklich gleich $tg\ 75^0\, 11'\, 7{,}8''$.

Aufgabe 74. Man beweise, dass für vier harmonische Punkte $ABPQ$ mit Mittelpunkten M und N die Beziehung besteht:

$$\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 = \overline{PQ}^2 + \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}^2.$$

Auflösung. 1. Nach Satz 10 bezw. Antwort auf Frage 22, 1 ist:

$$MP \cdot MQ = \frac{1}{4} \overline{AB}^2.$$

Nimmt man diese Beziehung zusammen mit:

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= (PM + MQ)^2 \\ &= \overline{PM}^2 + \overline{MQ}^2 + 2 \cdot PM \cdot MQ, \end{aligned}$$

so folgt wegen der Verschiedenheit der Streckenrichtungen MP und PM bei Einsetzung:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{MQ}^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} \overline{AB}^2,$$

also wie verlangt:

$$\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 = \overline{PQ}^2 + \frac{1}{2} \overline{AB}^2.$$

2. Die analoge Formel für AB und N lautet:

$$\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2 = \overline{AB}^2 + \frac{1}{2} \overline{PQ}^2.$$

3. Fasst man beide Formeln zusammen, so erhält man:

$$\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 + \overline{NA}^2 + \overline{NB}^2 = \frac{3}{2} (\overline{AB}^2 + \overline{PQ}^2).$$

Erkl. 278. Auch zur vorstehenden Beziehung lässt sich eine dualistische für vier harmonische Strahlen aufstellen, wie folgt:

Nach Antwort auf Frage 23, 1 ist:

$$tg\,(mp)\, tg\,(mq) = tg^2 \frac{(ab)}{2}.$$

Ferner:

$$\begin{aligned} tg\,(pq) &= tg\,[(pm) + (mq)] = \frac{tg\,(pm) + tg\,(mq)}{1 - tg\,(pm)\, tg\,(mq)} \\ &= \frac{tg\,(pm) + tg\,(mq)}{1 + tg\,(mp)\, tg\,(mq)} = \frac{tg\,(pm) + tg\,(mq)}{1 + tg^2 \frac{(ab)}{2}}. \end{aligned}$$

Folglich:

$$tg\,(pq) \cdot \left[1 + tg^2 \frac{(ab)}{2}\right] = tg\,(pm) + tg\,(mq).$$

Und durch Quadrierung:

$$\begin{aligned} tg^2\,(pq) \left[1 + tg^2 \frac{(ab)}{2}\right]^2 &= tg^2\,(pm) + 2\, tg\,(pm)\, tg\,(mq) + tg^2\,(mq) \\ &= tg^2\,(mp) - 2\, tg\,(mp)\, tg\,(mq) + tg^2\,(mq) \\ &= tg^2\,(mp) + tg^2\,(mq) - 2\, tg^2 \frac{(ab)}{2}. \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} tg^2\,(mp) + tg^2\,(mq) &= tg^2\,(pq) \left[1 + tg^2 \frac{(ab)}{2}\right]^2 + 2\, tg^2 \frac{(ab)}{2} \\ &= \frac{tg^2\,(pq)}{\cos^2 \frac{(ab)}{2}} + 2\, tg^2 \frac{(ab)}{2} = \frac{tg^2\,(pq) + 2 \sin^2 \frac{(ab)}{2}}{\cos^2 \frac{(ab)}{2}}. \end{aligned}$$

Erkl. 279. Analog vorigem Ergebnis für (pq) würde für (ab) entstehen:

$$tg^2\,(na) + tg^2\,(nb) = \frac{tg^2\,(ab)}{\cos^2 \frac{(pq)}{2}} + 2\, tg^2 \frac{(pq)}{2} = \frac{tg^2\,(ab) + 2 \sin^2 \frac{(pq)}{2}}{\cos^2 \frac{(pq)}{2}};$$

also durch Addition:

$$tg^2(mp) + tg^2(mq) + tg^2(na) + tg^2(nb) = 2\left[tg^2\frac{(ab)}{2} + tg^2\frac{(pq)}{2}\right] + \frac{tg^2(ab)}{cos^2\frac{(pq)}{2}} - \frac{tg^2(pq)}{cos^2\frac{(ab)}{2}}.$$

Man hat also wieder die Beziehungen unter denselben Elementen, aber nicht in gleicher algebraischer Form (vergl. Erkl. 81).

Aufgabe 75. Man stelle noch eine ähnliche Beziehung auf für die vier Teilstrecken in Figur 89.

Erkl. 280. Mit den in den Antworten und Aufgaben des vorliegenden Abschnitts enthaltenen metrischen Beziehungen zwischen den durch vier harmonische Elemente bestimmten Strecken- und Winkelgrössen sind selbstverständlich durchaus nicht alle möglichen Fälle erschöpft. Vielmehr bleibt der Thätigkeit des Studierenden überlassen, aus den vorhandenen wichtigsten Formeln weitere abzuleiten oder noch andere Beziehungen aufzustellen, welche durch verschiedene Gruppierung und Anwendung der vorhandenen Beweismethoden gefunden werden können.

---

3. Aufgaben über die Erzeugung von Kurven durch projektivisch verwandte Grundgebilde.

(Zu Abschnitt 3.)

Aufgabe 76. Man soll den Innenraum und Aussenraum einer Kurve unterscheiden.

Erkl. 281. Die Unterscheidung zwischen inneren und äusseren Punkten einer Kurve findet man in Erkl. 92. Innere und äussere Geraden kann man nicht ebenso unterscheiden. Denn es gibt zwar Gerade, die ganz ausserhalb der Kurve liegen, aber keine, die ganz innerhalb der Kurve liegen, auch nicht bei solchen Kurven, welche sich selbst ins Unendliche erstrecken, oder deren Innenraum selbst einen Teil der unendlich fernen Geraden in sich schliesst. Man braucht bloss einen beliebigen Punkt ausserhalb (oder auf) der Kurve zu Hilfe zu nehmen: von ihm aus gehen zwei (oder eine) Tangente; sie treffen jede andere Gerade der Ebene in zwei Punkten, die nicht innerhalb der Kurve liegen können, also muss auch jede Gerade solche Punkte besitzen, von denen aus Tangenten an die Kurve gehen, d. h. äussere Punkte.

Auflösung. Die Gesamtheit aller innerhalb bezw. ausserhalb der Kurve liegenden Punkte erfüllt einen bestimmten Flächenteil der Ebene, und diesen nennt man Innenraum bezw. Aussenraum der Kurve. Beide Räume sind vollständig getrennt durch die Kurve selbst, und diese teilt demnach die ganze Ebene in zwei getrennte Felder und bildet selbst die Grenze zwischen dem Innenraum und Aussenraum, so dass man nicht von einem inneren zu einem äusseren Punkte gelangen kann, ohne die Kurve zu überschreiten.

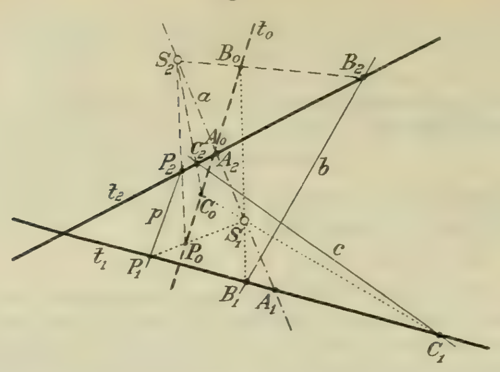
Durch einen Punkt des Innenraums gibt es nur schneidende Geraden (Sehnen) und keine Tangenten, durch einen Punkt des Aussenraums gibt es sowohl beliebig viele schneidende Geraden, als auch beliebig viele ganz ausserhalb liegende und zwei berührende Geraden.

Aufgabe 77. Man unterscheide den Berührungspunkt einer Tangente von ihren andern Punkten und die Tangente durch einen Kurvenpunkt von den andern Strahlen des Punktes.

Aufgabe 78. Die Konstruktion der Antwort auf Frage 28 für die allgemeine Lage der Scheitel $S_1 S_2$ auszuführen.

Auflösung. Seien $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ die drei projektivisch zugeordneten Punkte

Figur 91.



Erkl. 282. Ein Blick auf die Figuren 91 und 27 zeigt sofort, wieviel einfacher die Konstruktion nach Fig. 27 ist gegenüber jener nach Fig. 91. Auch in Fig. 27 kann zwar S_1 oder S_2 oder beide ausserhalb der Strecke $A_1 A_2$ fallen, wie dies der Fall ist in Fig. 91 mit S_2; aber das Zusammenfallen der Punkte $B_0 C_0$ in Fig. 27 mit den Punkten B_1 bezw. C_2 auf den Trägern bringt in Fig. 27 die grosse Uebersichtlichkeit zustande, welche später auch im Satze von Brianchon zum Ausdruck kommt.

Erkl. 283. In den Fig. 27 und 91 ist der zweifache besondere Umstand angenommen, dass erstens sowohl die Punkte $A_1 B_1 C_1$ als auch $A_2 B_2 C_2$ auf gleicher Seite vom Schnittpunkte der Träger aus liegen, und zweitens dass von den Durchlaufungsrichtungen $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ auf den diese Punkte enthaltenden Trägerstrecken die eine zum Scheitel hin, die andere vom Scheitel weg gerichtet ist. Beide Annahmen dienen im vorliegenden Falle nur dazu, die Elemente der Figur in engem Raume beisammen zu erhalten, sind aber keineswegs wesentliche Bedingungen. Vielmehr kann dem Studierenden nicht genug empfohlen werden, gerade diese Figuren in möglichst vielerlei verschiedenen Lagebeziehungen zu wiederholen: mit verschiedener Lage der Trägerschnittpunkte zwischen den gegebenen Punkten, mit verschiedener Durchlaufungsrichtung der Punktreihen u. s. w.

der Träger t_1 und t_2. Man wähle zwei ganz beliebige Punkte auf $A_1 A_2$ als Scheitel $S_1 S_2$ für die Büschel $S_1 A_1$, $S_1 B_1$, $S_1 C_1$ und $S_2 A_2$, $S_2 B_2$, $S_2 C_2$. Da $S_1 A_1$ und $S_2 A_2$ zusammenfallen, so ist $S_1 \overline{\wedge} S_2$, also t_0 die Verbindungsgerade der Schnittpunkte von $S_1 B_1$, $S_2 B_2$ und $S_1 C_1$, $S_2 C_2$. Zu beliebigem Punkte P_1 erhält man P_2 vermittels der Reihe von Elementen: P_1, $P_1 S_1$, P_0, $S_2 P_0$, P_2.

Die Hauptfrage ist nun aber die, ob der so entstehende Punkt P_2 derselbe ist, der durch Vermittelung anderer Zwischengebilde entsteht, oder ein verschiedener. Die Antwort liefert wieder die harmonische Beziehung: Ist nämlich P_1 etwa der vierte harmonische Punkt zu $A_1 B_1 C_1$, so ist auch $S_1 P_1$ vierter harmonischer Strahl zu $S_1 A_1$, $S_1 B_1$, $S_1 C_1$, ebenso auch P_0 vierter harmonischer Punkt zu $A_0 B_0 C_0$, $S_2 P_0$ vierter harmonischer Strahl zu $S_2 A_2$, $S_2 B_2$, $S_2 C_2$, also auch P_2 vierter harmonischer Punkt zu $A_2 B_2 C_2$. Wird aber P_1 aus der Punktgruppe $A_1 B_1 C_1$ durch irgendwelche Reihenfolge harmonischer Zuordnungen erhalten, so muss auch P_2 aus der Punktgruppe $A_2 B_2 C_2$ durch die entsprechend zugeordnete Reihenfolge harmonischer Zuordnungen entstehen. Und da die harmonische Zuordnung eindeutig ist, so ist's auch die projektivische Zuordnung von P_2 zu P_1.

Aufgabe 79. Man konstruiere beliebig viele Kurventangenten, wenn der Trägerschnittpunkt auf dem einen Träger zwischen A und BC, auf dem andern zwischen AB und C liegt.

Andeutung. Man verfahre wie in Antwort auf Frage 28, 5.

Aufgabe 80. Man konstruiere in Figur 27 die zu den Trägern t_1 und t_2 parallelen Kurventangenten.

Auflösung. An Stelle von P_1 bezw. P_2 tritt F_1, der unendlich ferne Punkt auf t_1,

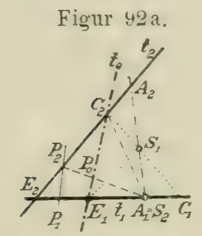
Erkl. 284. Die Lage der mit den Trägern parallelen Tangenten $F_1 F_2$ und $G_1 G_2$ gibt Aufschluss über die Lage der Kurve zu den Trägern, beziehungsweise darüber, in welchem Winkel oder Scheitelwinkel der Träger die Kurve gelegen ist (vergl. Aufgabe 148).

bezw. G_2, der unendlich ferne Punkt von t_2. Zu diesem unendlich fernen Punkt sucht man den entsprechenden F_2 bezw. G_1, dann sind $F_1 F_2 \parallel t_1$ und $G_1 G_2 \parallel t_2$ die gesuchten parallelen Tangenten.

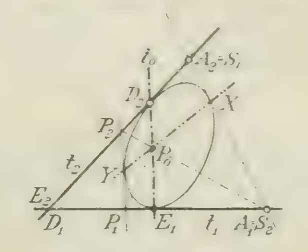
Aufgabe 81. Man konstruiere die Berührungspunkte auf den Trägern.

Andeutung. Man benütze Figur 63a.

Figur 92a.



Figur 92b.



Aufgabe 82. Von einer Kurve seien gegeben die Träger nebst dem Berührungspunkte auf einem derselben, und zwei Punktepaare $A_1 A_2$ und $C_1 C_2$. Man konstruiere weitere Tangenten sowie den Berührungspunkt auf Träger t_2.

Erkl. 285. Um die Vereinfachungen nach der Figur 27 in Anwendung bringen zu können, muss man als Scheitelpunkte $S_1 S_2$ nur Schnittpunkte der Tangenten $A_1 A_2$, $C_1 C_2$, $E_1 E_2$ wählen. Die auf t_1 selbst liegenden Punkte A_1 und C_1 können als S_1 nicht in Betracht kommen, da man die Punkte einer Geraden nur projizieren kann aus einem Scheitelpunkt ausserhalb dieser Geraden. Daher bleibt unter obiger Beschränkung für S_1 nur der Schnittpunkt von $A_1 A_2$ und $C_1 C_2$, für S_2 aber entweder A_1 oder C_1.

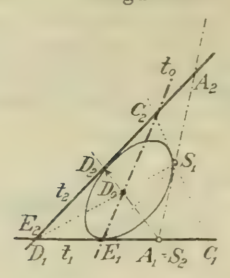
Erkl. 286. Lässt man die Beschränkung der Figur 27 fallen, so kann man jedes beliebige Punktepaar auf $A_1 A_2$ oder auf $C_1 C_2$ als S_1 und S_2 wählen, wobei $S_1 E_1$ nach dem Berührungspunkt, $S_2 E_2$ nach dem Trägerschnittpunkt gezogen werden muss.

Auflösung. Der Berührungspunkt auf t_1 ist der entsprechende Punkt E_1 zum Trägerschnittpunkt, indem dieser betrachtet wird als Punkt E_2 des zweiten Trägers. Demnach kennt man wieder drei Paare entsprechender Punkte $A_1 C_1 E_1$ und $A_2 C_2 E_2$. Für S_2 ist Auswahl unter A_1 und C_1, als S_1 ist nur zu nehmen der Schnittpunkt von $A_1 A_2$ und $C_1 C_2$. Wählt man $A_1 = S_2$ (s. Figur 92), so ist Büschel $S_1 A_1$, $S_1 C_1$, $S_1 E_1$ projektivisch Büschel $S_2 A_2$, $S_2 C_2$, $S_2 E_2$ und zwar wegen des Zusammenfallens von $S_1 A_1$ und $S_2 A_2$ in perspektivischer Lage. Träger t_0 geht durch den Schnittpunkt von $S_1 C_1$ und $S_2 C_2$, nämlich C_2, und durch den Schnittpunkt von $S_1 E_1$ und $S_2 E_2$, nämlich E_1: also $t_0 = C_2 E_1$. Dann findet man (Figur 92a) zu P_1 den Punkt P_2 bezw. die Tangente $P_1 P_2$ durch P_1, S_1, P_0, S_2, P_2; und ebenso den Berührungspunkt auf Träger t_2 als entsprechenden Punkt D_2 zum Trägerschnittpunkt D_1 (Figur 92b) durch D_1, S_1, D_0, S_2, D_2.

Aufgabe 83. Dieselbe Konstruktion mit verschiedenen Lagen der Punkte auf den Trägern und der Scheitel $S_1 S_2$ zu wiederholen.

Aufgabe 84. Man konstruiere wieder die parallelen Tangenten zu den Trägern.

Figur 93.



Aufgabe 85. Von einer Kurve seien gegeben die Träger nebst ihren beiden Berührungspunkten und ein Punktepaar $A_1 A_2$. Man konstruiere weitere Tangenten.

Erkl. 287. Auch diese Aufgabe kann dadurch gelöst werden, dass man nicht die Punkte A_1 und A_2 selbst, sondern zwei beliebige andere Punkte auf $A_1 A_2$ als Scheitel wählt. Immerhin ist die Willkür für die Scheitel bei jeder Wahl viel enger beschränkt, als im vorigen Falle der Aufgabe 82 und im allgemeinen Falle der Antwort auf Frage 28. Denn in diesen drei Fällen hat man der Reihe nach Auswahl für den Scheitel:

bei der engeren Konstruktionsweise unter drei Paar, zwei Paar, einem Paar Punkte, nämlich den Schnittpunkten von *a, b, c* doppelt, von act_1 einfach, von at_1t_2 einfach,

bei der allgemeinen Konstruktionsweise unter den sämtlichen Punkten dreier, zweier, einer Geraden.

Auflösung. Der Berührungspunkt auf t_1 ist der entsprechende Punkt E_1 zum Trägerschnittpunkt, wenn dieser betrachtet wird als Punkt E_2 des zweiten Trägers; der Berührungspunkt auf t_2 ist der entsprechende Punkt D_2 zum Trägerschnittpunkt, wenn dieser betrachtet wird als Punkt D_1 des ersten Trägers. Demnach kennt man wieder drei Paare entsprechender Punkte $A_1 D_1 E_1$ und $A_2 D_2 E_2$. Für S_2 ist zu nehmen A_1 und für S_1 nur A_2 (Figur 93), also Büschel $S_1 A_1$, $S_1 D_1$, $S_1 E_1$ projektivisch $S_2 A_2$, $S_2 D_2$, $S_2 E_2$, und zwar wegen des Zusammenfallens von $S_1 A_2$ und $S_2 A_2$ in perspektivischer Lage. Träger t_0 geht durch den Schnittpunkt von $S_1 D_1$ mit $S_2 D_2$, nämlich D_2, und durch den Schnittpunkt von $S_1 E_1$ und $S_2 E_2$, nämlich E_1; also $t_0 = D_2 E_1$. Dann findet man (Fig. 93) zu Punkt P_1 den Punkt P_2 bezw. die Tangente $P_1 P_2$ durch P_1, S_1, P_0, S_2, P_2.

Aufgabe 86. 87. Man wiederhole für den Fall der Aufgabe 85 und Figur 93 die Aufgaben 83 und 84.

Aufgabe 88 bis 115. Man konstruiere weitere Tangenten, bezw. die Berührungspunkte der Träger, bezw. parallele Tangenten zu den Trägern, wenn eine Kurve zweiter Klasse bestimmt ist durch die zwei Träger und die folgenden zugeordneten Punktgruppen:

1. $A_1 A_2 \parallel B_1 B_2$, C_1 und C_2 . . **88.**
2. $A_1 A_2 \parallel B_1 B_2$, D_1 und D_2 oder $A_1 A_2 \parallel B_1 B_2$, E_1 und E_2 . . **89** *α, β*.
3. A_1, D_1, E_1 und A_2, D_2, E_2 . **90.**
4. A_1, B_1, $F_1 \infty$ und A_2, B_2, F_2 od. A_1, B_1. G_1 u. A_2, B_2, $G_2 \infty$ **91** *α, β*.
5. $A_1 A_2 \parallel B_1 B_2$, $F_1 \infty$ und F_2 od. $A_1 A_2 \parallel B_1 B_2$, G_1 und $G_2 \infty$. **92** *α, β*.
6. A_1, $F_1 \infty$, G_1 und A_2, F_2, $G_2 \infty$ **93.**
7. A_1, D_1, $F_1 \infty$ und A_2, D_2, F_2 od. A_1, E_1. G_1 und A_2. E_2. $G_2 \infty$ **94** *α, β*.

Auflösungen. Die Lösungen der drei ersten Aufgaben **88, 89 und 90** sind fast ganz identisch mit den in Antwort auf Frage 28, 5 bezw. in Aufgabe 82 und 85 gegebenen Konstruktionen. Sie sind der Uebersicht wegen mit kleiner Abänderung hier nochmals mit den übrigen zusammen aufgezählt. Bei allen diesen Aufgaben hat man verschiedene Lage der Kurve zu den Trägern, je nachdem von den drei Schnittpunkten der Tangenten *abc* drei bezw. keiner oder zwei bezw. einer im Winkel bezw. Nebenwinkel der Träger liegen.

Bei den Aufgaben **91 bis 97** hat man jeweils wegen des gegebenen unendlich fernen Punktes F ein bezw. zwei Paar paralleler Tangenten. Dabei ist wieder zu unterscheiden, ob die Schnittpunkte der Träger

8. A_1, D_1, G_1 und $A_2, D_2, G_2 \infty$ od. $A_1, E_1, F_1 \infty$ und A_2, E_2, F_2 . **95 α.β.**

9. $D_1, E_1, F_1 \infty$ u. D_2, E_2, F_2 od. D_1, E_1, G_1 und $D_2, E_2, G_2 \infty$ **96 α,β.**

10. $D_1, F_1 \infty, G_1$ und $D_2, F_2, G_2 \infty$ od. $E_1, F_1 \infty, G_1$ u. $E_2, F_2, G_2 \infty$ **97 α.β.**

11. $A_1, B_1, F_1 \infty = G_1$ und $A_2, B_2, F_2 = G_2 \infty$ . . . . **98.**

12. $A_1, D_1, F_1 \infty = G_1$ u. $A_2, D_2, F_2 = G_2 \infty$ od. $A_1, E_1, F_1 \infty = G_1$ und $A_2, E_2, F_2 = G_2 \infty$ . . . **99 α,β.**

13. $D_1, E_1, F_1 \infty = G_1$ u. $D_2, E_2, F_2 = G_2 \infty$ . . . . **100.**

14. $A_1, B_1, E_1 = F_1 \infty$ u. $A_2, B_2, E_2 = F_2$ oder $A_1, B_1, D_1 = G_1$ und $A_2, B_2, D_2 = G_2 \infty$ . . . **101 α,β.**

15. $A_1 A_2 \parallel B_1 B_2, E_1 = F_1 \infty$ und $E_2 = F_2$ oder $A_1 A_2 \parallel B_1 B_2, D_1 = G_1$ und $D_2 = G_2 \infty$ . . . **102 α.β.**

16. $A_1, D_1, E_1 = F_1 \infty$ u. $A_2, D_2, E_2 = F_2$ oder $A_1, E_1, D_1 = G_1$ und $A_2, E_2, D_2 = G_2 \infty$ . . . **103 α,β.**

17. $A_1, G_1, E_1 = F_1 \infty$ u. $A_2, G_2 \infty, E_2 = F_2$ oder $A_1, F_1 \infty, D_1 = G_1$ und $A_2, F_2, D_2 = G_2 \infty$ . . . **104 α,β.**

18. $D_1, G_1, E_1 = F_1 \infty$ u. $D_2, G_2 \infty, E_2 = F_2$ oder $E_1, F_1 \infty, D_1 = G_1$ und $E_2, F_2, D_2 = G_2 \infty$ . . . **105 α,β.**

19. $A_1, D_1 = G_1, E_1 = F_1 \infty$ und $A_2, D_2 = G_2 \infty, E_2 = F_2$ . . **106.**

20. $t_1 \parallel t_2, A_1, B_1, C_1$ u. A_2, B_2, C_2 **107.**

21. $t_1 \parallel t_2, A_1 A_2 \parallel B_1 B_2, C_1$ und C_2 **108.**

22. $t_1 \parallel t_2, A_1, B_1, D_1 = F_1 \infty$ und $A_2, B_2, D_2 = F_2$ oder
$t_1 \parallel t_2$,
$A_1, B_1, E_1 = G_1$ u. $A_2, B_2, E_2 = G_2 \infty$ . . . . **109 α,β.**

*23. $t_1 \parallel t_2, A_1 A_2 \parallel B_1 B_2, D_1 = F_1 \infty$ und $D_2 = F_2 \infty$, oder
$t_1 \parallel t_2$,
$A_1 A_2 \parallel B_1 B_2, E_1 = G_1$ und $E_2 = G_2 \infty$ . . . . **110 α,β.***

24. $t_1 \parallel t_2, A_1, D_1, E_1$ u. A_2, D_2, E_2 **111.**

25. $t_2 \infty$; A_1, B_1, C_1 u. $A_2 \infty, B_2 \infty, C_2 \infty$ od. $t_1 \infty$; $A_1 \infty, B_1 \infty, C_1 \infty$ und A_2, B_2, C_2 . . . . **112 α,β.**

26. $t_2 \infty$; $A_1, B_1, D_1 = F_1 \infty$ und $A_2 \infty, B_2 \infty, D_2 \infty = F_2 \infty$ oder $t_1 \infty$; $A_1 \infty, B_1 \infty, E_1 \infty = G_1 \infty$ und $A_2, B_2, E_2 = G_2 \infty$ . . . **113 α,β.**

und der übrigen Tangenten bezw. ob die gegebenen Berührungspunkte innerhalb oder ausserhalb der Parallelstreifen liegen. Für die Scheitel $S_1 S_2$ ist dabei für Aufgabe 91 bis 93 sechsfache Auswahl, wie in Antwort auf Frage 28: bei Aufgabe 94. 95, 97 zweifache, wie in Aufgabe 82. wobei einer der Scheitel in einem endlich oder unendlich fernen Punkte auf einem Träger liegen muss: bei Aufgabe 96 einfache, wie in Aufgabe 85. indem der eine Scheitel auf dem einen. der andere auf dem andern Träger (und zwar unendlich fern) liegen muss.

Bei den Aufgaben **98 bis 100** ist wegen $F = G$ die unendlich ferne Gerade eine Verbindungsgerade zweier entsprechenden Punkte der Träger, also eine der fünf Tangenten. Wegen Lage der Kurve und Auswahl der Scheitel gilt dasselbe wie oben.

Bei den Aufgaben **101 bis 106** wiederholen sich diejenigen der bisherigen Aufgaben, bei denen ein oder zwei Berührungspunkte gegeben waren, in der Weise, dass dieser Berührungspunkt zum unendlich fernen Punkte des Trägers wird.

Die Aufgaben **107 bis 111** unterscheiden sich von den bisherigen dadurch, dass sie mit parallel liegenden Trägern zu konstruieren sind. Dabei ist Punkt $D_1 E_2$ ins Unendliche gerückt; sonst aber sind die Aufgaben wie die früheren zu behandeln.

Endlich die Aufgaben **112 bis 115** haben als einen der Träger die unendlich ferne Gerade selber. Man hat also Konstruktionen, wie sie bereits vorbereitet wurden bei den grundlegenden Erörterungen des I. Teils. Jeder der unendlich fernen Punkte wird an-

27. $t_2 \infty$; A, B_1, E_1 u. $A_2 \infty$, $B_2 \infty$, $E_2 \infty$ od. $t_1 \infty$; $A_1 \infty$, $B_1 \infty$, $D_1 \infty$ und A_2, B_2, D_2 . . . . . . **114 α, β.**

28. $t_2 \infty$; A_1, $D_1 = F_1 \infty$, E_1 und $A_2 \infty$, $D_2 \infty = F_2$, E_2; oder $t_1 \infty$, $A_1 \infty$, $D_1 \infty$, $E_1 \infty = G_1$ und A_2, D_2, $E_2 = G_2 \infty$ . . . . **115 α, β.**

Erkl. 288. Die Bedeutung der Buchstaben ist hier wie immer dieselbe, wie schon im I. Teil dieses Buches: A, B, C bedeuten beliebig im Endlichen liegende Punkte; $D_1 E_2$ sind die Bezeichnungen des Schnittpunktes der Träger, je nachdem dieser als Punkt der Reihe t_1 oder t_2 angesehen wird, folglich $D_2 E_1$ die Berührungspunkte auf t_2 bezw. t_1; ferner $F_1 G_2$ die unendlich fernen Punkte auf t_1 und t_2, also F_2 und G_1 die Fluchtpunkte auf t_2 und t_1. Die Lage unendlich ferner Punkte ist aber ausserdem durch das beigesetzte Zeichen ∞ kennbar gemacht, und das Zusammenfallen eines dieser Punkte mit einem andern einfach durch ein Gleichheitszeichen angedeutet. So bedeutet z. B. $E_1 = F_1 \infty$, dass der Berührungspunkt E_1 auf t_1 zusammenfällt mit dem unendlichen Punkte F_1 auf t_1. — Zweierlei Aufgaben, die sich jedoch nur unterscheiden durch Vertauschung der Elemente des einen und andern Trägers, sind unter gleicher Ziffer nebeneinander gesetzt und nur durch α und β unterschieden. Die mit Stern bezeichnete Aufgabe 110 β* ist unten vollständig gelöst.

gegeben durch seine Richtung, d. h. durch eine Gerade aus dem Parallelstrahlenbüschel, dessen Scheitel jener Punkt ist. Die Verbindungsgerade eines im Endlichen liegenden Punktes mit jenem unendlich fernen ist dann jeweils die Parallele durch diesen Punkt zur Richtung nach jenem unendlich fernen.

Erkl. 289. Ueber die Lage der Kurve zu den Trägern vergleiche man Aufgabe 148, S. 146; über die Art der Kurve (ob Ellipse, Parabel oder Hyperbel) vergleiche Abschnitt 4 dieses Lehrbuchs. Für einzelne Beispiele aus vorigen Aufgaben lassen sich Figuren verwenden, die im vorigen I. und im gegenwärtigen II. Teile dieses Buches gezeichnet vorliegen, so für Aufgabe 96 und 97 die Figur 39, bezw. 41a, auch 51, zu Aufgabe 100 die Figur 40a, zu Aufgabe 115 α die Figur 40b, zu Aufgabe 106 die Figur 41b, zu Aufgabe 98 bis 100 die Figuren 45 und 46.

Erkl. 290. Man versäume nicht, für die vorstehenden Aufgaben, welche hier der Uebersicht wegen gewissermassen nur durch Zeichensprache angegeben sind, auch den Ausdruck in Worten herzustellen, z. B. für Aufgabe 103: Die projektivische Verwandtschaft zweier Punktreihen sei festgelegt durch Zuordnung eines beliebigen Punktepaares, sowie der beiden dem Schnittpunkt der Träger entsprechenden Punkte, wovon der eine mit dem unendlich fernen Punkt eines Trägers zusammenfällt. Man konstruiere zahlreiche Tangenten der erzeugten Kurve. Ebenso ist die hier folgende Aufgabe eine Wiederholung in Worten der Aufgabe 110.

---

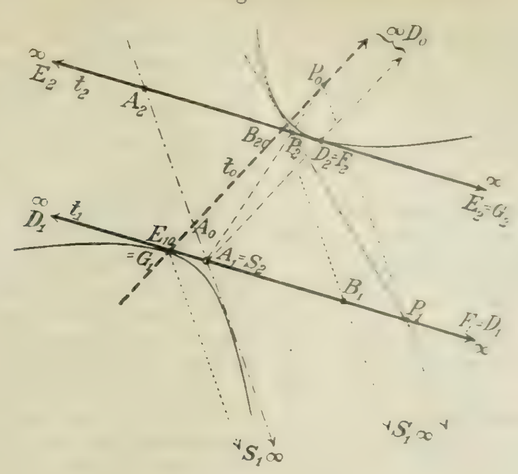
*(**Aufgabe 110 β**, siehe Seite 141.) Von zwei parallelen projektivischen Punktreihen seien gegeben zwei zugeordnete Punktepaare mit parallelen Verbindungsgeraden sowie der Fluchtpunkt der einen (ausserhalb des Parallelogramms). Man konstruiere weitere Elemente der dadurch erzeugten Kurve.

Erkl. 291. Wenn es in nebenstehender Auflösung — wie zugleich an zahlreichen andern Stellen dieses Lehrbuches — heisst: „Es folgen einander die Elemente $S_1 P_1$, P_0, $S_2 P_0$, P_2, $P_1 P_2$“, so hat das jedesmal die leicht erkennbare Bedeutung, dass 1. Scheitel S_1 verbunden wird mit Punkt P_1, 2. die Verbindungsgerade $S_1 P_1$ zum Schnitt gebracht wird mit Träger t_0 im Punkt P_0, 3. dieser Punkt P_0 zur Verbindung gebracht mit S_2, 4. die Verbindungsgerade $S_2 P_0$ zum Schnitt mit t_2 im Punkt P_2; 5. die Verbindungsgerade $P_1 P_2$ entsteht als gesuchte Tangente an die Kurve.

Erkl. 292. In Erkl. 107 bezw. 281 u. 282 des I. Teils werden bestimmte Strecken der ersten und zweiten Punktreihe einander zugeordnet, z. B.

Auflösung. 1. In Figur 94 seien $t_1 \parallel t_2$ die Träger, $A_1 A_2 \parallel B_1 B_2$ die parallelen Verbindungsgeraden der gegebenen Punktepaare, dann ist der gegebene Fluchtpunkt $E_1 = G_1$ zugleich der Berührungspunkt der Tangente t_1, denn er ist der entsprechende Punkt zum (unendlich fern liegenden) Schnittpunkte $D_1 = E_2 = F_1 = G_2$ der beiden Träger. Als Büschelscheitel $S_1 S_2$ sind also zu wählen die Schnittpunkte von $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ mit einander und mit demjenigen Träger t_1, auf welchem der Berührungspunkt gegeben ist. Ersterer Punkt, der unendlich ferne Schnittpunkt von $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$, wird S_1, einer der letzteren, z. B. A_1 werde S_2. Dann sind die entsprechenden Strahlen beider Büschel

Figur 94.



die Strecken $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, $B_1 D_1$ und $B_2 D_2$, $D_1 E_1$ und $D_2 E_2$, $E_1 A_1$ und $E_2 A_2$. Die Wichtigkeit jener Zuordnung zeigt sich deutlich bei Aufgaben der vorliegenden Art: Soll eine Tangente ausgehen von einem Punkte der Strecke $A_1 B_1$, so muss sie auf t_2 durch einen Punkt gehen zwischen A_2 und B_2; der Punkt P_1 liegt auf der Strecke $B_1 D_1$, folglich muss die Tangente von P_1 ebenso wie die Tangenten von sämtlichen Punkten zwischen B_1 und D_1 durch Punkte auf t_2 hindurchgehen, die auf der kurzen Strecke zwischen B_2 und D_2 liegen. Ebenso wird umgekehrt jede Tangente von einem Punkte zwischen A_2 und ∞E_2 den Träger t_1 treffen müssen in einem Punkte auf der kurzen Strecke zwischen A_1 und E_1. — Nebenbei mag schon hier darauf aufmerksam gemacht sein, dass die Berührungspunkte $E_1 D_2$ mit den Parallelogrammecken A_1 und B_2 des Parallelogramms $A_1 B_1 A_2 B_2$ gleiche Strecken abschneiden: $A_1 E_1 = B_2 D_2$ wegen des neuentstehenden Parallelogramms $A_1 E_1 B_2 D_2$. Vergl. Erkl. 339 und Figur 103b.

$S_1 A_1$ und $S_2 A_2$: Schnittpunkt unbestimmt auf $A_1 A_2$; folglich $S_1 \overline{\wedge} S_2$,

$S_1 B_1$ und $S_2 B_2$: Schnittpunkt B_2,

$S_1 E_1$ und $S_2 E_2$: Schnittpunkt E_1: t_0 ist also die Verbindungsgerade $B_2 E_1$.

2. Sucht man nunmehr die von beliebigem Punkt P_1 auf t_1 ausgehende Tangente, so folgen einander die Elemente $S_1 P_1$, P_0, $S_2 P_0$, P_2, $P_1 P_2$ nach der Zeichenvorschrift

$$t_1 \overline{\wedge} S_1 \overline{\wedge} t_0 \overline{\wedge} S_2 \overline{\wedge} t_2.$$

3. Sucht man den Berührungspunkt auf t_2, so ist er der entsprechende zum unendlich fernen Punkt $D_1 = F_1$ des Trägers t_1. Man schneidet t_0 mit der Geraden $S_1 D_1$, d. h. mit der unendlich fernen in D_0, zieht $S_2 D_0 \parallel t_0$, und erhält als Schnittpunkt auf t_2 den Berührungspunkt $D_2 = F_2$.

Erkl. 293. Die vorliegende Auflösung der Aufgabe 110β mag ein Musterbeispiel liefern für die Behandlung der übrigen Aufgaben der vorigen Aufzählung. Bei jeder ist die Grundlage gegeben, wenn die Elemente S_1, S_2, t_0 richtig ausgewählt sind. Fast bei jeder wird man auch noch Gelegenheit zu besonderen Aufstellungen finden, wie solche in Erkl. 292 zur Figur 94 angedeutet wurden.

Aufgabe 116 bis 137. Man soll von einer Kurve zweiter Klasse beliebig viele weiteren Elemente (Tangenten und deren Berührungspunkte) konstruieren, wenn zu ihrer Bestimmung folgende Stücke gegeben sind:

Auflösungen. Zur Konstruktion der nebenstehenden Aufgaben wählt man zwei

1. Fünf beliebige Tangenten in allgemeiner Lage . . . . 116.
2. Zwei parallele und drei beliebige Tangenten . . . . 117.
3. Zweimal zwei parallele und eine beliebige Tangente . . . . . 118.
4. Vier beliebige und eine unendlich ferne Tangente . . . . 119.
5. Zwei parallele, zwei beliebige, und eine unendlich ferne Tangente . 120.
6. Zweimal zwei parallele und eine unendlich ferne Tangente . . . 121.
7. Vier beliebige Tangenten nebst beliebigem Berührungspunkt auf einer derselben . . . . 122.
8. Vier beliebige Tangenten nebst unendlich fernem Berührungspunkt auf einer derselben . . . . . 123.
9. 10. Zwei parallele und zwei nicht parallele Tangenten nebst beliebigem Berührungspunkt:
   9. auf einer der parallelen . . 124,
   10. auf einer der nicht parallelen Tangenten . . . . . . 125.
11. Zwei parallele und zwei nicht parallele Tangenten nebst unendlich fernem Berührungspunkt auf einer der nicht parallelen Tangenten . 126.
12. Zweimal zwei parallele Tangenten nebst Berührungspunkt auf einer derselben . . . . 127.
13. 14. Drei beliebige und eine unendlich ferne Tangente nebst Berührungspunkt:
   13. auf einer der beliebigen . 128,
   14. auf der unendlich fernen Tangente . . . . . . 129.
15. Drei beliebige Tangenten nebst beliebigen Berührungspunkten auf zweien derselben . . . . . . 130.
16. Drei beliebige Tangenten nebst beliebigem Berührungspunkt auf einer, und unendlich fernem Berührungspunkt auf einer andern . 131.
17. Drei beliebige Tangenten nebst unendlich fernen Berührungspunkten auf zweien derselben . . . 132.
18. 19. Zwei parallele und eine beliebige Tangente nebst beliebigen Berührungspunkten:
   18. auf einer der parallelen und auf der beliebigen . . . 133,
   19. auf den beiden parallelen . 134.

von den gegebenen Tangenten als Träger. Die Auswahl derselben ist beliebig bei den ersten sechs Fällen, wo keine Berührungspunkte gegeben sind; wenn sich aber ein oder zwei Berührungspunkte unter den gegebenen Stücken befinden, so muss man die eine Tangente, bezw. die zwei Tangenten, auf welchen die Berührungspunkte gegeben sind, zu Trägern wählen. — Die Schnittpunkte der übrigen gegebenen Tangenten mit den Trägern liefern die zugeordneten Punktepaare, ein Berührungspunkt bildet jeweils den auf seinem Träger liegenden zugeordneten Punkt zum Schnittpunkt der beiden Träger, wenn dieser als Punkt des andern Trägers betrachtet wird.

Dadurch werden die nebenstehenden Aufgaben sämtlich zurückgeführt auf die vorigen Aufgaben 88 bis 115. Insbesondere wird die mit * bezeichnete Aufgabe 127 auf genau dieselbe Weise konstruiert, wie die oben vollständig gelöste Aufgabe 110 β, wenn man nämlich zu der samt Berührungspunkt gegebenen Tangente als zweiten Träger die zu ihr parallele Tangente wählt, und nicht eine der beiden andern.

Erkl. 294. Man kann nicht sagen, dass jede der Aufgaben 116 bis 137 einer bestimmten der Aufgaben 88 bis 115 entspricht, und ebensowenig jede der Aufgaben 88 bis 115 einer bestimmten der Aufgaben 116 bis 137, wenn das freilich auch in mannigfachen Fällen zutrifft, z. B. zwischen 131 und 103. Vielmehr kann eine Aufgabe der Gruppe 116 bis 137 in mehrfachen Gestalten der Gruppe 88 bis 115 wiedererscheinen, je nach verschiedener Auswahl der Träger. Und von den Aufgaben 88 bis 115 fallen jedenfalls zwei solche, die nur durch α und β sich unterscheiden, immer mit derselben Aufgabe der nebenstehenden Gruppe zusammen.

Erkl. 295. Ebenso wie bei der Aufgabengruppe 88 bis 115, hat man auch bei der nebenstehenden Aufgabengruppe 116 bis 137 jeweils einzelne Hauptabteilungen zu unterscheiden: Während diese aber in der Gruppe 88 ff. sich unterscheiden durch das Vorkommen verschiedener besonderen Punkte in den gegebenen Punktepaaren, so hat man bei der Gruppe 116 ff. zu unterscheiden nach der Zugehörigkeit zu den drei Hauptbestimmungsweisen der Kurve zweiter Klasse, nämlich:

116 bis 121: $TTTTT$
122 bis 129: $TTT(TP)$
130 bis 137: $T(TP)(TP)$,

d. h. erst fünf Tangenten, dann vier, dann drei nebst Berührungspunkten auf keiner, einer, zweien derselben.

20. Zwei parallele und eine beliebige Tangente nebst beliebigem Berührungspunkt auf einer der parallelen und unendlich fernem Berührungspunkt auf der schneidenden . . 135.
21. 22. Zwei beliebige und eine unendlich ferne Tangente nebst Berührungspunkten:
    21. auf den beiden beliebigen . 136,
    22. auf einer der beliebigen Tangenten und auf der unendlich fernen . . . . . 137.

Erkl. 295 a. Bei jeder Aufgabe der Gruppen 88 bis 115 oder 116—177 kann es vorkommen, dass auch ein Berührungspunkt verlangt wird auf einer der neu konstruierten Tangenten. Zu dem Zwecke hätte man nur die Bezeichnungsweise der vorhandenen Elemente in der Art abzuändern, dass man diese neu gefundene Tangente als einen der Träger auffasst, mit einem der vorigen Träger zusammenfasst und zum Schnittpunkt dieser beiden Träger den entsprechenden Punkt auf dem neuen Träger sucht. Dies ist der gesuchte Berührungspunkt. Ebenso könnte man gleichzeitig auf zwei neugefundenen Trägern die Berührungspunkte finden, indem man keine der früheren Träger als Träger beibehält, sondern die zwei neuen Tangenten zu Trägern macht. Die bisherigen Träger sind dann einfache Tangenten und liefern durch ihre Schnittpunkte mit den neuen Trägern wieder entsprechende Punkte der beiden nach Satz 16 auf diesen entstehenden projektivisch verwandten Punktreihen.

Erkl. 296. Aufgaben wie 120 und 121 könnten bei jeder Abteilung der nebenstehenden Aufgabengruppe beigefügt werden, nämlich unter Aufstellung von parallelen Tangenten als Bestimmungsstücken neben der unendlich fernen Tangente. Ausser dem ersten Paare 120 u. 121 sind aber solche Aufgaben nicht weiter aufgeführt, denn sie führen auf keine eigentlichen, sondern auf zerfallende Kurven nach Art der Antwort auf Frage 27, 3. Zwei parallele Tangenten gehen nämlich jeweils durch denselben Punkt der unendlich fernen Geraden. Gehen durch diesen Punkt diese zwei parallelen Tangenten und ausserdem die unendlich ferne Gerade selbst als Tangente, so hätte man eine Kurve mit drei Tangenten durch denselben unendlich fernen Punkt. Das kann aber nur bei einer zerfallenden Kurve zutreffen. Und zwar zerfällt die Kurve hier in das Punktepaar, welches gebildet wird aus eben jenem unendlich fernen Punkt und dem Schnittpunkt der beiden übrigen Tangenten. Dieser zweite Punkt ist bei Aufgabe 120 im Endlichen, bei Aufgabe 121 selbst auch noch unendlich fern gelegen. — Weitere „Tangenten" einer solchen Kurve liefert jede weitere Gerade durch einen dieser beiden Punkte, in welche die Kurve zerfällt, denn diese beiden Punkte werden „eingehüllt" von der Gesamtheit der Geraden der beiden Strahlenbüschel erster Klasse, welche die Punkte zu Scheiteln haben.

Erkl. 297. Wenn ein Berührungspunkt im Unendlichen gegeben ist, so wird entweder eine gegebene Gerade in ihrem unendlich fernen Punkt berührt, oder die unendlich ferne Gerade wird in einem gegebenen Punkt berührt. Im ersten Falle, wie im zweiten, wird der Berührungspunkt selber nur durch die Richtung einer Geraden, durch einen Pfeil angegeben. Die Tangente in diesem unendlich fernen Kurvenpunkte aber geht im ersten Falle durchs Endliche, im zweiten bleibt sie ganz im Unendlichen. Daher ist es auch im ersten Falle möglich, dass noch ein zweiter unendlich ferner Berührungspunkt auf einer andern durchs Endliche gehenden Tangente vorhanden ist; im zweiten Falle kann dies nicht eintreten, es sei denn bei einer zerfallenden Kurve nach Art der vorigen Erkl. 296.

Aufgabe 138 bis 147. Eine Kurve zweiter Klasse soll eingeschrieben bezw. angeschrieben werden:

1. einem beliebig gegebenen Fünfseit 138,
2. einem beliebig gegebenen allgemeinen Vierseit, Trapez oder Parallelogramm, wenn eine weitere Tangente gegeben ist 139,
3. einem beliebig gegebenen Dreiseit, wenn zwei weitere Tangenten gegeben sind 140,

Andeutung. Die nebenstehenden Aufgaben zeigen wieder eine andere Auffassung bezw. andere Formulierung derselben Aufgaben, welche schon in den Gruppen 88 ff. und 116 ff. aufgetreten sind. Man wählt zwei der als Tangenten gegebenen Geraden zu Trägern zweier Punktreihen, darunter jedenfalls solche Geraden, auf welchen ein Berührungspunkt gegeben ist. Die Schnittpunkte der übrigen Tangenten liefern ent-

4. einem beliebigen Vierseit mit gegebenem (endlich oder unendlich fernem) Berührungspunkt auf einer Seite **141**,
5. 6. einem beliebigen Trapez mit gegebenem Berührungspunkt auf einer Seite, und zwar:
   5. auf einer der Parallelseiten . **142**,
   6. (endlich oder unendlich fern) auf einer der nicht parallelen **143**,
7. einem beliebigen Parallelogramm mit gegebenem Berührungspunkt auf einer Seite **144**,
8. einem beliebigen Dreiseit mit gegebenen (endlich oder unendlich fernen) Berührungspunkten auf zwei Seiten **145**,
9. 10. einem beliebigen Parallelstreifen, wenn eine weitere Tangente gegeben ist, sowie die Berührungspunkte:
   9. auf beiden Parallelseiten . **146**,
   10. auf einer Parallelseite und (endlich oder unendlich fern) auf der weiteren Tangente . **147**.

sprechende Punktepaare, und durch Konstruktion weiterer zugeordneten Punktepaare erhält man neue Tangenten, parallele Tangenten, Berührungspunkte.

Erkl. 298. In vorstehender Aufgabengruppe sind nur solche Aufgaben aus den Gruppen 116 ff. in der neuen Ausdrucksweise wiedergegeben, für welche wirklich gangbare Bezeichnungen eingebürgert sind. Daher sind z. B. Fünfecke mit parallelen Seiten gar nicht genannt, weil solche keine besonderen Namen tragen. Ebenso sind Fünfecke, Vierecke und Dreiecke mit einer unendlich fernen Seite ganz weggelassen, weil auch solche nicht wohl anders als in der aufgelösten Bezeichnungsweise der Aufgabengruppe 116 ff. genannt zu werden pflegen. Es umfasst daher jede Aufgabe der vorstehenden Gruppe eine geringere oder grössere Anzahl von Aufgaben der beiden früheren Gruppen unter sich.

Erkl. 299. Die Anzahl der Aufgaben der nebenstehenden Gruppe liesse sich mehrfach erweitern, wenn man jeweils neue Aufgabestellung annehmen wollte, je nachdem einer der Berührungspunkte im Endlichen oder Unendlichen liegt. (Das Gleiche gilt bei etwaiger Hinzunahme der in Erkl. 298 genannten Elemente.) Dass bei parallelen Tangenten keine unendlich fernen Berührungspunkte auftreten dürfen, ist schon in Erkl. 297 erörtert. Für Lage und Art der Kurven entsteht ferner wesentliche Unterscheidung, ob ein gegebener Berührungspunkt innerhalb oder ausserhalb der Seitenstrecke eines Vielecks liegt. Zu beachten ist ferner, dass, während die Planimetrie einen wesentlichen Unterschied macht zwischen um- und angeschriebenen Vielecken, in der Geometrie der Lage die umgeschriebenen und angeschriebenen Vielecke völlig gleichwertig behandelt werden, indem eben jedes von beiden ein Tangentenvieleck darstellt mit beliebiger Lage zur Kurve. Denn wie Innenraum und Aussenraum einer Strecke gleichwertig sind, so muss es auch gleichwertig sein, ob der Berührungspunkt mit der Kurve im Innenraum oder Aussenraum der Strecke liegt.

Aufgabe 148. Man soll aus den ursprünglich gegebenen Bestimmungsstücken der Klassenkurve beurteilen, in welchem Winkelraume der Träger die Kurve selbst liegen muss.

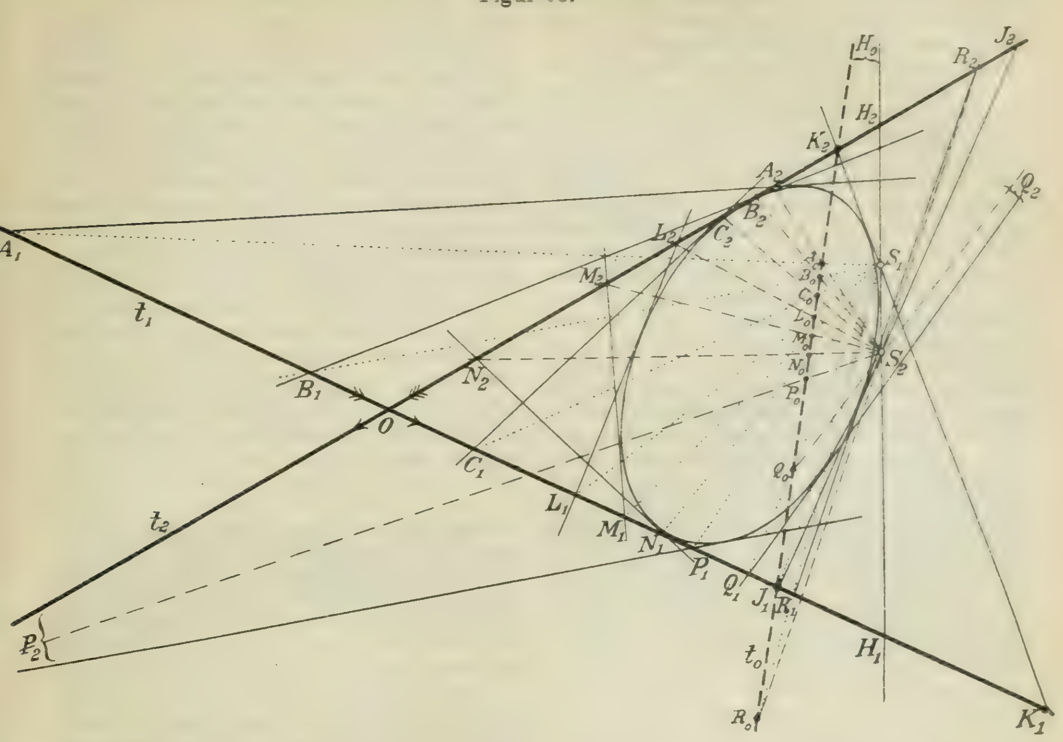
Erkl. 300. Besonders für den Anfänger ist es eine wichtige Frage, sich über die Lage der Kurve orientieren zu können, da für ihn der Ueberblick über die Figur erst dadurch erzielt zu werden pflegt, dass er die Kurve selbst in Erscheinung treten sieht. Und diese stellt er sich viel eher als ein Punktgebilde vor, wie als ein Tangentengebilde; er wird also eher die Frage

Auflösung. Um über die L a g e d e r K u r v e in den Winkelräumen der Träger Gewissheit zu erhalten, beobachte man die D u r c h l a u f u n g s r i c h t u n g der beiden Punktreihen in der Nähe des Schnittpunktes der Träger. In Figur 95 sind die beiden Punktreihen durchlaufen in der gleichen Reihenfolge ihrer Elemente:

$$ABCLMNPQJRHKA.$$

Diese einander zugeordneten Durchlaufungs-

Figur 95.



nach den Berührungspunkten der Tangenten in den Vordergrund treten lassen gegenüber jener, ob ein bestimmter Raumteil der Ebene von einer veränderlichen Tangente überstrichen wird oder nicht.

Erkl. 301. Entsprechend der Erwägung am Schlusse der vorigen Erklärung 300 kann man die nebenstehende Untersuchung auch unmittelbar auf die Aufsuchung der Lage des Berührungspunktes einer bestimmten Tangente richten, und dazu in folgender Weise verfahren:

1. Wählt man eine Tangentenstrecke zwischen zwei entsprechenden Punkten $M_1 M_2$ in demjenigen Winkelraum der Träger, auf dessen Schenkeln die Punktreihen entgegengesetzte Richtung zum Schnittpunkt haben, so liegt ein unmittelbar benachbarter Punkt von M_2 in der Richtung gegen O hin, der entsprechende unmittelbar benachbarte von M_1 dagegen in der Richtung von O weg; folglich muss die mit $M_1 M_2$ unmittelbar benachbarte Tangente von einem Punkte auf t_1 einerseits der Tangente $M_1 M_2$ hinführen nach einem Punkte auf t_2 anderseits $M_1 M_2$, d. h. diese unmittelbar benachbarte Tangente muss die Tangente $M_1 M_2$ auf der Strecke zwischen M_1 und M_2 überschreiten, oder der Schnittpunkt von $M_1 M_2$ mit der unmittelbar benachbarten Tangente liegt zwischen M_1 und M_2, d. h. der Berichtungen haben im Winkel $C_1 O N_2$ der Träger und in dessen Scheitelwinkel $B_1 O P_2$ die entgegengesetzte, im Nebenwinkel $N_2 O B_1$ und dessen Scheitelwinkel $C_1 O P_2$ aber die gleiche Richtung, nämlich hier beide zum Scheitel hin oder beide vom Scheitel fort, dort die eine Richtung vom Scheitel fort, die andere zum Scheitel hin.

Betrachtet man nun die projektivisch zugeordneten Strecken im ersten Raume, z. B. $L_1 M_1$ und $L_2 M_2$, so schmiegt sich die Tangente $L_1 L_2$ irgendwo an die Kurve an und ebenso $M_1 M_2$. Der Uebergang von der einen Tangente zur andern geschieht so, dass stets das Innere der Kurve frei bleibt, und die Kurve selbst gebildet wird durch die Schnittpunkte je zweier unendlich benachbarten Lagen der Tangente. — Anders verhält es sich im zweiten Winkelraume, z. B. bei den projektivisch zugeordneten Strecken $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$. Geht man von A_1 in unendlich kleinen Verschiebungen nach B_1, so muss man auch von A_2 in unendlich kleinen Verschiebungen nach B_2 gehen: auf die Tangente $A_1 A_2$ folgt eine unendlich nahe benachbarte, und diese trifft sie erst in der Verlängerung über A_2 hinaus irgendwo, so dass bei der Verschie-

rührungspunkt der Tangente $M_1 M_2$ liegt innerhalb desjenigen Winkelraumes der Träger, auf dessen Schenkeln die Punktreihen entgegengesetzte Richtung zum Scheitel haben.

2. Wählt man dagegen eine Tangentenstrecke zwischen zwei entsprechenden Punkten $A_1 A_2$ in demjenigen Winkelraum der Träger, auf dessen Schenkeln die Punktreihen gleiche Richtung zum Schnittpunkt haben, so liegt ein unmittelbar benachbarter Punkt von A_1 in der Richtung gegen O hin, der entsprechende unmittelbar benachbarte Punkt von A_2 ebenfalls in der Richtung gegen O hin. Folglich muss die mit $A_1 A_2$ unmittelbar benachbarte Tangente von einem Punkt auf t_1 einerseits der Tangente $A_1 A_2$ hinführen nach einem Punkt auf t_2 auf derselben Seite von $A_1 A_2$, d. h. diese unmittelbar benachbarte Tangente kann die Tangente $A_1 A_2$ auf der Strecke zwischen A_1 und A_2 nicht überschreiten; oder der Schnittpunkt von $A_1 A_2$ mit der unmittelbar benachbarten Tangente liegt nicht zwischen $A_1 A_2$, — und demnach liegt der Berührungspunkt der Tangente $A_1 A_2$ nicht innerhalb desjenigen Winkelraumes der Träger, auf dessen Schenkeln die Punktreihen gleiche Richtung zum Scheitel haben — sondern ebenfalls in demjenigen Winkelraum, auf dessen Schenkeln die Punktreihen entgegengesetzte Richtung zum Scheitel haben.

Erkl. 302. Von den vier Winkelräumen der Träger werden durch diese Ueberlegungen jedenfalls zwei ausgeschlossen, oder als solche erkannt, die keine Kurvenpunkte enthalten. Ob von den zwei übrig bleibenden Scheitelwinkelräumen beide Kurvenpunkte enthalten, oder nur einer von ihnen, und welcher von beiden im letztern Falle, bleibt der Erwägung im einzelnen Falle vorbehalten. Es wird sich im nächsten Abschnitt der Aufgabensammlung zeigen, dass letztere Unterscheidung aufs engste verknüpft ist mit der Unterscheidung der Kurvengattung selbst, indem nämlich eine Ellipse oder Parabel nur im einen, eine Hyperbel dagegen in beiden Winkelräumen Kurvenpunkte aufzuweisen hat.

bung von $A_1 A_2$ bis $B_1 B_2$ kein Raum frei bleibt. Daher kann innerhalb des Vierecks $A_1 B_1 B_2 A_2$ kein Punkt beim Ueberstreichen ohne Tangente bleiben; und dasselbe gilt für alle Vierecke zwischen den zwei Trägern und zwei beliebigen Tangenten in demjenigen Winkelraume, welcher von den zum oder vom Scheitel gleichlaufenden Richtungen der Punktreihen gebildet wird. Die Kurve selbst kann also auch nicht im Raume $B_1 O N_2$ oder seinem Scheitelraume liegen, sondern nur im Raume $N_2 O C_1$ bezw. in seinem Scheitelwinkel $B_1 O P_2$.

Die Kurve liegt also stets nur in solchen Winkelräumen der Träger, für welche die einschliessenden Schenkel entgegengesetzte Richtung der Punktreihen aufweisen (die eine zum Scheitel hin, die andere vom Scheitel fort).

Erkl. 303. Besondere Vereinfachung erfahren die Ergebnisse der vorigen Auflösung, sowie der Erklärungen 301 und 302, wenn die Träger parallel liegen. In diesem Falle liegt nämlich die Kurve entweder innerhalb des Parallelstreifens, oder ausserhalb desselben, und zwar dann auf beiden Seiten desselben.

1. Sind nämlich die zugeordneten Durchlaufungsrichtungen in den beiden parallelen Punktreihen gleichlaufend parallel, so kann nach vorigem der Berührungspunkt einer beliebigen Verbindungsstrecke zweier entsprechenden Punkte nicht innerhalb des Parallelstreifens liegen, sondern nur ausserhalb desselben auf der einen oder andern Seite. Doch aber muss jede der parallelen Träger-Tangenten einen Berührungspunkt haben, und daher muss die Kurve selbst aus zwei durch den Parallelstreifen getrennten Teilen („Aesten“) bestehen, welche von aussen her an die parallelen Tangenten bis zur Berührung herankommen und dann wieder nach aussen weitergehen, da sie ja die Tangenten nicht überschreiten können, und im Innern des Parallelstreifens keine Kurvenpunkte liegen können.

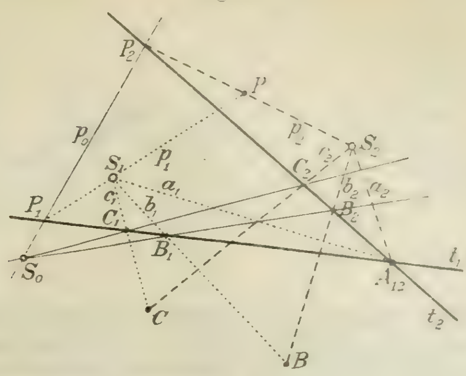
2. Sind aber die beiden parallelen Punktreihen ungleichlaufend parallel, so muss auf jeder Verbindungsstrecke zweier entsprechenden Punkte der Berührungspunkt innerhalb des Parallelstreifens liegen, die Kurve geht vom Berührungspunkt der einen Trägertangente hinüber zum Berührungspunkt mit der andern, und von dort wieder zurück zum ersten.

Die Kurve heisst im ersten Falle eine Hyperbel, im letzten Falle eine Ellipse. Vergl. Erkl. 163.

Aufgabe 149. Die Konstruktion der Antwort auf Frage 32 für die allgemeine Lage der Träger $t_1 t_2$ auszuführen.

Auflösung. Seien $a_1 b_1 c_1$ und $a_2 b_2 c_2$ die drei projektivisch zugeordneten Strahlen der

Figur 96.



Erkl. 304. Vergleicht man die Figuren 96 und 32, so erkennt man die grosse Vereinfachung, welche dadurch entsteht, dass in Fig. 32 nicht zwei beliebige Geraden durch $(a_1 a_2)$ als Träger $t_1 t_2$ gewählt sind, sondern eben die Geraden durch $(b_1 b_2)$ und $(c_1 c_2)$: Die Strahlen $b_0 c_0$ fallen in die Strahlen $b_1 c_2$, und die ganze Figur wird dadurch einfacher und übersichtlicher. Und doch ist nach nebenstehendem Beweise ihrer Allgemeingültigkeit kein Eintrag gethan.

Erkl. 305. Wenn man auch in allen Fällen vorzieht, die vereinfachte Konstruktion nach Figur 32 vorzunehmen, anstatt der allgemeinen nach Figur 96 (und ebenso bei der Klassenkurve die einfache Konstruktion nach Figur 27 statt der allgemeinen nach Figur 91), so ist es immerhin im Auge zu behalten, dass auch auf anderem Wege zum Ziele gelangt werden kann. Denn es könnte z. B. wegen der Lage der Punkte auf dem Zeichenblatt einmal unthunlich werden, die Geraden AB und AC als Träger zu benützen, weil deren Schnittpunkte mit den Strahlen ausserhalb des Blattes fallen; dann würde man wohl aus praktischen, wenn auch nicht aus theoretischen Gründen von der besondern Konstruktion auf die allgemeine zurückgehen.

Büschel S_1 und S_2. Man wähle zwei ganz beliebige Strahlen durch $(a_1 a_2)$ als Träger t_1 u. t_2 für die Punktreihen $(t_1 a_1)$, $(t_1 b_1)$, $(t_1 c_1)$ und $(t_2 a_2)$, $(t_2 b_2)$, $(t_2 c_2)$. Da $(t_1 a_1)$ und $(t_2 a_2)$ zusammenfallen, so ist $t_1 \overline{\wedge} t_2$, also S_0 der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von $(t_1 b_1)$, $(t_2 b_2)$ und $(t_1 c_1)$, $(t_2 c_2)$. Zu beliebigem Strahle p_1 erhält man p_2 aus der Reihe von Elementen p_1, $(p_1 t_1)$, S_0, $(p_0 t_2)$, p_2.

Dass der so entstandene Strahl p_2 genau derselbe ist, der durch beliebige andere Wahl der Träger $t_1 t_2$ entstanden wäre, beweist die harmonische Beziehung: Ist etwa p_1 der vierte harmonische Strahl zu $a_1 b_1 c_1$, so ist auch $(t_1 p_1)$ vierter harmonischer Punkt zu $A_1 B_1 C_1$, ebenso auch p_0 vierter harmonischer Strahl zu $a_0 b_0 c_0$, $(t_2 p_0)$ vierter harmonischer Punkt zu $A_2 B_2 C_2$, also auch p_2 vierter harmonischer Strahl zu $a_2 b_2 c_2$. Wird aber p_1 aus der Strahlengruppe $a_1 b_1 c_1$ durch irgendwelche Reihenfolge harmonischer Zuordnungen erhalten, so muss auch p_2 aus der Strahlengruppe $a_2 b_2 c_2$ durch die entsprechend zugeordnete Reihenfolge harmonischer Zuordnungen entstehen. Und da die harmonische Zuordnung eindeutig ist, so muss es auch die projektivische Zuordnung der Strahlen p_1 und p_2 sein.

Aufgabe 150. Man wiederhole die vorige Konstruktion in anderer Lage der Elemente.

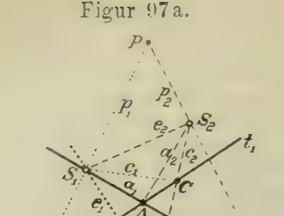
Aufgabe 151. Man konstruiere die Kurventangenten in den Scheiteln.

Andeutung. Entsprechende Strahlen zum Verbindungsstrahl beider Scheitel.

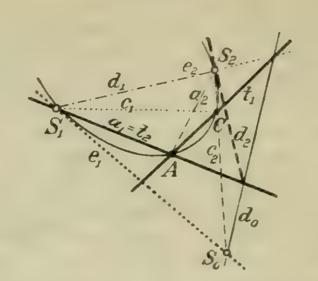
Aufgabe 152. Von einer Kurve seien gegeben die Scheitel nebst der Tangente in einem derselben und zwei Strahlenpaare $a_1 a_2$ und $c_1 c_2$. Man konstruiere weitere Kurvenpunkte sowie die Tangente im Scheitel S_2.

Auflösung. Die Tangente in S_1 ist der entsprechende Strahl e_1 zum Verbindungs-

Figur 97a.



Figur 97b.



Erkl. 306. Auch die vorliegende Konstruktion könnte man nach der allgemeinen Konstruktion ausführen, indem man ein beliebiges Strahlenpaar durch $(a_1 a_2)$ oder $(c_1 c_2)$ als t_1 und t_2 wählte. Wenn man aber eine ansehnliche Zahl von Kurvenelementen konstruieren will, so ist es von Wert, möglichst wenig Linien ziehen zu müssen; und das ermöglicht eben die besondere Art der Konstruktion. Für Konstruktion zahlreicher Elemente ist es ausserdem ratsam, gar nicht alle Geraden ganz auszuziehen, sondern nur solche Stücke bezw. Stückchen derselben, welche zur Kenntlichmachung der erforderlichen Schnittpunkte gerade nötig sind.

Erkl. 307. Die Auswahl der Elemente ist in den dualistisch gegenüberstehenden Aufgaben 82 und 152 beschränkter als in den Fällen ohne vereinigt liegende Bestimmungsstücke. Während nämlich in den letztgenannten Fällen aus drei Bestimmungsstücken abc bezw. ABC zwei beliebige Elemente für $S_1 S_2$ bezw. $t_1 t_2$ auf sechsfache Weise ausgewählt werden können, gestatten die vorliegenden Bestimmungsstücke nur noch zweifache Auswahl, nämlich in Figur 92 für S_2 unter A_1 oder C_1, bezw. in Fig. 97 für t_2 unter a_1 und c_1, während S_1 bezw. t_1 nur einfach gewählt werden können (vergl. Erkl. 287).

strahl — indem dieser betrachtet wird als Strahl e_2 des zweiten Büschels. Demnach kennt man wieder drei Paare entsprechender Strahlen, $a_1 c_1 e_1$ und $a_2 c_2 e_2$. Für t_2 ist Auswahl unter a_1 und c_1, als t_1 ist nur zu nehmen die Verbindungsgerade von $(a_1 a_2)$ und $(c_2 c_1)$. Wählt man $a_1 = t_2$ (siehe Figur 97), so ist Punktreihe $(t_1 a_1)(t_1 c_1)(t_1 e_1)$ projektivisch mit Reihe $(t_2 a_2)(t_2 c_2)(t_2 e_2)$, und zwar wegen des Zusammenfallens von $(t_1 a_1)$ und $(t_2 a_2)$ in perspektivischer Lage. Scheitel S_0 liegt also im Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von $(t_1 c_1)$ und $(t_2 c_2)$,, nämlich c_2, und von $(t_1 e_1)$ und $(t_2 e_2)$, nämlich e_1; also $S_0 = (c_2 e_1)$. Dann findet man (s. Fig. 97a) zu p_1 den Strahl p_2 bezw. den Kurvenpunkt P durch p_1, t_1, p_0, t_2, p_2, und ebenso die Tangente im Scheitel S_2 als entsprechenden Strahl d_2 zum Verbindungsstrahl der Scheitel d_1 (siehe Figur 97b) durch d_1, t_1, d_0, t_2, d_2.

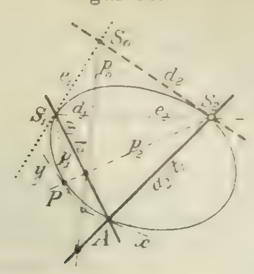
Aufgabe 153. Von einer Kurve seien gegeben die Scheitel und die Tangenten in beiden nebst einem Strahlenpaare $a_1 a_2$. Man konstruiere weitere Strahlenpaare.

Erkl. 308. Wählt man die allgemeinere Konstruktionsweise, so hätte man zwei beliebige Geraden durch A als Träger zu wählen. Bei der besonderen Konstruktionsweise bleibt keinerlei Auswahl, da hier nur $t_1 = a_2$ und $t_2 = a_1$ gewählt werden kann.

Erkl. 309. In den vorstehenden Fig. 92, 93 und 97, 98 sind jeweils Ellipsen als Grundlage genommen. Selbstverständlich bleibt aber der Charakter der Kurve für die Gültigkeit der Entwicklung gänzlich ausser Betracht. Es kann daher dem Studierenden nur angeraten werden,

Auflösung. Die Tangente in S_1 ist der entsprechende Strahl e_1 zum Verbindungsstrahl der Scheitel, wenn dieser betrachtet wird als Strahl e_2 des zweiten Büschels; die Tangente in S_2 ist der entsprechende Strahl d_2 zum Verbindungsstrahl der Scheitel, wenn dieser betrachtet wird als Strahl d_1 des ersten Büschels. Demnach kennt man wieder drei Paare entsprechender Strahlen $a_1 d_1 e_1$ und $a_2 d_2 e_2$. Für t_2 ist zu nehmen a_1 und für t_1 nur a_2 (siehe Figur 98), also Punktreihe $(t_1 a_1)(t_1 d_1)(t_1 e_1)$ projektivisch $(t_2 a_2)(t_2 d_2)(t_2 e_2)$, und zwar wegen des Zusammenfallens von $(t_1 a_1)$ und $(t_2 a_2)$ in perspektivischer Lage. Scheitel S_0 liegt auf

Figur 98.



die sämtlichen Figuren für abweichende Fälle der Lage der Bestimmungsstücke zu wiederholen, um sie in den verschiedensten Abänderungen einzuüben.

der Verbindungsgeraden von $(t_1 d_1)$ und $(t_2 d_2)$, nämlich d_2; und auf der Verbindungsgeraden von $(t_1 e_1)$ und $(t_2 e_2)$, nämlich e_1; also $S_0 = (d_2 e_1)$. Dann findet man (s. Figur 98) zu p_1 den Punkt p_2 bezw. den Kurvenpunkt $(p_1 p_2)$ durch p_1, t_1, p_0, t_2, p_2.

Aufgabe 154 bis 176. Man konstruiere weitere Kurvenpunkte bezw. die Tangenten in den Scheiteln, wenn eine Kurve zweiter Ordnung bestimmt ist durch die zwei Scheitel und die folgenden zugeordneten Strahlengruppen:

1. a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 mit Punkten ABC auf gleicher oder ungleicher Seite von $S_1 S_2$ . . . **154.**
2. a_1, b_1, d_1 und a_2, b_2, d_2 oder a_1, b_1, e_1 und a_2, b_2, e_2 mit Punkten AB in verschiedenen Lagen auf gleicher oder ungleicher Seite von $S_1 S_2$ und d_2 oder e_1 . . . . **155** α, β.
3. a_1, d_1, e_1 und a_2, d_2, e_2 mit Punkt A im gleichen oder ungleichen Winkelraum $(d_2 e_1)$ mit der Strecke $S_1 S_2$ . . . . . **156.**
4. a_1, d_1, e_1 und a_2, d_2, e_2, wobei $e_1 \parallel d_2$ und Punkt A innerhalb oder ausserhalb des Parallelstreifens . . . . **157.**

Auflösungen. Die Lösungen der drei ersten Aufgaben **154 bis 156** sind wieder ganz dieselben wie die in Antwort 6 auf Frage 32 bezw. in Aufgabe 152 und 153 gegebenen Konstruktionen. Der Vollständigkeit wegen sind dieselben unter Andeutung ihrer verschiedenen Erscheinungsweisen nochmals mit den andern Aufgaben zusammengestellt. Aufgabe **157** ist dieselbe wie 156, nur mit parallel laufenden Tangenten in den Scheiteln.

5. a_1, b_1 und a_2, b_2 nebst $c_1 \parallel c_2$ mit Punkten A und B in drei verschiedenen Lagen zum Parallelstreifen . . . . **158.**
6. a_1, d_1 und a_2, d_2 oder a_1, e_1 und a_2, e_2 nebst $c_1 \parallel c_2$ mit gleicher Unterscheidung für Punkt A . . . . **159** α, β.
7. d_1, e_1 und d_2, e_2 nebst $a_1 \parallel a_2$ **160.**
8. a_1, d_1, e_1 und a_2, d_2, e_2, wobei $a_1 \parallel a_2$ und $d_2 \parallel e_1$ . . . **161.**

Bei den Aufgaben **158 bis 161** hat man einmal, bei **162 und 163** zweimal zwei zugeordnete Parallelstrahlen, folglich als deren Schnittpunkt einen unendlich fern liegenden Kurvenpunkt. Dadurch fallen auch von den drei Punkten, durch welche t_1 und t_2 gelegt zu werden pflegen, einer oder zwei unendlich fern.

9. a_1 und a_2 nebst $b_1 \| b_2$ und $c_1 \| c_2$ in gleichlaufenden oder ungleichlaufenden Büscheln . **162.**
10. d_1 und d_2 oder e_1 und e_2 nebst $b_1 \| b_2$ und $c_1 \| c_2$ mit gleicher Unterscheidung . . . . . . **163** α, β.

11. $S_2 \infty$; a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 oder $S_1 \infty$; a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 . . . . **164** α, β.
12. $S_2 \infty$; a_1, b_1, d_1 und a_2, b_2, d_2 oder $S_1 \infty$; a_1, b_1, e_1 und a_2, b_2, e_2 . . . . **165** α, β.
13. $S_2 \infty$; a_1, b_1, e_1 und a_2, b_2, e_2 oder $S_1 \infty$; a_1, b_1, d_1 und a_2, b_2, d_2 . . . . **166** α, β.
14. $S_2 \infty$; a_1, d_1, e_1 und a_2, d_2, e_2 oder $S_1 \infty$; a_1, d_1, e_1 und a_2, d_2, e_2 . . . . **167** α, β.

Für die Aufgaben **164 bis 167** ist der eine Scheitel im Unendlichen, also sein Büschel ein Parallelstrahlenbüschel, aber die von diesem Büschel gegebenen Strahlen laufen sämtlich durchs Endliche. Die unendlich ferne Gerade der Ebene ist zwar einer der Strahlen dieses Parallelstrahlenbüschels, aber derselbe tritt nicht unter den gegebenen Elementen auf.

15. $S_2 \infty$; a_1, b_1, c_1 und $a_2, b_2, c_2 \infty$ oder $S_1 \infty$; $a_1, b_1, c_1 \infty$ und a_2, b_2, c_2 . . . . . . **168** α, β.
16. $S_2 \infty$: a_1, b_1, d_1 und $a_2, b_2 \infty, d_2$ oder $S_1 \infty$; $a_1, b_1 \infty, d_1$ und a_2, b_2, d_2 . . . . **169** α, β.
17. $S_2 \infty$; a_1, b_1, d_1 und $a_2, b_2, d_2 \infty$ oder $S_1 \infty$; $a_1, b_1, d_1 \infty$ und a_2, b_2, d_2 . . . . . . **170** α, β.
18. $S_2 \infty$; a_1, b_1, e_1 und $a_2, b_2 \infty, e_2$ oder $S_1 \infty$; $a_1, b_1 \infty, e_1$ und a_2, b_2, e_2 . . . . **171** α, β.
*19. $S_2 \infty$; a_1, d_1, e_1 und $a_2 \infty, d_2, e_2$ oder $S_1 \infty$; $a_1 \infty, d_1, e_1$ und a_2, d_2, e_2 . . . . **172** α^*, β.
20. $S_2 \infty$; a_1, d_1, e_1 und $a_2, d_2 \infty, e_2$ oder $S_1 \infty$; $a_1, d_1, e_1 \infty$ und a_2, d_2, e_2 . . . . **173** α, β.

In den Aufgaben **168 bis 173** dagegen tritt diese unendlich ferne Gerade in den verschiedensten Zuordnungen als Strahl des Parallelstrahlenbüschels auf.

21. $S_1 \infty$ und $S_2 \infty$; a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 . . . . **174.**
22. $S_1 \infty$ und $S_2 \infty$; $a_1, b_1, d_1 \infty$ und a_2, b_2, d_2 oder a_1, b_1, e_1 und $a_2, b_2, e_2 \infty$ . . . . . **175** α, β.
23. $S_1 \infty$ und $S_2 \infty$; $a_1, d_1 \infty, e_1$ und $a_2, d_2, e_2 \infty$ . . . . . **176.**

Bei den drei letzten Aufgaben **174 bis 176** sind beide Scheitel ins Unendliche verlegt, also beide Büschel Parallelstrahlenbüschel: die unendlich ferne Gerade tritt hier als Verbindungsstrahl beider Scheitel auf, daher $d_1 \infty$ und $e_2 \infty$.

Erkl. 310. Die Bedeutung der Buchstaben ist wieder dieselbe wie früher, nämlich a, b, c beliebige durchs Endliche laufende Strahlen; d_1, e_2 bezeichnen den Verbindungsstrahl der Scheitel, je nachdem dieser als Strahl des Büschels S_1 oder S_2 angesehen wird, folglich d_2, e_1 die Tangenten in S_2 und S_1. Weitere Bezeichnungen, wie F und G bei den Punktreihen, treten bei den Strahlenbüscheln keine auf. — Durch Beisetzung der Buchstaben $\alpha\beta$ bei einer Aufgabe wird angedeutet, dass die beiden Aufgaben sich nur unterscheiden durch Vertauschung der Elemente des einen und andern Büschels. Die mit Stern bezeichnete Aufgabe 172 α^* ist unten vollständig gelöst.

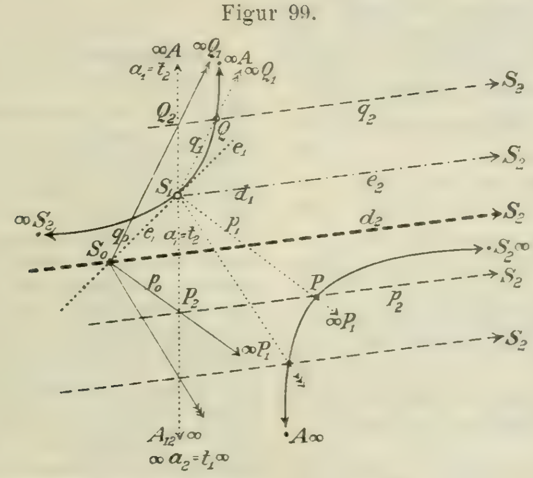
Erkl. 311. Da die Scheitel ebensowohl als die Schnittpunkte je zweier zugeordneten Strahlen Kurvenpunkte sind, so ist über die Lage der Kurve zu den gegebenen Elementen hier nicht

wie bei der Tangentenkurve besondere Erörterung erforderlich; über die Art der Kurve (Ellipse. Parabel, Hyperbel) vergleiche man wieder den vierten Abschnitt dieses Buches. Für einige der vorstehenden Aufgaben lassen sich Figuren verwenden, die im vorigen I. oder im gegenwärtigen II. Teile dieses Lehrbuches gezeichnet vorliegen, so für Aufgabe 159 und 160 Fig. 43a; für Aufgabe 161 bis 163 die Figuren 48, 50, 44a; für Aufgabe 164β bis 167β, 171β, 173β Fig. 43b, für Aufgabe 174 bis 176 Fig. 44b.

Erkl. 312. Auch zu den vorstehenden Beispielen möge der Studierende jedesmal den Text der Aufgabe in W o r t e n fassen, z. B. für Aufgabe 173: Die projektivische Verwandtschaft eines Strahlenbüschels mit einem Parallelstrahlenbüschel sei festgelegt durch Zuordnung eines b e l i e b i g e n Strahlenpaares sowie der b e i d e n dem V e r b i n d u n g s s t r a h l der Scheitel entsprechenden Strahlen, wovon der eine mit dem unendlich fernen Strahle seines Büschels zusammenfällt. Man konstruiere zahlreiche Punkte der erzeugten Kurve. — Vergleiche auch die folgende Aufgabe 172α.

Erkl. 313. Aus Aufgabe 165 ergeben sich die beiden Aufgaben 169 und 170 durch Verlegung des einen oder des andern Elements ins Unendliche; aus Aufgabe 166 aber nur die eine Aufgabe 171. Denn wollte man in 166α etwa e_2 ins Unendliche verlegen, so müsste, da e_2 der Verbindungsstrahl S_2S_1 ist, auch S_1 im Unendlichen liegen; man käme also auf die Aufgabe 175. Ebenso kann auch aus Aufgabe 174 keine besondere dadurch entstehen, dass einer der Strahlen abc ins Unendliche verlegt wird; denn da die unendlich ferne Gerade der Verbindungsstrahl beider Scheitel ist, so würde etwa durch $c_1\infty$ sofort c_2 zur Tangente in S_2 werden, also Aufgabe 175 entstehen.

Figur 99.



Aufgabe 172α. Von zwei projektivischen Strahlenbüscheln, deren einer ein Parallelstrahlenbüschel, seien gegeben die beiden dem V e r b i n d u n g s s t r a h l e der Scheitel entsprechenden Strahlen, sowie der dem u n e n d l i c h f e r n e n Strahle des Parallelbüschels entsprechende Strahl im andern. Man suche weitere Punkte der Kurve.

Erkl. 314. In Figur 99 sind nicht nur die Strahlen von S_2 aus alle einander parallel, sondern auch je ein Strahl durch S_1 und S_0, nämlich $p_1 \parallel p_0$, $q_1 \parallel q_0$ u. s. w. Denn da t_1 die unendlich ferne Gerade ist, so müssen je zwei Strahlen von S_1 und S_0, welche denselben Punkt P_0, Q_0 u. s. w. projizieren, miteinander gleiche Richtung haben. Die unendlich ferne Gerade selbst tritt hier als einer der Parallelstrahlen

Auflösung. 1. In Figur 99 sei S_1 mit $a_1 d_1 e_1$ der eine Strahlenbüschel, also Scheitel S_2 in Richtung d_1 und mit Strahlen $e_2 = d_1$, d_2 und $a_2\infty$; folglich e_1 T a n g e n t e in S_1, d_2 T a n g e n t e im unendlich fernen Scheitel S_2. Als Träger $t_1 t_2$ sind also zu wählen zwei von den Verbindungsgeraden der drei Schnittpunkte $(a_1 a_2)$ oder ∞A, $(d_1 d_2)$ oder ∞S_2, $(e_1 e_2)$ oder S_1. Da $S_1 S_2$ als Träger nicht verwendbar, bleibt für t_1 nur $S_2 A$ oder a_1, nämlich die unendlich ferne Gerade, und

zu $d_2 e_2$ u. s. w. auf. Sie ist aber, wie in andern Fällen ebenfalls zur Anwendung gelangt, auch parallel zu jeder beliebigen Geraden im Endlichen der Ebene, auch senkrecht zu jeder beliebigen Geraden im Endlichen u. s. w.

für t_2 nur $S_1 A$ oder a_1. Dann sind die entsprechenden Punkte beider Träger:

$(t_1 a_1)$ und $(t_2 a_2)$: Verbindungsgerade unbestimmt durch $A\infty$, also $t_1 \overline{\overline{\wedge}} t_2$;

$(t_1 d_1)$ und $(t_2 d_2)$: Verbindungsgerade d_2;

$(t_1 e_1)$ und $(t_2 e_2)$: Verbindungsgerade e_1; S_0 ist also der Schnittpunkt $(d_2 e_1)$.

Erkl. 315. Die Kurve selbst hat in Fig. 99 zwei Punkte auf der unendlich fernen Geraden, nämlich den Scheitel S_2 als Schnittpunkt der zugeordneten Strahlen $d_1 d_2$ und A (zugleich A, A_1, A_2) als Schnittpunkt der zugeordneten Strahlen $a_1 a_2$. Von S_2 kommt die Kurve aus dem Unendlichen herein und geht über P wieder nach A ins Unendliche, kommt auf der entgegengesetzten Seite wieder ins Endliche nach Q und geht über S_1 wieder zurück auf der entgegengesetzten Seite wie zuvor zum unendlich fernen Punkte S_2: die Kurve heisst Hyperbel.

2. Sucht man nunmehr auf beliebigem Strahl p_1 durch S_1 den zweiten Kurvenpunkt, so entstehen nach der Zeichenvorschrift:

$$S_1 \overline{\overline{\wedge}} t_1 \overline{\overline{\wedge}} S_0 \wedge t_2 \overline{\wedge} S_2$$

der Reihe nach die Elemente p_1, ∞P_1, p_0, P_2, p_2; und P ist Schnittpunkt von p_1 und p_2.

3. Sucht man auf beliebigem Parallelstrahl q_2 durch S_2 den zweiten Kurvenpunkt, so folgen einander umgekehrt die Elemente q_2, Q_2, q_0, ∞Q_1, q_1, also Kurvenpunkt $(q_1 q_2)$.

Aufgabe 177 bis 191. Man soll von einer Kurve zweiter Ordnung beliebig viele weiteren Elemente (Kurvenpunkte und deren Tangenten) konstruieren, wenn zu ihrer Bestimmung folgende Stücke gegeben sind:

1. Fünf beliebige Kurvenpunkte in allgemeiner Lage . . . . . . **177.**
2. Vier im Endlichen und ein unendlich fern liegender Kurvenpunkt **178.**
3. Drei im Endlichen und zwei unendlich fern liegende Kurvenpunkte **179.**
4. Vier beliebige Kurvenpunkte nebst beliebiger Tangente in einem derselben . . . . **180.**
5. 6. 7. Drei im Endlichen und ein unendlich fern liegender Kurvenpunkt nebst
   5. beliebiger Tangente durch einen der im Endlichen liegenden Kurvenpunkte . . **181,**
   6. beliebiger Tangente, bezw. . **182,**
   7. unendlich ferner Tangente durch den unendlich fernen Kurvenpunkt . . . . . **183.**
8. 9. Zwei im Endlichen und zwei unendlich fern liegende Kurvenpunkte nebst beliebiger Tangente
   8. durch einen der im Endlichen **184,**
   9. durch einen der unendlich fern liegenden Kurvenpunkte **185.**
10. Drei beliebige Kurvenpunkte und in zweien derselben je eine beliebige Tangente . . . . . . **186.**

Auflösungen. Zur Konstruktion der nebenstehenden Aufgaben wählt man zwei von den gegebenen Kurvenpunkten als Scheitel. Die Auswahl derselben ist beliebig bei den ersten drei Fällen, wo keine Tangenten gegeben sind; wenn sich aber eine oder zwei Tangenten unter den gegebenen Stücken befinden, so muss man den einen Kurvenpunkt bezw. die zwei Kurvenpunkte, durch welche die Tangenten gegeben sind, zu Scheiteln wählen. — Die Verbindungsgeraden der übrigen gegebenen Kurvenpunkte mit den Scheiteln liefern die zugeordneten Strahlenpaare, eine Tangente bildet jeweils den durch ihren Scheitel gehenden zugeordneten Strahl zum Verbindungsstrahl der beiden Scheitel, wenn dieser als Strahl des andern Büschels betrachtet wird.

Dadurch werden die nebenstehenden Aufgaben sämtlich zurückgeführt auf die vorigen Aufgaben 154 bis 176. Insbesondere wird die mit * bezeichnete Aufgabe 190 auf genau dieselbe Weise konstruiert, wie die oben vollständig gelöste Aufgabe 172 α, indem die beiden nebst Tangente gegebenen Kurvenpunkte (der endlich und der eine unendlich ferne) als Scheitel gewählt werden müssen.

11. 12. 13. Zwei im Endlichen und ein unendlich fern liegender Kurvenpunkt nebst
    11. beliebigen Tangenten durch die beiden im Endlichen liegenden Kurvenpunkte . **187**,
    12. beliebigen Tangenten durch den einen im Endlichen und durch den unendlich fern liegenden Kurvenpunkt . **188**,
    13. beliebiger Tangente durch den einen im Endlichen und unendlich ferner Tangente durch den unendlich fern liegenden Kurvenpunkt . **189**.

*14. 15. Ein im Endlichen und zwei unendlich fern liegende Kurvenpunkte nebst
    14. beliebigen Tangenten durch den im Endlichen und durch den einen der unendlich fern liegenden Kurvenpunkte . **190***,
    15. beliebigen Tangenten durch die beiden unendlich fernen Kurvenpunkte . . . . **191**.

Erkl. 316. In entsprechender Uebertragung gelten auch hier die Ausführungen der Erklärungen 294 bis 297. Die Gruppierung ergibt für
Aufgabe 177 bis 179 $PPPPP$,
„ 180 „ 185 $PPP(PT)$,
„ 186 „ 191 $P(PT)(PT)$.

Bei jeder Aufgabe kann auch in einem neu gefundenen Kurvenpunkte die Tangente verlangt werden. Zu dem Zwecke erfolgt Abänderung der Bezeichnungsweise der vorhandenen Elemente in der Art, dass man diesen neu gefundenen Kurvenpunkt als einen der Scheitel auffasst, ihn mit einem der vorigen Scheitel zusammenfasst und dann zum Verbindungsstrahl dieser beiden Scheitel den entsprechenden Strahl durch den neuen Scheitel sucht. Dieser ist die gesuchte Tangente. Ebenso können gleichzeitig durch zwei neugefundene Kurvenpunkte die Tangenten konstruiert werden, indem man keinen der bisherigen Scheitel beibehält, sowie die zwei neuen Punkte zu Scheiteln wählt. Die bisherigen Scheitel sind dann einfache Kurvenpunkte und liefern durch ihre Verbindungsgeraden mit den neuen Scheiteln wieder entsprechende Strahlen der beiden nach Satz 16a in diesen Scheiteln entstehenden, projektivisch verwandten Strahlenbüschel.

Erkl. 317. Die etwas geringere Anzahl von Aufgaben der Gruppen 154 bis 176 und 177 bis 191 gegenüber den im allgemeinen dualistisch gegenüberstehenden Aufgabengruppen 88 bis 115 und 116 bis 137 erklärt sich zum Teil daraus, dass bei Strahlenbüscheln keine Strahlen auftreten von der besondern Art der unendlich fernen Punkte einer Punktreihe, und dass dementsprechend auch kein entsprechendes Gegenstück erscheint zum Vorkommen paralleler Tangenten unter den gegebenen Elementen in jenen Beispielen. Kommen umgekehrt in den vorstehenden Aufgaben zwei beliebig gegebene Tangenten vor, so gibt es aus gleichem Grunde keine Veranlassung zu getrennter Aufgabenstellung, ob diese Tangenten konvergent oder parallel sind; denn die einzige Folge kann die sein, dass der Schnittpunkt dieser Tangenten, wenn er zum Scheitel S_0 gemacht wird, einem gewöhnlichen oder einem Parallelstrahlenbüschel Entstehung gibt. — Andererseits spielt der in unendlicher Ferne gegebene Kurvenpunkt hier eine etwas ausgedehntere Rolle als in den früheren Aufgabengruppen die unendlich ferne Tangente — schon weil für diesen Punkt eine unendlich grosse Auswahl besteht, während jene Gerade nur in der Einzahl vorliegt.

Erkl. 318. Näher erörtert mag noch werden der Ausdruck „beliebige Tangente in einem unendlich fernen Punkte“: das ist eben eine beliebige von den vielen parallelen Geraden nach jenem unendlich fernen Punkte. Jede derselben kann als Tangente gewählt werden; und es ist in der Aufgabenstellung stets unterschieden, ob dafür ein durchs Endliche laufender Parallelstrahl genommen wird, oder die unendlich ferne Gerade selbst. — Die letztere Wahl fällt allerdings für den Fall der beiden letzten Aufgaben 190 und 191, wo zwei Kurvenpunkte auf dieser unendlich fernen Geraden liegen. Denn dann ist die unendlich ferne Gerade selbst eine Sehne der Kurve, kann also nicht auch Tangente sein, ausser bei der Ausnahme des Grenzfalles der entarteten Kurve.

Aufgabe 192 bis 196. Eine Kurve zweiter Ordnung soll umgeschrieben werden:

1. einem beliebig gegebenen Fünfeck 192,
2. einem beliebig gegebenen (allgemeinen oder besondern) Viereck,

Andeutung. Die nebenstehenden Aufgaben zeigen dieselben Aufgaben wie zuvor in anderer Formulierung. Man wählt zwei der gegebenen Kurvenpunkte als Scheitel

wenn ein beliebiger weiterer Kurvenpunkt (endlich oder unendlich fern) gegeben ist **193**,

3. einem beliebig gegebenen Dreieck, wenn zwei beliebige weitere Kurvenpunkte gegeben sind, und zwar zwei im Endlichen, oder einer im Endlichen und einer unendlich fern, oder zwei unendlich fern liegende **194**,

4. einem beliebigen (allgemeinen oder besondern) Viereck mit gegebener Tangente in einem Eckpunkte . **195**,

5. einem beliebigen Dreieck mit gegebenen Tangenten in zweien seiner Eckpunkte . . . . **196**.

zweier Strahlenbüschel, darunter jedenfalls solche Punkte, durch welche eine Tangente gegeben ist. Die Verbindungsgeraden mit den übrigen Punkten liefern die entsprechenden Strahlenpaare, und durch Konstruktion weiterer zugeordneten Strahlenpaare erhält man neue Kurvenpunkte bezw. Tangenten.

Erkl. 319. Im Gegensatz zu der Aufgabengruppe 138 bis 147 sind hier allgemeine und besondere Vielecke (nach parallelen oder konvergenten Seiten) nicht zu unterscheiden (vergl. Erkl. 317). Dagegen unterscheidet sich wesentlich Lage und Art der entstehenden Kurve, je nachdem ein hinzukommender beliebiger Kurvenpunkt in einem Aussenraume, bezw. im Innenraume oder Scheitelwinkelraume eines gegebenen Vielecks zu liegen kommt.

Aufgabe 197. 198. Eine Kurve zweiten Grades soll einem gegebenen Dreieck

a) ein- oder angeschrieben,

b) umgeschrieben werden

und dabei eine gegebene Gerade in gegebenem Punkte berühren.

Aufgabe 199. Bei welchen Lagebeziehungen der fünf gegebenen Elemente entstehen zerfallende Kurven?

Auflösung.

1. Wenn von den fünf gegebenen Tangenten drei durch einen Punkt gehen, so bildet dieser Punkt zusammen mit dem Schnittpunkt der beiden andern Tangenten ein Punktepaar, das die fünf gegebenen Geraden als Kurventangenten besitzt. Dasselbe Ergebnis entsteht, wenn man zu vier gegebenen Tangenten als Berührungspunkt den Schnittpunkt zweier von ihnen oder zu drei gegebenen Tangenten als Berührungspunkte zwei ihrer Schnittpunkte bestimmt.

2. Wenn von den fünf gegebenen Tangenten vier durch einen Punkt gehen, so bildet dieser Punkt zusammen mit einem beliebigen Punkte auf der fünften Tangente ein Punktepaar, das die fünf gegebenen Geraden als Kurventangenten besitzt. Dasselbe Ergebnis nur ohne Willkür für den zweiten Punkt entsteht, wenn man zu drei gegebenen Tangenten als Berührungspunkte einen der Schnittpunkte und einen beliebigen Punkt der dritten Geraden bestimmt.

3. Wenn alle fünf gegebenen Tangenten durch einen Punkt gehen, so bildet dieser Punkt einen einzelnen mehrfach zählenden Punkt, oder auch zusammen mit einem beliebigen Punkt der Ebene ein Punktepaar,

1. Wenn von den fünf gegebenen Punkten drei auf einer Geraden liegen, so bildet diese Gerade zusammen mit der Verbindungsgeraden der beiden andern Punkte ein Geradenpaar, das die fünf gegebenen Punkte als Kurvenpunkte besitzt. Dasselbe Ergebnis entsteht, wenn man zu vier gegebenen Punkten als Tangente die Verbindungsgerade zweier von ihnen oder zu drei gegebenen Punkten als Tangenten zwei ihrer Verbindungsgeraden bestimmt.

2. Wenn von den fünf gegebenen Punkten vier auf einer Geraden liegen, so bildet diese Gerade zusammen mit einer beliebigen Geraden durch den fünften Punkt ein Geradenpaar, das die fünf gegebenen Punkte als Kurvenpunkte besitzt. Dasselbe Ergebnis nur ohne Willkür für die zweite Gerade entsteht, wenn man zu drei gegebenen Punkten als Tangenten eine der Verbindungsgeraden und eine beliebige Gerade durch den dritten Punkt bestimmt.

3. Wenn alle fünf gegebenen Punkte auf einer Geraden liegen, so bildet diese Gerade eine einzelne mehrfach zählende Gerade, oder auch zusammen mit einer beliebigen Geraden der Ebene ein Geradenpaar, das

paar, das die fünf gegebenen Geraden als Kurventangenten besitzt.

die fünf gegebenen Punkte als Kurvenpunkte besitzt.

Erkl. 320. Ueber das Entstehen der sog. zerfallenden oder entarteten Kurven vergleiche man den Schluss der Antwort auf Frage 27 und 41 sowie Erkl. 97 und 143. Dort findet man, dass die Klassenkurve entarten kann zum Doppelpunkt oder mehrfach zählenden Einzelpunkt, die Ordnungskurve zur Doppelgeraden oder mehrfach zählenden Einzelgeraden.

Erkl. 321. Die obenstehend aufgezählten Fälle sind vollständig durchgeführt für die Fälle $TTTTT$, $TTT(TP)$, $T(TP)(TP)$, $(TP)(TP)P$, $(TP)PPP$, $PPPP$. Hinzugefügt werden kann noch, dass wenn im ersten der obenstehenden Fälle drei Elemente vereinigte Lage haben (drei Gerade durch einen Punkt oder drei Punkte auf einer Geraden), dann die zwei übrigen als zwei einzelne gegeben sein können oder als ein Element nebst Berührungselement. Dagegen ist hierbei für die drei vereinigt liegenden Elemente nur ihr gemeinsamer Träger und kein beliebiges anderes Element als Berührungselement verwendbar, d. h. für drei Geraden durch einen Punkt ist kein anderer Punkt als dieser Schnittpunkt zum Berührungspunkt, für drei Punkte auf einer Geraden keine andere als diese Verbindungsgerade zur Tangente zu wählen. (Man vergl. auch Erkl. 296 zu Aufgabe 120, 121 und Erkl. 318 zu Aufgabe 190, 191.)

Aufgabe 200. Welche Ausdrucksweise erfahren die Sätze 16 bezw. 18 bei Bezugnahme auf den Begriff der Doppelverhältnisse?

Auflösung.

1. Satz 16 nimmt folgende Gestalt an:

Satz. Das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte auf einer veränderlichen Tangente einer Kurve zweiter Klasse, in welchen diese veränderliche von vier festen Tangenten geschnitten wird, ist konstant.

2. Oder noch anders ausgedrückt:

Satz. Der geometrische Ort einer Geraden, auf welcher durch vier gegebene feste Geraden vier Schnittpunkte von bestimmtem Doppelverhältnis ausgeschnitten werden, ist derjenige Strahlenbüschel zweiter Klasse, welcher durch die vier festen Geraden und irgend eine einzelne Gerade von der verlangten Eigenschaft bestimmt ist.

1. Satz 16a nimmt folgende Gestalt an:

Satz. Das Doppelverhältnis der vier Verbindungsstrahlen von einem veränderlichen Kurvenpunkte einer Kurve zweiter Ordnung, durch welche dieser veränderliche mit vier festen Kurvenpunkten verbunden wird, ist konstant.

2. Oder noch anders ausgedrückt:

Satz. Der geometrische Ort eines Punktes, aus welchem vier gegebene feste Punkte durch vier Verbindungsgeraden von bestimmtem Doppelverhältnis projiziert werden, ist diejenige Punktreihe zweiter Ordnung, welche durch die vier festen Punkte und irgend einen einzelnen Punkt von der verlangten Eigenschaft bestimmt ist.

3. Fasst man den Begriff des Doppelverhältnisses der Schnittpunkte von vier festen Kurvenpunkten mit einer veränderlichen Tangente bezw. des Doppelverhältnisses der Verbindungsgeraden von vier festen Kurvenpunkten mit einem veränderlichen in veränderter Gestalt auf als den neuen Begriff des „Doppelverhältnisses dieser vier festen Tangenten selbst bezw. dieser vier festen Kurvenpunkte selbst“, so erscheinen die Sätze 18 und 18a in folgenden, inhaltlich beiderseits identischen Gestalten:

Satz. Das Doppelverhältnis von vier Tangenten einer Kurve zweiter Klasse ist gleich dem Doppelverhältnis ihrer Berührungspunkte.

Satz. Das Doppelverhältnis von vier Kurvenpunkten einer Kurve zweiter Ordnung ist gleich dem Doppelverhältnis ihrer Tangenten.

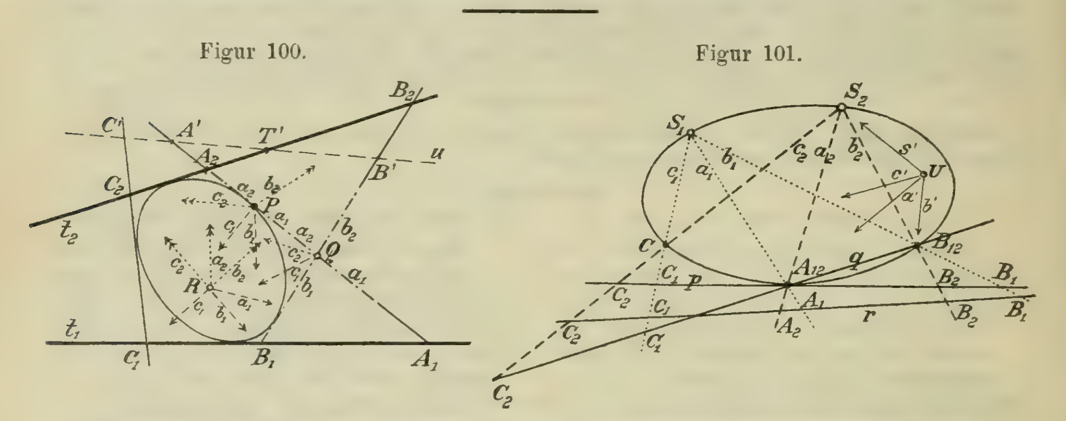
Erkl. 322. Die beiden Sätze, welche in vorstehender Auflösung an zweiter Stelle genannt sind, bilden gewissermassen die Vervollständigung der Determinationen der Aufgaben 33, 34 mit Erkl. 241 und der Aufgaben 43, 44 mit Erkl. 246. Jeder Satz enthält als geometrischer Ortssatz zwei entgegengesetzte Sätze in sich:

1. jeder Strahl bezw. Punkt von der verlangten Eigenschaft muss die angegebene Lage zu einer Kurve haben;

2. jeder Strahl bezw. Punkt von der angegebenen Lage zu einer Kurve muss die verlangte Eigenschaft haben.

Erkl. 323. Statt zu sagen, vier veränderliche Elemente müssten stets ein bestimmtes Doppelverhältnis behalten, kann man in diesen Sätzen auch den Wortlaut gebrauchen, dass die vier veränderlichen Elemente stets mit einer vorgegebenen Gruppe von vier Elementen projektivisch verwandt bleiben. Und in dieser Auffassung bleibt auch die Bezugnahme auf Doppelverhältnisse im Rahmen der rein geometrischen Betrachtungsweise ohne Hinzunahme metrischer Beziehungen.

Erkl. 324. Eigentlich ist der Begriff des Doppelverhältnisses nur definiert für vier Elemente in vereinigter Lage, also vier Punkte auf derselben Geraden oder vier Gerade durch denselben Punkt. Man macht davon aber auch eine weitere Anwendung auf vier Strahlen eines Strahlenbüschels zweiter Klasse oder vier Punkte einer Punktreihe zweiter Ordnung, indem man das Doppelverhältnis solcher vier getrennt liegenden Elemente erklärt als das Doppelverhältnis derjenigen vier Elemente in vereinigter Lage, welche in einem beliebigen festen Element des Gebildes durch jene vier getrennt liegenden Elemente erzeugt werden.



Aufgabe 201. 202. Man projiziere die zwei erzeugenden Punktreihen eines Strahlenbüschels zweiter Klasse aus einem beliebigen Punkte, bezw. die zwei erzeugenden Strahlenbüschel einer Punktreihe zweiter Ordnung auf eine beliebige Gerade und untersuche die entstehenden Gebilde.

Auflösung.

Werden die beiden projektivischen Punktreihen $t_1 t_2$ aus einem Punkte projiziert, so entstehen in diesem Punkte zwei projektivisch verwandte Strahlenbüschel mit gemeinsamem Scheitel.

1. Ist der Punkt P ein Kurvenpunkt, etwa Berührungspunkt der Tangente a, so liegen die Verbindungsstrahlen PA_1 und PA_2 in derselben Geraden a, während alle andern Strahlenpaare der beiden Büschel P_1 und P_2 in verschiedene Geraden fallen. Es sind also PA_1 und PA_2 selbstentsprechende Strahlen; die Büschel P_1 und P_2 besitzen gemeinsamen Scheitel und ein Paar selbstentsprechender Strahlen.

2. Ist der Punkt Q ein Punkt ausserhalb der Kurve, so gehen durch ihn die zwei Tangenten a und b; es fallen also die Verbindungsstrahlen QA_1 und QA_2 in dieselbe Gerade a, und ebenso auch QB_1 und QB_2 in dieselbe Gerade b; alle andern Strahlen der beiden Büschel Q_1 und Q_2 fallen in verschiedene Geraden. Es sind also QA_1

Werden die beiden projektivischen Strahlenbüschel $S_1 S_2$ auf eine Gerade projiziert, so entstehen auf dieser Geraden zwei projektivisch verwandte Punktreihen mit gemeinsamem Träger.

1. Ist die Gerade p eine Tangente, etwa im Kurvenpunkte A, so liegen die Schnittpunkte (pa_1) und (pa_2) in demselben Punkt A, während alle andern Punktepaare der beiden Reihen p_1 und p_2 in verschiedene Punkte fallen. Es sind also (pa_1) und (pa_2) selbstentsprechende Punkte; die Punktreihen p_1 und p_2 besitzen gemeinsamen Träger und ein Paar selbstentsprechender Punkte.

2. Ist die Gerade q eine die Kurve schneidende Gerade, so liegen auf ihr die zwei Kurvenpunkte A und B; es fallen also die Schnittpunkte (qa_1) und (qa_2) in denselben Punkt A, und ebenso auch (qb_1) und (qb_2) in denselben Punkt B; alle andern Punkte der beiden Reihen q_1 und q_2 fallen in verschiedene Punkte. Es sind also (qa_1)

und QA_2 sowie QB_1 und QB_2 selbstentsprechende Strahlen: die Büschel Q_1 und Q_2 besitzen gemeinsamen Scheitel und zwei Paar selbstentsprechende Strahlen.

3. Ist endlich der Punkt R ein Punkt innerhalb der Kurve, so gehen durch ihn keine Tangenten, folglich besitzen die Büschel R_1 und R_2 keine selbstentsprechenden Strahlen.

4. Zusatz: Man könnte auch die andere Gegenüberstellung zu Satz 16 bilden, dass man die Strahlen eines Strahlenbüschels zweiter Klasse zum Schnitt bringt mit einer beliebigen, diesem Büschel nicht angehörigen Geraden u (s. Figur 100). Dann sind (vergl. den zweiten Satz der vorigen Auflösung) die Schnittpunkte $C'A'T'B'$ jedenfalls nicht projektivisch zu der Gruppe von Schnittpunkten derselben vier festen Tangenten cat_2b mit einer beliebigen andern Tangente, z. B. $C_1A_1D_1B_1$ auf t_1.

und (qa_2) sowie (qb_1) und (qb_2) selbstentsprechende Punkte; die Punktreihen q_1 und q_2 besitzen gemeinsamen Träger und zwei Paar selbstentsprechende Punkte.

3. Ist endlich die Gerade r eine Gerade ausserhalb der Kurve, so liegen auf ihr keine Kurvenpunkte, folglich besitzen die Punktreihen r_1 und r_2 keine selbstentsprechenden Punkte.

4. Zusatz: Man könnte auch die andere Gegenüberstellung zu Satz 16a bilden, dass man die Punkte einer Punktreihe zweiter Ordnung verbindet mit einem beliebigen, dieser Punktreihe nicht angehörigen Punkte U (s. Figur 101). Dann sind (vergl. den zweiten Satz der vorigen Auflösung) die Verbindungsstrahlen $b'a'c's'$ jedenfalls nicht projektivisch zu der Gruppe von Verbindungsstrahlen derselben vier festen Kurvenpunkte $BACS_2$ mit einem beliebigen andern Kurvenpunkte, z. B. $b_1a_1c_1d_1$ durch S_1.

Erkl. 325. Die obenstehende dualistische Behandlung der vorliegenden Aufgaben bildet eine nähere Ausführung zu der schon in Antwort auf Frage 27 gepflogenen Erörterung über die Bezeichnung dieser Kurven als vom zweiten Grade. Dort wurde nur allgemein gesagt, dass kein, ein oder zwei selbstentsprechende Elemente möglich sind; hier wird gezeigt, unter welchen Umständen jeder dieser drei Fälle zutrifft. — Es bedarf kaum der Erwähnung, dass das Zusammenfallen zweier zugeordneten Elemente oder das Selbstentsprechen eines Elementenpaares bei gemeinsamem Träger zweier Gebilde eine ganz andere Bedeutung hat, als bei getrennten Trägern, wo dieser Umstand das Merkmal der perspektivischen Lage ist.

Erkl. 326. In jedem der Punkte PQR in Figur 100 entstehen drei Strahlen $a_1b_1c_1$ nach den Punkten $A_1B_1C_1$ auf t_1 und drei Strahlen $a_2b_2c_2$ nach den Punkten $A_2B_2C_2$ auf t_2. Ebenso enstehen auf jeder der Geraden pqr in Figur 101 drei Punkte $A_1B_1C_1$ durch die Strahlen $a_1b_1c_1$ aus S_1 und drei Punkte $A_2B_2C_2$ durch die Strahlen $a_2b_2c_2$ aus S_2. Diese Elementenpaare sind beim Träger Rr stets alle getrennt, beim Träger Pp getrennt bis auf das eine Paar $A_{12}a_{12}$, beim Träger Qq getrennt bis auf die beiden Paare $A_{12}a_{12}$ und $B_{12}b_{12}$.

Erkl. 327. Auf die vorliegenden Aufgaben wird noch einmal zurückzukommen sein bei Behandlung der drei Arten von Kurven im nächsten Abschnitt (vergl. Erkl. 144). Wie nach Erkl. 106 und 119 bezw. 128 die vollständig gezeichnete Kurve als Mittel dienen kann, überhaupt projektivische Gebilde zu erhalten, so kann eine solche nach gegenwärtiger Ueberlegung besonders auch dienen, um zwei Punktreihen bezw. Strahlenbüschel mit gemeinsamem Träger und vorgeschriebener Anzahl selbstentsprechender Elemente herzustellen.

Aufgabe 203. Man zeichne je drei oder mehr beliebige Paare nicht zusammenfallender Elemente zweier gleichlaufenden Punktreihen bezw. Strahlenbüschel mit gemeinsamem Träger, so dass diese Gebilde bei vollständiger Zeichnung

a) kein,

b) ein,

c) zwei Paare selbstentsprechender Elemente erhalten müssen.

Andeutung. Man vergleiche die vorige Erkl. 327 und Erkl. 279 und 284 des I. Teils.

Erkl. 328. Bei Gebilden mit entgegengesetzter Umlaufsrichtung ist überhaupt nur der dritte Fall möglich, für diesen aber können drei beliebige Elementenpaare völlig willkürlich gewählt werden.

Aufgabe 204. Welche Angaben über Gleichheit und Vielfachheit von Kurven ergeben sich aus den Sätzen 17?

Auflösung. Man erhält folgende Aufstellungen:

1. Zwei Kurven zweiter Klasse fallen vollständig zusammen, wenn sie gemeinsam haben entweder fünf Tangenten, oder vier Tangenten und den Berührungspunkt auf einer derselben, oder drei Tangenten und die Berührungspunkte auf zweien derselben.

2. Es gibt einfach unendlich viele Kurven zweiter Klasse, welche gemeinsam haben entweder vier Tangenten, oder drei Tangenten und den Berührungspunkt auf einer derselben (oder zwei Tangenten nebst deren beiden Berührungspunkten). Eine derartige einfach unendliche Mannigfaltigkeit heisst eine Schar von Kurven zweiter Klasse.

3. Es gibt eine doppelt unendliche Mannigfaltigkeit („Scharschar bezw. Gewebe“) von Kurven zweiter Klasse, welche gemeinsam haben drei Tangenten oder zwei Tangenten und den Berührungspunkt auf einer derselben.

4. Es gibt eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Kurven zweiter Klasse, welche gemeinsam haben zwei Tangenten oder eine Tangente mit ihrem Berührungspunkte.

5. Es gibt eine vierfach unendliche Mannigfaltigkeit von Kurven zweiter Klasse, welche eine feste Tangente gemeinsam haben.

6. Es gibt in der Ebene überhaupt eine fünffach unendliche Mannigfaltigkeit von Kurven zweiter Klasse.

1. Zwei Kurven zweiter Ordnung fallen vollständig zusammen, wenn sie gemeinsam haben entweder fünf Kurvenpunkte, oder vier Kurvenpunkte und die Tangente in einem derselben, oder drei Kurvenpunkte und die Tangenten in zweien derselben.

2. Es gibt einfach unendlich viele Kurven zweiter Ordnung, welche gemeinsam haben entweder vier Kurvenpunkte, oder drei Kurvenpunkte und die Tangente in einem derselben (oder zwei Kurvenpunkte nebst deren beiden Tangenten). Eine derartige einfach unendliche Mannigfaltigkeit heisst ein Büschel von Kurven zweiter Ordnung.

3. Es gibt eine doppelt unendliche Mannigfaltigkeit („Netz“) von Kurven zweiter Ordnung, welche gemeinsam haben drei Kurvenpunkte oder zwei Kurvenpunkte und die Tangente in einem derselben.

4. Es gibt eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Kurven zweiter Ordnung, welche gemeinsam haben zwei Kurvenpunkte oder einen Kurvenpunkt mit seiner Tangente.

5. Es gibt eine vierfach unendliche Mannigfaltigkeit von Kurven zweiter Ordnung, welche einen festen Kurvenpunkt gemeinsam haben.

6. Es gibt in der Ebene überhaupt eine fünffach unendliche Mannigfaltigkeit von Kurven zweiten Grades.

Erkl. 329. In den zwei ersten Sätzen obenstehender Auflösung kann bei verschiebbar gedachten Kurven an Stelle des Ausdrucks „wenn sie gemeinsam haben ⋯“ auch gesetzt werden „wenn sie aufeinandergelegt werden können mit ⋯“ — Die Richtigkeit der Sätze kann mittelbar auf die früher bewiesene Eindeutigkeit der Bestimmung durch fünf Elemente gestützt werden. Man kann aber auch direkt zwei der gemeinschaftlichen Elemente zu Trägern wählen und beweisen, dass zum ersten und gemeinschaftlichen erzeugenden Gebilde die beiden zunächst verschieden gedachten zweiten erzeugenden Gebilde zusammenfallen müssen, weil sie auf Grund der gegebenen gemeinsamen Kurvenelemente drei zusammenfallende Elemente besitzen. Da aber beide demselben dritten Elemente projektivisch sein müssen, so sind sie unter sich projektivisch, also wegen dreier gemeinsamen Elemente auch identisch. Folglich sind alle Kurvenelemente gemeinsam.

Erkl. 330. Aus der Planimetrie kennt man Kreisschar bezw. Kreisbüschel als Gesamtheit der zwei feste Tangenten berührenden bezw. durch zwei feste Punkte gehenden Kreise, während hier vier feste Elemente aufgestellt sind. Das rührt daher, dass der Kreis eine ganz besondere Art von Kurven zweiten Grades ist, bei dem zwei Elemente von ganz besonderer Art (zwei unendlich ferne und konjugiert imaginäre Punkte) festgelegt sind.

Erkl. 331. Unter der Gesamtheit aller Kurven einer Schar kann man auf zwei verschiedene Arten eine einzelne bestimmen:

1. Jede der Kurven der Schar hat auf einer der vier festen Tangenten einen bestimmten

Unter der Gesamtheit aller Kurven eines Büschels kann man auf zwei verschiedene Arten eine einzelne bestimmen:

1. Jede der Kurven des Büschels hat in einem der vier festen Kurvenpunkte eine be-

Berührungspunkt: die Schar enthält so viele Kurven, als auf der Tangente Berührungspunkte liegen, und durch jeden Berührungspunkt ist eine bestimmte Kurve in der Schar festgelegt, und umgekehrt.

2. Jede Kurve der Schar ist nach Satz 2 der Auflösung von Aufgabe 200 geometrischer Ort für das Auftreten eines bestimmten Doppelverhältnisses: die Schar enthält so viele Kurven, als das Doppelverhältnis Werte annehmen kann; und durch jeden Wert des Doppelverhältnisses ist eine bestimmte Kurve in der Schar festgelegt und umgekehrt.

stimmte Tangente: der Büschel enthält so viele Kurven, als durch den Punkt Tangenten gehen, und durch jede Tangente ist eine bestimmte Kurve in dem Büschel festgelegt, und umgekehrt.

2. Jede Kurve des Büschels ist nach Satz 2a der Auflösung von Aufgabe 200 geometrischer Ort für das Auftreten eines bestimmten Doppelverhältnisses: der Büschel enthält so viele Kurven, als das Doppelverhältnis Werte annehmen kann; und durch jeden Wert des Doppelverhältnisses ist eine bestimmte Kurve im Büschel festgelegt und umgekehrt.

Erkl. 332. Man erkennt, dass die Benennungen Schar bezw. Büschel insbesondere die Bestimmung der Kurven durch feste Tangenten bezw. durch feste Kurvenpunkte bezeichnen. Auch für die höheren Mannigfaltigkeiten sind in der Geometrie Benennungen vorzufinden, wie Scharschar oder Gewebe, Netz, Bündel, System, Gebüsch, Raum. Jedoch pflegt man diese Namen nur je für eine ganz besondere Bestimmungsweise solcher Mannigfaltigkeiten anzuwenden.

Erkl. 333. Da eine Kurve durch fünf Elemente bestimmt ist, und nach Festlegung von vieren die Auswahl des fünften noch unter doppelt unendlich vielen Elementen der Ebene offen steht, so könnte man glauben, dass auch Schar und Büschel doppelt unendliche Mannigfaltigkeiten sein müssten. Aber dieselbe Kurve, welche durch ein beliebiges fünftes Element bestimmt wird, wird auch bestimmt durch diejenigen unendlich vielen Elemente als fünfte, welche der so gewählten Kurve angehören. Und so geben von den ∞^2 fünften Elementen der Ebene je ∞^1 derselben Kurve Entstehung, so dass thatsächlich nur ∞^1 verschiedene Kurven entstehen können, wenn das fünfte Element alle ∞^2 zur Auswahl stehenden Elemente der Ebene durchläuft.

---

4. Aufgaben über die drei verschiedenen Gattungen der Kurven zweiten Grades.

(Zu Abschnitt 4a.)

Aufgabe 205. Man soll bei einer durch projektivische Punktreihen erzeugten Kurve aus den gegebenen Stücken entscheiden, welche Kurvengattung entsteht.

Erkl. 334. Da jede Tangente einer Kurve auch als Träger angesehen werden kann, so gelten die nebenstehenden Ausführungen nicht nur für parallele Träger, sondern auch für parallele Tangenten überhaupt. Da solche einander auf der unendlich fernen Geraden schneiden, so ist im Innern des Parallelstreifens nur ein einziger unendlich ferner Punkt anzunehmen, nämlich der Schnittpunkt der beiden Tangenten, und dies muss jedenfalls ein Punkt ausserhalb der Kurve sein. Eine zwischen parallelen Tangenten liegende Kurve hat also jedenfalls keinen unendlich fernen Punkt und ist Ellipse. Eine ausserhalb der parallelen Tangenten liegende Kurve ist ebenso sicher Hyperbel, da ja eine Parabel überhaupt keine parallelen Tangenten zulässt.

Erkl. 335. In Figur 102a bilden die Kurventangenten A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 (letztere gleich t_2) auf t_1 und auf F_1F_2 zwei Punktreihen $A_1B_1D_1C_1$ und $A'B'D'C'$, wobei von diesen Punktfolgen die erstere von links nach rechts, letztere von rechts nach links ihren Träger

Auflösung. 1. Für den besonderen Fall paralleler Träger ist diese Aufgabe bereits entschieden in Auflösung der Aufgabe 148 und Erklärung 303. Sind nämlich die beiden Punktreihen ungleichlaufend parallel, so liegt die Kurve innerhalb des Parallelstreifens, muss also Ellipse sein, da sie sich nicht ins Unendliche erstrecken kann. Sind aber die Punktreihen gleichlaufend parallel, so liegt die Kurve ausserhalb des Parallelstreifens, muss also Hyperbel sein, da sie ja durch den Streifen in zwei getrennte Aeste geteilt wird.

2. Um den allgemeinen Fall der Aufgabe auf vorigen besonderen zurückzuführen, braucht man bloss zu einem der Träger die parallele Tangente zu suchen, d. h. zu t_1 die parallele Gerade F_1F_2 nach der Konstruktion der Antwort auf Frage 28. Dieselben Tangenten der Kurve, welche auf t_1 die eine Punktreihe ausschneiden, bilden auf F_1F_2 eine zweite Punktreihe. Und wenn diese mit t_1 ungleichlaufend oder gleichlaufend wird, so ist die erzeugte Kurve

durchläuft. Folglich liegt die Kurve innerhalb des Parallelstreifens und ist Ellipse. — In Figur 102b bilden dieselben Kurventangenten auf t_1 und auf F_1F_2 dieselben Punktreihen $A_1B_1D_1C_1$ und $A'B'D'C'$, welche beide ihren Träger in gleicher Richtung von links nach rechts durchlaufen. Folglich liegt die Kurve hier ausserhalb des Parallelstreifens und ist Hyperbel.

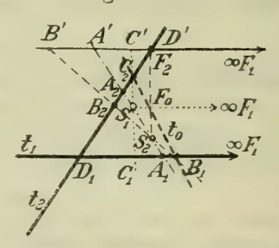
Erkl. 336. Figur 102 gibt die Konstruktion für den Fall von fünf gegebenen Tangenten. Ist auf einem Träger ein Berührungspunkt gegeben, so wird die Sache noch einfacher, wenn man zum andern Träger (als t_1) die parallele Tangente zeichnet. Je nachdem dann der Berührungspunkt innerhalb oder ausserhalb des Parallelstreifens fällt, werden die Punktreihen auf t_1 und F_1F_2 ungleich oder gleich gerichtet parallel und die Kurve Ellipse oder Hyperbel. Zieht man auch noch zum Träger t_2 die parallele Tangente, oder sind beide Berührungspunkte bekannt, so muss die Lage des Berührungspunktes als zugeordneten zum Schnittpunkt der parallelen Tangenten sich dem zuvor schon festgelegten Ergebnis anschliessen. Man kann daher den Satz aussprechen:

> **Satz.** Eine Klassenkurve wird Ellipse bezw. Hyperbel, wenn auf einem (und folglich auf beiden) Trägern der Berührungspunkt innerhalb bezw. ausserhalb der Strecke vom Trägerschnittpunkt zum Fluchtpunkt fällt, — Parabel, wenn die Fluchtpunkte ins Unendliche fallen.

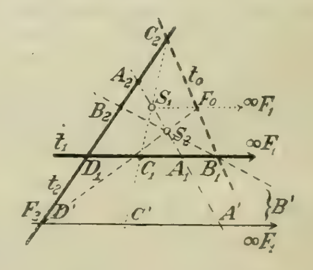
Erkl. 337. Auf Grund der vorigen Angaben erhält man die verlangte Unterscheidung durch eine einzige Konstruktion zu beliebig gegebenen fünf Bestimmungsstücken. Auch diese Konstruktion wird in besonderen Fällen entbehrlich. Hat man etwa zwei gegebene Berührungspunkte auf verschiedenen Seiten einer gegebenen Tangente (z. B. bei einem Tangentendreiseit einen Berührungspunkt innerhalb und einen ausserhalb einer Seitenstrecke) so kann nur Hyperbel entstehen, da ja die Kurve die Tangente nicht etwa überschreiten darf, um vom einen Punkte zum andern zu gelangen. Dasselbe gilt, wenn zu vier gegebenen Tangenten ein Berührungspunkt oder eine fünfte Tangente hinzukommt, die ganz ausserhalb des entstehenden konvexen Vierecks liegen, oder eine fünfte Tangente, die zwei Gegenseiten desselben innen trifft. Denn ob die Kurve diese Tangente von der einen oder andern Seite berührt, so bleibt immer auf der entgegengesetzten Seite noch eine Tangente zu berühren, an welche die Kurve nur mittels eines zweiten Astes herankommen kann. (Der letztere Umstand ist besonders zu beachten, wenn man durch sogen. Augenmass die Lage der Kurve ohne die obige Hilfskonstruktion erraten will.) Dagegen wird bei gegebenem Dreiseit mit zwei innern, Vierseit mit einem innern, oder bei konvexem Fünfseit jedesmal Ellipse entstehen müssen, Ellipse oder Hyperbel. — Parabel würde die Kurve, wenn F_2 selbst ins Unendliche fiele, also $S_2F_2 \parallel t_2$ würde.

3. Besonders erleichtert wird diese Unterscheidung in dem Falle, wo unter den gegebenen Stücken schon parallele Tangenten sich befinden, oder wenn gar etwa ein Parallelogramm von Tangenten vorhanden bezw. aufgefunden ist. Denn ohne jede weitere Konstruktion erkennt man dabei die entsprechenden Richtungen der parallelen Punktreihen. Man erkennt ferner, dass wenn einer der Berührungspunkte auf der Innenseite einer Parallelogrammseite liegt, dann die Kurve ganz innerhalb des andern Parallelstreifens liegen muss, also auch Kurve und sämtliche Berührungspunkte innerhalb des Parallelogramms, dass folglich eine Ellipse entstehen muss. Liegt dagegen einer der Berührungspunkte auf der Verlängerung einer Parallelogrammseite, so liegt die Kurve ganz ausserhalb des andern Parallelstreifens, also auch Kurve und sämtliche Berührungspunkte ausserhalb des Parallelogramms: es entsteht eine Hyperbel.

Figur 102a.



Figur 102b.



wie durch Anwendung der Figur 102a bezw. Figur 27 allgemein bewiesen wird.

Erkl. 338. Die vorstehenden Erörterungen lassen an den Aufgabengruppen von 88 bis 147 des vorigen Abschnitts in vielen Fällen die Gattung der Kurve sofort aus der Aufgabenstellung erkennen. Jedenfalls genügt für die Klassenkurve stets die Konstruktion eines einzigen Elements zur endgiltigen Feststellung.

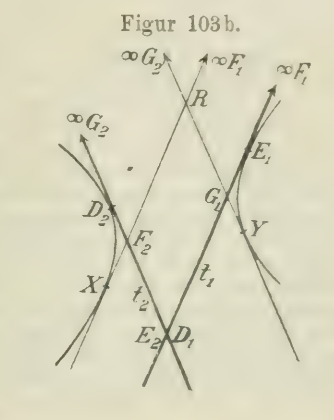
Figur 103a.

Erkl. 339. Da nach Antwort 1 auf Frage 37 unter den Berührungspunkten $E_1 D_2$ und XY sowohl in Figur 103a als 103b die merkwürdige Beziehung besteht, dass $D_2 E_1 \parallel XY \parallel G_1 F_2$ und ebenso $D_2 X \parallel E_1 Y \parallel D_1 R$, so kann man aus einem der Berührungspunkte auf dem einen Träger leicht den Berührungspunkt auf dem andern und auch die Berührungspunkte auf den durch die Fluchtpunkte gehenden Parallelen $F_1 F_2$ und $G_1 G_2$ finden. Kennt man nämlich als ersten etwa E_1, so entsteht D_2 durch die Parallele zu $G_1 F_2$ und dann X entweder mittels der Parallelen zu $D_1 R$ durch D_2 oder mittels der Transversalen von E_1 durch den Schnittpunkt von $G_1 F_2$ und $D_1 R$; ebenso entsteht endlich Y entweder mittels der Parallelen zu $D_1 R$ durch E_1 oder mittels der Parallelen zu $G_1 F_2$ durch X oder mittels der Transversalen von D_2 durch den Schnittpunkt von $G_1 F_2$ und $D_1 R$. Man erhält also schon an dieser Stelle die für später zu verwendenden Sätze:

Satz. Die vier Berührungspunkte auf den Seiten eines um- oder angeschriebenen — und die vier Tangenten in den Ecken eines eingeschriebenen Parallelogramms einer Kurve zweiten Grades bilden beidemale ein Parallelogramm mit gemeinsamem Mittelpunkt, wobei je die Seiten des einen parallel sind den Diagonalen des andern.

Man beachte auch die Gültigkeit desselben Satzes für den Kreis, der in der Planimetrie auf ziemlich früher Stufe nachgewiesen wird.

Figur 103b.



Aufgabe 206. Man gehe die Aufgaben 88 bis 147 darauf durch, welche Kurvengattung entstehen muss.

Aufgabe 207. Man soll bei einer durch projektivische Strahlenbüschel erzeugten Kurve aus den gegebenen Stücken entscheiden, welche Kurvengattung entsteht.

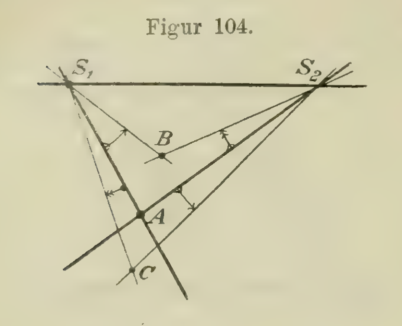
Auflösung. 1. Sind die projektivischen Strahlenbüschel von entgegengesetzter Umlaufsrichtung, so kann keine andere Kurve entstehen, als eine Hyperbel, und zwar mit den Scheitelpunkten auf getrennten Aesten. Denn beim Umlauf der beiden Büschel muss es sicher zweimal vorkommen, dass entsprechende Strahlen parallel laufen.

Der Fall einer Hyperbel, und zwar mit Scheiteln auf gleichem oder ungleichem Aste, tritt jedenfalls dann ein, wenn zu drei gegebenen Kurvenpunkten ein vierter solche Lage besitzt, dass er im Innenraum oder in

Erkl. 340. In Figur 74 des I. Teiles sind die vier Beispiele für Strahlenbüschel gezeigt bei gemeinsamem Scheitel. Wie bei zwei Büscheln von entgegengesetzter Umlaufsrichtung die zugeordneten Strahlen konzentrischer Büschel zweimal übereinander weggehen müssen, so werden bei getrennten Scheiteln die Strahlen zweimal parallel. Will man die Darstellung auf

Punktreihen übertragen, so projiziert man am besten beide Büschel auf die unendlich ferne Gerade.

Figur 104.



Erkl. 341. In Figur 104 möge (abgesehen vom etwaigen Vorhandensein paralleler Strahlenpaare) zu den drei Punkten $S_1 S_2 A$ hinzukommen entweder B oder C. Dann ist für jeden Punkt B im Innenraum des Dreiecks $A S_1 S_2$ der Winkel $A S_1 B$ gegen, aber Winkel $A S_2 B$ mit dem Uhrzeiger gemessen; und ebenso für jeden Punkt C im Scheitelwinkelraum $A S_1 C$ mit, $A S_2 C$ gegen den Uhrzeiger. Nur für Punkte in den Aussenwinkelräumen an den Dreieckseiten entstehen gleichlaufende Büschel. Es mögen nun fünf Punkte oder vier mit einer Tangente gegeben sein, und für einen der Punkte gegenüber drei andern die vorliegende Lagebeziehung bestehen, so kann man stets zwei von den drei Punkten dieses Dreiecks als Scheitel wählen und so die Entscheidung nach Figur 104 erhalten. — Die im zweiten Teil nebenstehender Auflösung angegebenen Fälle sind beide ganz ohne Rücksicht auf gleiche oder ungleiche Umlaufsrichtung der Büschel aufzufassen.

Erkl. 342. Ist ein unendlich ferner Kurvenpunkt gegeben, so führen dahin aus jedem andern Scheitelpaar zwei Parallelstrahlen. Alle Parallelen zu diesen beiden, darunter auch die unendlich ferne Gerade selber, sind als Tangenten in dem unendlich fernen Punkte möglich. Jene einzige von ihnen erzeugt eine Parabel, jede andere eine Hyperbel. Es wäre daher keine allgemeine Wahl der Elemente, wenn die übrigen gerade so angesetzt würden, dass diese bestimmte einzige als Tangente entstehen müsste. Ausser in besondern Fällen wird folglich stets Hyperbel anzunehmen sein.

Erkl. 343. Dass die fünf Punkte der Figur 105a nur eine Ellipse geben können, schliesst das Auge daraus, dass für eine durch irgend drei derselben gehende Kurve behufs Erreichung der zwei übrigen eine solche Wölbung nach innen notwendig wird, wie eine Hyperbel sie nicht besitzen kann. Dass fünf Punkte wie in Figur 105b eine Hyperbel liefern werden, schliesst man umgekehrt aus der Schlankheit der Wölbung. Aber eine sehr grosse Ellipse

einem Scheitelwinkelraum des von jenen drei Punkten gebildeten Dreiecks liegt. (Figur 104).

2. Ausserdem ist die Entstehung einer Hyperbel dann sichergestellt, wenn (abgesehen von den Strahlenbüscheln) eine gegebene Tangente zu zwei gegebenen Kurvenpunkten solche Lage hat, dass sie zwischen den Punkten hindurchgeht. Denn nur eine Hyperbel besitzt auf getrennten Aesten Punkte einerseits und anderseits einer Tangente. — Derselbe Fall einer Hyperbel tritt auch immer dann ein, wenn zwei verschiedene unendlich ferne Punkte als Kurvenpunkte vorgegeben sind: dieselben bilden die Berührungspunkte der Asymptoten.

3. Sind die projektivischen Strahlenbüschel von gleicher Umlaufsrichtung, so ist zu unterscheiden, ob von den Strahlen der gegebenen Büschel zweimal oder einmal oder keinmal zugeordnete Strahlenpaare parallel werden.

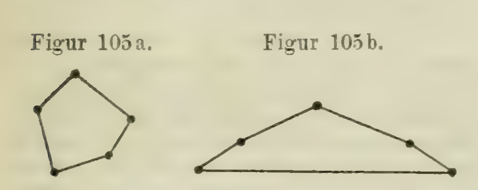
a) Im ersten Fall entsteht sicher eine Hyperbel mit Scheiteln auf gleichem Aste.

b) Im zweiten Falle entscheidet die Tangente in diesem unendlich fernen Punkte zwischen Parabel und Hyperbel. Fällt sie mit der unendlich fernen Geraden zusammen, so entsteht eine Parabel; wenn nicht, so gibt es ausser dem gegebenen Paar Parallelstrahlen noch ein zweites Paar, und es entsteht eine Hyperbel. — Der erste Fall tritt im allgemeinen nur dann ein, wenn der unendlich ferne Kurvenpunkt nebst unendlich ferner Tangente von vorn herein gegeben war; der letztere sicher dann, wenn der unendlich ferne Punkt mit einer durchs Endliche gehenden Tangente vorgegeben ist. Ist der unendlich ferne Punkt ohne Tangente gegeben, so wähle man ihn als Scheitel, konstruiere so seine Tangente und führe dadurch die Entscheidung herbei.

c) Sind keine zugeordneten Parallelstrahlen gegeben, so reichen die Mittel der bisherigen Abschnitte nicht aus, um allgemein gültige Entscheidungen herbeizuführen zwischen Ellipse und Hyperbel. Man wird zwar mit Sicherheit auf eine Ellipse schliessen bei einem gegebenen eingeschriebenen Fünfeck wie Figur 105a, schon weniger sicher auf eine Hyperbel bei einem Fünfeck wie Figur 105b; dagegen bei einem Fünfeck aus fünf Punkten der Figur 105c muss die sichere Entscheidung späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben, wenn man nicht durch Konstruktion von Tangenten auf die Klassenkurve übergehen will.

zeigt an ihren beiden Breitseiten ebenfalls sehr geringe Wölbung. Und bei fünf Punkten aus Figur 105c ist das sogenannte Erraten nach Augenmass eine Unmöglichkeit. Die Punkte *ABDCEH* liegen nämlich auf einer Parabel. Rückt man aber zu vier festen derselben den fünften nur unmerklich wenig nach aussen bezw. nach innen, so verändert sich sofort die Kurve zu einer Ellipse bezw. Hyperbel. Sichere Mittel zur Unterscheidung auch solcher Fälle liefert der Entwicklungsgang im folgenden III. Bande dieses Lehrbuches.

Figur 105a. Figur 105b.



Figur 105c.

Aufgabe 208. Man gehe die Aufgaben 154 bis 198 darauf durch, welche Kurvengattung entstehen muss.

Aufgabe 209. Man soll für die drei Kurvengattungen die besonderen Bestimmungsstücke aufstellen.

Erkl. 344. Jede der fünf ersten allgemeinen Bestimmungsarten liefert eine besondere Bestimmung für die Parabel, indem man für eine der unter den Bestimmungsstücken vorkommenden Tangenten die unendlich ferne Gerade setzt. Kommt nämlich unter den fünf Bestimmungsstücken überhaupt keine oder eine oder zweierlei Tangenten vor, so lassen sich auch keine oder eine oder zwei besondere Bestimmungsweisen für die Parabel daraus ableiten, indem man die unendlich ferne Gerade an Stelle der in verschiedener Bedeutung auftretenden Tangenten setzt. Bei der ersten, vierten und fünften Gruppe tritt nur eine einzige Auffassungsweise der Tangente hervor, denn bei der ersten hat man fünf gleichwertige Tangenten ohne Berührungspunkt, bei der fünften und vierten nur eine bezw. zwei gleichwertige Tangenten mit Berührungspunkt. Bei der zweiten und dritten Gruppe dagegen hat man die Auswahl, ob man die unendlich ferne Gerade setzen will an Stelle der Tangente ohne oder einer der Tangenten mit Berührungspunkt.

Erkl. 345. Aus der sechsten Gruppe mit fünf Punkten lässt sich keine besondere Bestimmung für die Parabel ableiten, weil keine Tangente dabei auftritt. Dies ist dieselbe Erscheinung, wie in der Planimetrie z. B. bei der Aehnlichkeitslehre kein besonderer Aehnlichkeitssatz für rechtwinklige Dreiecke aus dem ersten, für gleichschenklige Dreiecke aus dem vierten der allgemeinen Aehnlichkeitssätze her-

Auflösung. 1. Wenn man die sechs allgemeinen Bestimmungsarten der Kurven

$$TTTTT,\ TTT(TP),\ T(TP)(TP),$$
$$(TP)(TP)P,\ (TP)PPP,\ PPPPP$$

für die drei einzelnen Kurvengattungen nach ihren besonderen Merkmalen durchgeht, so ergibt sich für die Ellipse keinerlei neue Darstellung, es sei denn die negative Feststellung, dass jedenfalls keines der Elemente P oder T im Unendlichen liegen darf.

2. Dagegen erfahren die obigen Bestimmungsstücke mehrfache Abänderung für die Parabel, weil durch den Namen der Parabel allein schon die unendlich ferne Gerade als Tangente festgelegt ist. Es bleiben daher für eine Parabel als Bestimmungstücke noch:

wegen $TTTTT$
vier Tangenten (dazu T_5 unendlich fern);

wegen $TTT(TP)$,
drei Tangenten und auf einer derselben der Berührungspunkt (dazu $T_4 \infty$),
drei Tangenten und der unendlich ferne Punkt der Kurve (letzterer als Berührungspunkt auf $T_4 \infty$);

wegen $T(TP)(TP)$
zwei Tangenten nebst ihren beiden Berührungspunkten (dazu $T_3 \infty$),
zwei Tangenten nebst dem Berührungspunkt auf einer derselben und der unend-

vorgeht, weil der erste keinen Winkel, der letzte kein Seitenverhältnis enthält (vergleiche Kleyer-Sachs, Lehrbuch der Ebenen Elementar-Geometrie, VII. Teil, Satz 10 und 11 und Erkl. 74). — Hieraus geht auch weiter hervor, dass es durchaus unzulässig wäre, eine Parabel bestimmen zu wollen durch fünf willkürliche Punkte oder durch fünf willkürliche Tangenten. Denn da eine Parabel durch vier willkürliche Elemente schon bestimmt ist, so kann das fünfte Element nicht mehr beliebig ausgewählt werden.

Erkl. 346. Entsprechend der Auflösung der Aufgabe 204 für allgemeine Kurven erhält man für die Parabel im besondern ganz andere Beziehungen für Eindeutigkeit bezw. Vielfachheit: nämlich Identität bei Gemeinsamkeit zweier Gruppen von Elementen nach nebenstehender Zusammenstellung, und Vielfachheit bei deren Beschränkung. So erhält man einfach unendlich viele Parabeln, welche gemeinsam haben drei Tangenten, oder zwei Tangenten und den Berührungspunkt auf einer derselben, oder zwei Kurvenpunkte und die Tangente in einem derselben, oder drei Kurvenpunkte u. s. w. — In der Ebene überhaupt gibt es eine vierfach unendliche Mannigfaltigkeit von Parabeln.

Erkl. 347. Infolge der untrennbaren Zusammengehörigkeit der unendlich fernen Tangente mit dem Begriff der Parabel leuchtet ein, dass die Parabel geeigneter erscheint zur Behandlung als Klassenkurve, wie als Ordnungskurve. Demgegenüber sind die ausgezeichneten Elemente einer Hyperbel ihre zwei unendlich fernen Punkte, so dass die Hyperbel der Behandlungsweise als Ordnungskurve zugänglicher ist. Die Ellipse dagegen steht völlig in der Mitte, indem sie keinerlei derartige ausgezeichneten Elemente aufweist und dadurch weder nach der einen noch nach der andern Seite der Behandlung hinneigt.

Erkl. 348. Für die Hyperbel kann eine Asymptote auftreten in jeder der allgemeinen Gruppen, welche ein- oder zweimal das Paar *(PT)* enthält, also einmal in der zweiten und fünften, einmal oder zweimal in der dritten und vierten. Und ferner kann man bei allen Bestimmungen der Hyperbel, wo ein unendlich ferner Punkt auftritt, statt dessen einsetzen den Ausdruck „Richtung einer Asymptote“. Denn die Asymptote berührt die Kurve in diesen unendlich fernen Punkten, also muss die Asymptote einer der Strahlen desjenigen Parallelstrahlenbüschels sein, welcher jenen unendlich fernen Punkt zum Scheitel hat.

lich ferne Kurvenpunkt (letzterer als Berührungspunkt auf $T_3\infty$);

wegen $(TP)(TP)P$

zwei Kurvenpunkte im Endlichen nebst der Tangente durch einen derselben und der unendlich ferne Kurvenpunkt (letzterer als Berührungspunkt auf $T_2\infty$);

wegen $(TP)PPP$

vier Kurvenpunkte, wovon einer im Unendlichen liegt (letzterer als Berührungspunkt auf $T\infty$).

3. Für die Hyperbel treten nicht in solcher Weise neue Bestimmungsarten auf wie für die Parabel. Auf sie kommen alle diejenigen Fälle der allgemeinen Bestimmungen heraus, die einen oder zwei unendlich ferne Kurvenpunkte vorschreiben. Ausserdem erhält man besondere Ausdrucksweise für solche Bestimmungen, wo eine Tangente mit unendlich fernem Berührungspunkt auftritt, indem dieses Elementepaar unter dem Namen Asymptote zusammengefasst wird. So lassen sich in besonderem Wortlaut als Bestimmungsweisen der Hyperbel wiedergeben:

wegen $TTT(TP)$

drei Tangenten und eine Asymptote [letztere als $(TP\infty)$];

wegen $T(TP)(TP)$

zwei Tangenten nebst dem Berührungspunkt auf der einen und eine Asymptote [letztere als $(TP\infty)$],

eine Tangente und die zwei Asymptoten [jede der letzteren als $(TP\infty)$];

wegen $(TP)(TP)P$

zwei Kurvenpunkte nebst der Tangente im einen und eine Asymptote [letztere als $(TP\infty)$],

ein Kurvenpunkt und die zwei Asymptoten [jede der letzteren als $(TP\infty)$];

wegen $(TP)PPP$

drei Kurvenpunkte und eine Asymptote [letztere als $(TP\infty)$].

Ausserdem kann jeder einzelne unendlich ferne Kurvenpunkt als eine der zwei Asymptotenrichtungen aufgefasst werden.

Erkl. 349. Eine Beschränkung der Vielfachheit, wie für die Parabel nach Erkl. 346, tritt für Hyperbel und Ellipse nicht auf. Vielmehr erscheint die Parabel bei jenen Mannigfaltigkeiten von Kurven zweiten Grades jeweils als einmal auftretende Grenzkurve zwischen einer unendlichen Anzahl von Ellipsen und einer unendlichen Anzahl von Hyperbeln. Betrachtet man z. B. die Kurvenschar, welche bestimmt ist durch vier gemeinsame Tangenten, und nimmt man eine beliebige fünfte Tangente hinzu, so ist eine bestimmte Kurve der Schar festgelegt. Verschiebt man nun etwa diese fünfte Tangente sich selbst parallel in jede mögliche Lage, so entsteht

der Reihe nach jede Kurve der Schar. Unter den parallelen Lagen der veränderlichen Tangente befindet sich aber auch die unendlich ferne Gerade, und wenn die Tangente diese Lage einnimmt, entsteht sicherlich eine Parabel: die einzige, welche in der Kurvenschar enthalten ist. Bei den andern Lagen der veränderlichen fünften Tangente entstehen einerseits Ellipsen, andererseits Hyperbeln, beide in einfach unendlicher Anzahl, getrennt durch die eine Parabel. Die gleiche Ueberlegungsweise zeigt, dass in einem Kurvenbüschel ein unendliches Gebiet von Ellipsen und ein unendliches Gebiet von Hyperbeln enthalten sein wird, beide Gebiete getrennt durch eine einzelne Parabel dieses Kurvenbüschels.

Aufgabe 210. Man soll an eine durch vier Bestimmungsstücke gegebene Parabel eine Tangente legen parallel einer gegebenen Geraden.

Erkl. 350. Die Beziehung der Parabel zur unendlich fernen Geraden als einer Tangente macht die vorliegende Aufgabe für die Parabel konstruierbar, während sie für Ellipse bezw. Hyperbel nicht an dieser Stelle lösbar ist; denn für diese ist die unendlich ferne Gerade ganz ausserhalb bezw. eine Sekante. Für die allgemeine Lösung der Aufgabe bedarf es weiterer Hilfsmittel, welche erst auf späterer Stufe erhalten werden (vgl. den folgenden Band dieses Lehrbuchs).

Erkl. 351. Die für die Parabel lineare Konstruktion ist in der Weise auszuführen, dass man die unendlich ferne Tangente zum einen Träger macht, zu ihrem Schnittpunkt P_1 mit der gegebenen Geraden den zugeordneten Punkt P_2 auf t_2 konstruiert und $P_1 P_2$ verbindet, bezw. durch den gefundenen Punkt P_2 die Parallele nach P_1 zieht.

Auflösung. Da zu den vier Bestimmungsstücken der Parabel jedenfalls die unendlich ferne Tangente als fünftes Stück hinzukommt, und die beiden verlangten parallelen Geraden einander im gleichen Punkte dieser unendlich fernen Tangente schneiden, so ist die Aufgabe dieselbe, als ob eine zweite Tangente gesucht würde durch einen gegebenen Punkt auf einer gegebenen ersten Tangente. Diese Konstruktion erfolgt nach Antwort auf Frage 28, 6 für die Klassenkurve. Zu ihrer Ausführbarkeit bedarf es also der Kenntnis von mindestens zwei Tangenten (ausser der unendlich fernen). Sind daher unter den gegebenen vier Bestimmungsstücken weniger als zwei Tangenten, so müsste man erst in den gegebenen Kurvenpunkten die genügende Anzahl von Tangenten konstruieren. (Vergl. Aufgabe 295.)

Aufgabe 211 bis 217. Man soll weitere Kurvenelemente einer Parabel konstruieren, wenn von derselben gegeben sind:

1. Vier Tangenten . . . . 211.
2. Drei Tangenten und auf einer derselben der Berührungspunkt . . . 212.
3. Zwei Tangenten und auf beiden der Berührungspunkt . . . . 213.
4. bis 7. Der unendlich ferne Kurvenpunkt, sowie
   4. drei Tangenten 214,
   5. zwei Tangenten und auf einer der Berührungspunkt . . . 215,
   6. zwei Kurvenpunkte und in einem die Tangente . . . 216,
   7. drei Kurvenpunkte . . . . 217.

Auflösung. Die Konstruktion geschieht auf Grund der Erörterungen in Auflösung der Aufgabe 209; und zwar entsteht die Parabel bei den Aufgaben 211 bis 215 als Klassenkurve und nur bei 216 und 217 als Ordnungskurve. Denn durch Hinzunahme der unendlich fernen Tangente sind in den fünf erstgenannten Aufgaben unter den gegebenen Stücken stets Tangenten in Ueberzahl, nur bei 216 bezw. 217 sind es drei Punkte und Tangenten in zweien, bezw. vier Punkte und Tangente in einem.

Als Träger der Punktreihen kann man in Aufgabe 211 bis 215 immer zwei durchs Endliche verlaufende Gerade nehmen, bei 214 und 215 eine von diesen und die ununendlich ferne; als Scheitel der Strahlenbüschel bei 216 und 217 stets einen der Punkte im Endlichen und dazu den unendlich fernen. Man vergleiche auch die teilweise identischen Aufgaben 98 ff., 112 ff., 119 ff., 170 u. s. w.

Aufgabe 218 bis 220. Eine Parabel anzuschreiben:

1. Einem gegebenen Viereck . . . **218.**
2. Einem gegebenen Dreieck mit gegebenem Berührungspunkt auf einer Seite . . . . **219.**
3. Einem gegebenen Winkel mit gegebenen Berührungspunkten auf beiden Schenkeln . . . . **220.**

Erkl. 353. Das gegebene Viereck darf jedenfalls keine Parallelseiten haben, denn sonst wird die Parabel unmöglich, die ja keine parallelen Tangenten zulässt.

Erkl. 352. Eingeschrieben werden kann eine Parabel natürlich überhaupt keinem geschlossenen Vieleck; angeschrieben werden kann die Parabel nur einem einzigen der acht ins Unendliche verlaufenden Räume bezw. der vier durchs Unendliche hindurchgehenden Räume, welche durch vier Geraden gebildet werden (vgl. die Erörterungen über die Aussenräume in Erkl. 224 des I. Teiles dieses Lehrbuchs). Für eine umzuschreibende Parabel lassen sich hier aus Aufg. 214 bis 217 keine passenden Aufgaben bilden, bevor man für den unendlich fernen Kurvenpunkt eine geeignete andere Ausdrucksweise erhalten hat. Dies geschieht erst auf späterer Stufe, wo für die Richtung nach diesem Punkt der Name „Achsenrichtung der Parabel" auftritt.

Aufgabe 221 bis 233. Man soll weitere Kurvenelemente einer Hyperbel konstruieren, wenn von derselben folgende Bestimmungsstücke gegeben sind:

1. Die beiden Asymptoten und eine Tangente . . . . **221.**
2. Die beiden Asymptoten und ein Kurvenpunkt. . . . . **222.**
3. bis 6. Eine Asymptote, sowie ausserdem
   3. drei Tangenten **223,**
   4. zwei Tangenten und auf einer derselben der Berührungspunkt **224,**
   5. zwei Kurvenpunkte und in einem derselben die Tangente **225,**
   6. drei Kurvenpunkte . . . **226.**
7. 8. Die eine Asymptote und die Richtung der andern, sowie
   7. zwei Kurvenpunkte . . . **227,**
   8. ein Kurvenpunkt samt seiner Tangente . . . . **228.**
9. 10. Die Richtung der beiden Asymptoten, sowie
   9. drei Kurvenpunkte . . . **229,**
   10. zwei Kurvenpunkte und in einem derselben die Tangente **230.**
11. bis 13. Die Richtung der einen Asymptote, sowie
   11. vier Kurvenpunkte . . . **231,**
   12. drei Kurvenpunkte und in einem derselben die Tangente **232,**
   13. zwei Kurvenpunkte nebst ihren beiden Tangenten . **233.**

Auflösung. Die Lösung dieser Aufgaben erfolgt auf Grund der Erörterungen zu Aufgabe 209; und zwar entsteht die Hyperbel als Klassenkurve nur bei den Aufgaben 221, 223 und 224, dagegen in allen zehn andern Fällen als Ordnungskurve. (Vergl. die Aufgaben 211 bis 217 für die Parabel und Erklärung 347.) Denn da das Auftreten der Asymptotenrichtung einen im Unendlichen gegebenen Kurvenpunkt bedeutet, durch die Asymptote selbst auch noch die Tangente in diesem unendlich fernen Kurvenpunkt hinzukommt, so sind die zur Bestimmung der Kurve als Ordnungskurve führenden Elemente meist in Ueberzahl.

Als Träger der Punktreihen treten in den Aufgaben für die Tangentenkurve jedenfalls die gegebenen Asymptoten auf und dazu eine der andern Tangenten. Als Scheitel für die Strahlenbüschel bei der Ordnungskurve erscheinen bei gegebener Asymptote jedenfalls deren unendlich ferner Punkt und dazu einer der andern Punkte. Ist nur die Asymptotenrichtung gegeben, so kann man stets im Endlichen liegende Scheitelpunkte benützen. Man vergleiche auch die teilweise identischen Aufgaben 101 ff., 158 ff., 184 ff. u. s. w.

Erkl. 354. Zwischen Asymptotenrichtung allein und Asymptote selbst ist der gleiche Unterschied wie zwischen Kurvenpunkt allein und Punkt samt seiner Tangente. Die Asymptotenrichtung ist bestimmt durch eine beliebige der vielen zur Asymptote parallel laufenden

Geraden; um die Asymptote selbst zu finden, muss unter den sämtlichen Geraden dieses Parallelstrahlenbüschels diejenige einzige ausgesucht werden, welche im unendlich fernen Scheitel die Kurve berührt. Statt „Asymptotenrichtung“ könnte man also auch in der Aufgabestellung einsetzen „gegebene Parallele zur Asymptote“ oder „Bedingung, dass die Asymptote einer gegebenen Geraden parallel laufe.“ Da aber die Asymptotenrichtung stets einen im Unendlichen liegenden Kurvenpunkt ergibt, so kann dieselbe auch nur als Kurvenpunkt unter den Bestimmungsstücken auftreten, so dass eine Bestimmung der Hyperbel etwa durch die beiden Asymptotenrichtungen und drei gegebene Tangenten auf der vorliegenden Stufe der Entwicklungen ebensowenig möglich ist, wie durch zwei Kurvenpunkte und drei beliebige Tangenten.

Erkl. 355. Wenn bei den vorliegenden Aufgaben „weitere Kurvenelemente“ verlangt werden, so bedeutet das nach den früheren Erörterungen bei der Klassenkurve

1. Tangenten durch gegebene Punkte auf vorhandenen Tangenten und
2. Berührungspunkte auf vorhandenen Tangenten, — dagegen bei der Ordnungskurve
3. Kurvenpunkte auf gegebenen Geraden durch vorhandene Kurvenpunkte und
4. **Tangenten in vorhandenen Kurvenpunkten.**

Unter diesen allgemeinen Fällen sind folgende besondere Einzelheiten inbegriffen: Zum ersten gehört bei der Parabel die Aufsuchung paralleler Tangenten zu gegebener Richtung, zum zweiten ebenfalls bei der Parabel die Aufsuchung ihres unendlich fernen Punktes, zum dritten bei der Parabel die Aufsuchung des Kurvenschnittpunktes auf einer beliebigen Parallelen zur gegebenen Richtung nach dem unendlich fernen Punkte, ferner bei der Hyperbel die Aufsuchung des Kurvenschnittpunktes auf einer beliebigen Parallelen zu einer Asymptote (bezw. Asymptotenrichtung), sowie ebenfalls bei der Hyperbel die Aufsuchung der zweiten Asymptotenrichtung, wenn man von der ersten Asymptote auch nur die Richtung kennt. Denn die unendlich ferne Gerade ist eine Gerade durch den durch die erste Asymptotenrichtung gegebenen unendlich fernen Hyperbelpunkt, und auf dieser Geraden durch einen vorhandenen Kurvenpunkt kann man den zweiten Kurvenpunkt, d. h. den zweiten unendlich fernen Hyperbelpunkt oder die Richtung der zweiten Asymptote finden. Zum vierten der obigen Fälle endlich gehört bei der Hyperbel die Aufsuchung der Asymptote selbst, wenn bloss ihre Richtung gegeben ist, nämlich der Tangente im vorhandenen unendlichfernen Kurvenpunkt.

Es ist ersichtlich, dass man durch gesonderte Aufstellung der im vorigen aufgezählten Einzelforderungen die Aufgaben dieses Abschnittes über Parabel und Hyperbel noch sehr weit vermehren könnte, indem zu jeder Aufgabe über die Parabel und zu den meisten Aufgaben über die Hyperbel zwei bis drei neue Fassungen hinzutreten würden.

Aufgabe 234. Man soll auf Grund der vorigen Aufgaben für die Hyperbel analoge Aufgaben aufstellen und lösen, wie für die Parabel in den Aufgaben 218 bis 220.

Erkl. 356. Wie aus der vorigen Erkl. 355 hervorgeht, kann man z. B. bei der Hyperbel, sobald auch nur die Richtung der einen von beiden Asymptoten gegeben ist, beide Asymptoten vollständig konstruieren. Doch werden die Lösungen mit den bis hierher vorliegenden Konstruktionsmitteln manchmal ziemlich verwickelt werden. Denn einerseits wird schon bei Festhaltung der Kurvenerzeugung als Klassenkurve bezw. Ordnungskurve manchmal ein Wechsel in der Wahl der Träger bezw. der Scheitel unter den gegebenen oder neu aufgefundenen Elementen nötig werden. Andererseits wird es auch vorkommen, dass die gegebenen Elemente nur Konstruktionen einer Kurve als Klassenkurve (Ordnungskurve) zulassen, während das verlangte Element nur bei der als Ordnungskurve (Klassenkurve) hergestellten Kurve konstruiert werden kann. In solchem Falle wird man aus den gegebenen Bestimmungsstücken zunächst bis zu drei Berührungspunkten der Klassenkurve bezw. bis zu drei Tangenten der Ordnungskurve

Erkl. 357. Dass die Aufgabengruppen dieses Abschnitts fast nur auf Parabel und Hyperbel und nicht auf Ellipse sich beziehen, rührt daher, dass eben die Ellipse keinerlei Unterscheidungsmerkmale in Bezug auf die unendlich fernen Elemente aufweist. Man könnte ja einen ansehnlichen Bruchteil der allgemeinen Aufgaben des vorigen Abschnitts dieser Aufgabensammlung besonders für die Ellipse aussprechen, z. B. einem gegebenen konvexen Fünfeck eine Ellipse ein- bezw. umzuschreiben. Aber zu dem Zwecke müsste dieses Fünfeck auch schon von vorn herein so gewählt werden, dass auch wirklich die ihm ein- oder an- bezw. umzuschreibende Kurve eine Ellipse wird, und nicht etwa eine Hyperbel oder Parabel. Die Aufgabe würde also an ihrer Allgemeinheit wesentlich einbüssen, da die Auswahl der gegebenen Bestimmungsstücke nicht mehr völlig willkürlich bliebe. Nur in einzelnen Beispielen fällt solche Beschränkung fort: so weiss man z. B. bei gegebenem Parallelogramm stets sicher von vorn herein, dass

vorzuschreiten haben, um dann behufs weiterer Konstruktionen in der entgegengesetzten Erzeugungsweise zwei der nunmehr vorhandenen Berührungspunkte als Scheitel bezw. zwei der nunmehr vorhandenen Tangenten als Träger zu verwenden.

Aufgaben dieser zusammengesetzten Art werden besser aufgeschoben bis zur Anwendung der Sätze von Pascal und Brianchon im letzten Abschnitt dieses Teils. Dort wird man in die Lage versetzt, auch solche verwickelte Aufgaben auf einfachere Weise zu lösen, als im vorliegenden Abschnitt möglich ist.

die ein- oder angeschriebene Klassenkurve eine Ellipse wird oder eine Hyperbel, wenn der gegebene Berührungspunkt auf einer Seite innerhalb oder ausserhalb einer Seitenstrecke liegt; und ebenso, dass die umgeschriebene Ordnungskurve eine Ellipse wird oder eine Hyperbel, wenn eine gegebene Tangente durch eine Ecke durch einen Innenwinkel oder Aussenwinkel des Parallelogramms hindurchgeht.

5. Aufgaben über die Massbeziehungen bei der Erzeugung der Kurven zweiten Grades.

(Zu Abschnitt 4b.)

Aufgabe 235. Zwei verschiedene Massstäbe werden an einer beliebigen Stelle ihrer Teilpunkte unter beliebigem Winkel übereinandergelegt. Man verbindet zwei beliebige andere Teilpunkte durch eine Gerade und ebenso die beiderseits aufeinanderfolgenden Teilpunkte des einen Massstabes mit den beiderseits aufeinanderfolgenden Teilpunkten des andern Massstabes. Es soll untersucht werden, welcher Gesetzmässigkeit diese Verbindungsgeraden unterliegen.

Erkl. 358. In Figur 106 sind t_1 und t_2 die zwei Massstäbe, aufeinandergelegt mit den Punkten $D_1 E_2$. Das können Massstäbe in gleicher Einheit sein, wenn etwa auf dem einen (wie in Figur 106) je 4 mm, auf dem andern je 6 mm als Teilstrecke gelten, oder es können Massstäbe verschiedener Einheit sein, z. B. Millimeter und Pariser Linien, wobei die Teilstrecken des ersten zu denen des zweiten sich verhalten würden wie 1 : 2,256; das Ergebnis bleibt auch dasselbe, wenn die Einteilungen beider Massstäbe identisch sind. Als Beispiel zu solcher Kurvenerzeugung kann bei rechtwinkligen Trägern jedes Blatt Papier dienen, dessen Fläche durch Linien in Quadrate oder Rechtecke eingeteilt ist (sog. karriertes Briefpapier).

Erkl. 359. Man beachte das Fortschreiten der nebenstehenden Untersuchung von Punkt zu Punkt: Erstens Kurvenerzeugung überhaupt,

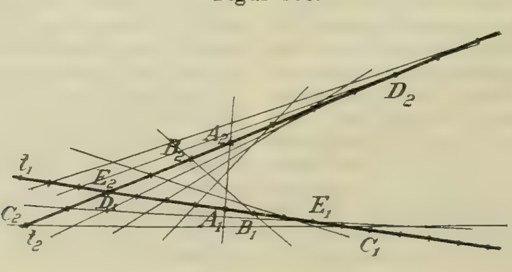
Auflösung. 1. Die zu untersuchenden Geraden sind jedenfalls die stetig aufeinanderfolgenden Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte zweier Punktreihen und müssen also eine Kurve einhüllen; die Natur dieser Kurve aber wird bestimmt durch die Art der Punktreihen.

2. Nun liegt es im Wesen zweier Massstäbe, dass gleichen Strecken des einen auch stets gleiche Strecken des andern entsprechen müssen, und demnach sind die beiden Punktreihen ähnlich, folglich auch projektivisch verwandt. Und hieraus folgt zunächst, dass die erzeugte Kurve eine solche zweiter Klasse sein muss.

3. Da nun aber nicht allgemeine Projektivität, sondern Aehnlichkeit vorliegt, so sind die unendlich fernen Punkte beider Reihen zugeordnet, die unendlich ferne Gerade befindet sich unter den erzeugenden Tangenten der Kurve, und folglich ist diese nur Parabel.

4. Für die Lage dieser Parabel zu den beiden erzeugenden Punktreihen ergibt sich

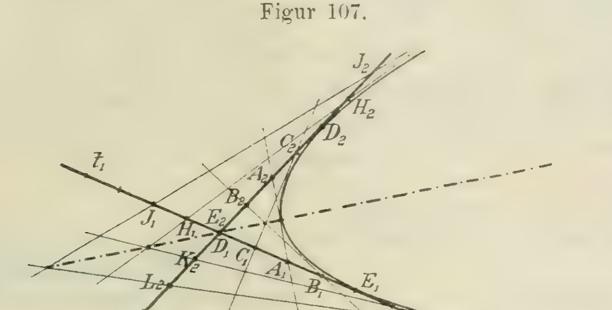
Figur 106.



zweitens Klassenzahl der Kurve, drittens Gattung der Kurve, viertens Lage der Kurve. — In letzterer Hinsicht ist in Figur 106, wenn man $A_1 A_2$ als ursprüngliche Verbindungsstrecke ansieht, die Parabel im gleichen Winkelraum wie $A_1 A_2$, weil die Fortschreitungsrichtung AB auf t_1 und t_2 nach entgegengesetzten Seiten der Geraden $A_1 A_2$ läuft. Würde man etwa von der Verbindungsstrecke $C_1 C_2$ ausgehen, welche in ihren beiden Schnittpunkten C_1 und C_2 das Fortschreiten zu benachbarten Teilpunkten nach gleicher Seite hin aufweist, so käme die Parabel in deren Nebenwinkelraum zu liegen, weil die Tangente von ihren beiden unmittelbar benachbarten in jenem Raum getroffen wird, also in jenem Raum auch ihren Berührungspunkt mit der Kurve haben muss.

aus Aufgabe 148 entweder der gleiche Winkelraum der Träger, in welchem die ursprünglich gegebene Verbindungsstrecke liegt, nämlich wenn das Fortschreiten zu benachbarten zugeordneten Punkten auf beiden Massstäben nach entgegengesetzten Seiten dieser Geraden erfolgt; dagegen der Nebenwinkelraum, wenn diese beiden Fortschreitungsrichtungen nach derselben Seite der Geraden hinweisen.

Figur 107.



Aufgabe 236. Man soll die Symmetrieeigenschaften der Parabel entwickeln.

Erkl. 360. In Figur 107 ist die Achse der Parabel unmittelbar gegeben als Winkelhalbierende der kongruenten Punktreihen $t_1 t_2$. Es entstehen auch andere Paare von kongruenten Punktreihen, nämlich auf jedem Tangentenpaar, das von einem Punkte der Axe ausgeht. Diese bilden aber immer andere Winkel als $t_1 t_2$ und haben auch andere Abstände der Berührungspunkte vom Trägerschnittpunkt. Die Scheiteltangente $A_1 A_2$ aber muss (wie jede andere Tangente) auf jedem solchen Tangentenpaar zwei entsprechende Punkte ausscheiden, und wegen der Kongruenz der Punktreihen ist der Abstand von A_1 (A_2) zum Trägerschnittpunkt auf der Achse gleich dem Abstand von A_2 (A_1) zum Berührungspunkt. Es ist also z. B. in Figur 107 auf t_1 und t_2 der Berührungspunkt jeweils der zweite Teilpunkt ausserhalb $A_1 A_2$, dagegen auf $H_1 H_2$ und $K_1 K_2$ beidemale der dritte Teilpunkt ausserhalb des Schnittpunktes mit $A_1 A_2$, d. h. der Mittelpunkt zwischen den Schnittpunkten von $H_1 H_2$ mit t_2 und $I_1 I_2$, bezw. von $K_1 K_2$ mit t_1 und $L_1 L_2$; ebenso auf $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ der erste Teilpunkt ausserhalb $A_1 A_2$, d. h. der

Auflösung. 1. Kongruente Punktreihen erzeugen nach Antwort der Frage 43 jeweils eine Parabel in symmetrischer Lage gegen die Träger mit deren Winkelhalbierungslinie als Symmetrieachse. Da nun auf der unendlich fernen Geraden nur ein einziger Punkt der Parabel liegt, so muss dieser Punkt in der Richtung der Symmetrieachse liegen. Und daher muss die Richtung nach dem unendlich fernen Punkte der Parabel als ihre Achsenrichtung bezeichnet werden.

2. Ist umgekehrt die Parabel allgemein durch vier (fünf) Bestimmungsstücke gegeben, so kann man die Achsenrichtung finden als Richtung nach dem Berührungspunkt der unendlich fernen Tangente, welcher konstruiert werden kann nach Aufgabe 81 durch Wahl der unendlich fernen Geraden als Träger einer erzeugenden Punktreihe. Ist die Achsenrichtung bekannt, so ist die Achse selbst zu finden als Parallele zur Achsenrichtung durch den Mittelpunkt einer solchen Verbindungsstrecke zweier Kurven-

Mittelpunkt zwischen den Schnittpunkten von B_1B_2 mit t_1 und A_1A_2, bezw. von C_1C_2 mit t_2 und A_1A_2. — In Fig. 106 wäre die Achse nach Nebenstehendem zu konstruieren.

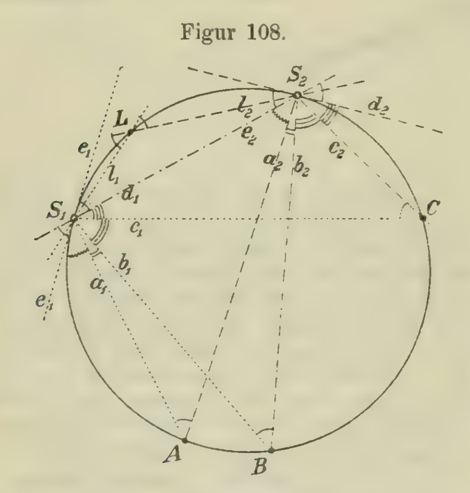
Erkl. 361. Vergleicht man etwa die Parabeln der Figuren 106 und 107, so denke man sich dieselben Achse auf Achse in denselben Winkel der Träger $t_1 t_2$ der Fig. 107 eingelegt. Dann unterscheiden sie sich nur durch den Abstand der Berührungspunkte vom Trägerschnittpunkt. Verschiebt man also die Scheiteltangente A_1A_2 in Fig. 107 parallel zu sich selbst, so entstehen auch immer andere Tangentenabschnitte auf den Trägern, und die Parabel 107 geht einmal über in die Parabel 106. Ebenso kann aber jede in der Zeichenebene mögliche Parabel in denselben Trägerwinkel eingelegt werden, also kann es nur ∞^1 an Gestalt verschiedene Parabeln geben, — und diese ∞^1 Parabeln sind sämtlich ähnlich.

punkte, die auf der Achsenrichtung senkrecht steht. Zu dem Zweck kann man irgend einen Kurvenpunkt als Scheitel wählen, von ihm aus eine Senkrechte fällen auf die Achsenrichtung und den zweiten Kurvenpunkt dieser Geraden suchen. Die Mittelsenkrechte dieser Sehne ist Achse. (Einfachere Hilfsmittel zu diesen Konstruktionen liefern die Sätze von Pascal und Brianchon im siebten Abschnitt dieser Aufgabensamml.) Der Kurvenschnittpunkt der Achse heisst Scheitel; seine Tangente, die Scheiteltangente (A_1A_2 in Fig. 107), steht senkrecht auf der Achse. Weitere Ausführungen dieser Beziehungen findet man im zweiten Abschnitt des folgenden Bandes dieses Lehrbuches.

Aufgabe 237. Man soll bei den durch die Aufgaben 211—220 bestimmten Parabeln die Achse suchen.

Aufgabe 238. Man soll die Bestimmungsstücke des Kreises als Ordnungskurve aufstellen.

Figur 108.



Erkl. 362. Vergleicht man die nebenstehenden Bestimmungsarten des Kreises mit den in der Planimetrie auftretenden, so hat man dort ebenfalls 1. *PPP*, 2. *P(PT)*, 3. *(PT)T*, 4. *TTT*. Es sind also die drei ersten Fälle ganz gleichlautend, und fehlt hier nur der vierte, weil dieser die Auffindung der beiden Scheitel nicht so gestattet, wie der dritte. Wie deutlich manchmal die in der Planimetrie auszuführenden Konstruktionen sich zum Einklang bringen lassen mit denen der projektivischen Geometrie, kann hier folgender Vergleich zeigen:

Auflösung. 1. Da der Kreis ausschliesslich durch gleichlaufende kongruente Büschel erzeugt wird, so genügt zu seiner Bestimmung

a) die Angabe dreier Kurvenpunkte. Denn kennt man in Fig. 108 z. B. die Punkte S_1S_2B, so wählt man etwa die beiden ersteren als Scheitel und weiss dann, dass zu einem beliebigen Strahl a_1 bezw. c_1 von S_1 derjenige Strahl von S_2 zugeordnet ist, welcher mit b_2 in gleicher Umlaufsrichtung gleichgrosse Winkel als $\sphericalangle (b_2 a_2)$ bezw. $\sphericalangle (b_2 c_2)$ bildet, wie die Winkel $(b_1 a_1), (b_1 c_1)$ von a_1 und c_1 mit Strahl b_1. — Da dasselbe aber auch von dem Verbindungsstrahl der Scheitel bezw. von der Tangente in einem der Scheitel gilt, so genügt auch

b) die Angabe zweier Kurvenpunkte und der Tangente in einem derselben. Denn kennt man in Figur 108 S_1S_2 und etwa die Tangente e_1, so wählt man wieder die beiden Punkte als Scheitel und weiss, dass zu einem beliebigen Strahle a_1 bezw. l_1 derjenige Strahl von S_2 zugeordnet ist, welcher mit dem Verbindungsstrahl e_2 der Scheitel S_2S_1 in gleicher Umlaufsrichtung gleichgrosse Winkel als $\sphericalangle (a_2 e_2)$ bezw. $\sphericalangle (l_2 e_2)$ bildet, wie die Winkel $(a_1 e_1)$ und $(l_1 e_1)$ von a_1 und l_1 mit der Tangente e_1.

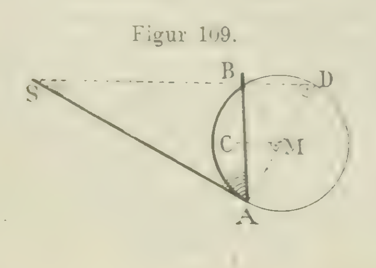
2. Unter Hinzunahme einer Hilfskonstruktion kann man als Bestimmung des Kreises noch beifügen

In Figur 109 sei der Kreis bestimmt durch die Punkte A und B nebst Tangente in A. Die Planimetrie findet den Mittelpunkt M durch die Senkrechte AM auf der Tangente und die Mittelsenkrechte CM auf der Verbindungsgeraden AB. Die projektivische Geometrie wählt A und B als Scheitel und findet zu dem auf AS etwa senkrecht stehenden Strahl AM den entsprechenden als senkrechten Strahl zu AB in B, also $BD \perp AB$. Der neu erhaltene Kurvenpunkt D ist in der That der zweite Endpunkt des Durchmessers AM, weil $BD \parallel CM$ und $AB = 2 \cdot AC$.

c) die Angabe **zweier Tangenten und des Berührungspunktes auf einer derselben.** Denn wählt man diesen Punkt als einen der Scheitel (S_1 in Fig. 108), so weiss man, dass die Verbindungsgerade der Scheitel einerseits mit der einen Tangente denselben Winkel bilden muss, wie andererseits mit der andern Tangente, dass also S_2 liegen muss auf der Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks, mit Schenkeln e_1 und d_2. Dadurch ist diese Bestimmung auf die vorhergehende zurückgeführt.

Erkl. 363. Auf Grund vorstehender Ueberlegungen kann man auch die Aufgabe stellen, dass in einem Punkte S_1 die Tangente an einen Kreis gelegt werden soll, der noch durch zwei andere gegebene Punkte S_2 und A geht. Zu dem Zweck ist der Winkel $S_1 S_2 A$ in S_1 anzulegen an $S_1 A$ als Winkel $(a_1 e_1)$, s. Figur 108. Hiernach kann man auch zu einem durch zwei feste Punkte bestimmten Kreisbüschel einen beliebigen Punkt der Ebene auswählen und diejenige Tangente bestimmen, welche der durch jenen Punkt gehende Kreis des Büschels dort berührt.

Figur 109.



Aufgabe 239. Beliebige weitere Kurvenelemente eines Kreises zu konstruieren, von dem gegeben sind PPP.

Aufgabe 240. Beliebige weitere Kurvenelemente eines Kreises zu konstruieren, von dem gegeben sind $P(PT)$.

Aufgabe 241. Beliebige weitere Kurvenelemente eines Kreises zu konstruieren, von dem gegeben sind $T(PT)$.

Aufgabe 242. Die Bestimmungsstücke der **gleichseitigen Hyperbel als Ordnungskurve** aufzustellen.

Auflösung. 1. Da die gleichseitige Hyperbel in Kurvenpunkten mit parallelen Tangenten ungleich laufende kongruente Strahlenbüschel erzeugt, so kann sie bestimmt werden:

a) durch **zwei Kurvenpunkte** mit parallelen Tangenten und **einen weiteren Kurvenpunkt,**

b) durch **zwei Kurvenpunkte** mit parallelen Tangenten und eine (also auch die andere) **Asymptotenrichtung,**

c) durch **zwei Kurvenpunkte** mit parallelen Tangenten und die **Richtung** dieser ihrer **Tangenten.**

Wählt man nämlich die beiden gegebenen Kurvenpunkte zu Büschelscheiteln, so wird die Kurve durch kongruente Büschel erzeugt, und man hat die gleichen Winkel entsprechen-

Erkl. 364. Von den Elementen der Figur 110 sind in nebenstehenden Fällen a) bis c) gegeben:

a) $S_1 S_2$ und A oder B, C, H, I.

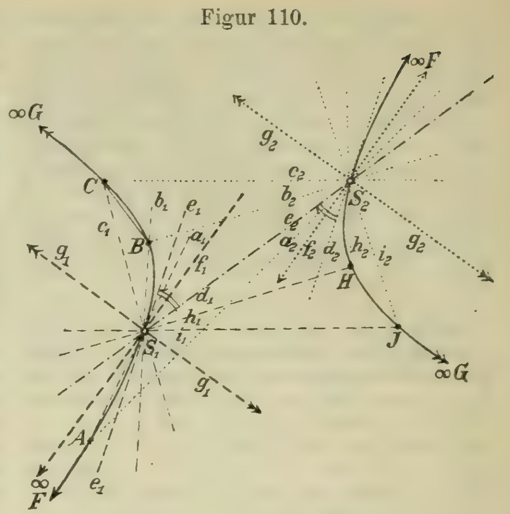
b) $S_1 S_2$ und $f_1 f_2$ oder $g_1 g_2$.

c) $S_1 S_2$ und e_1 oder d_2.

Der Ausdruck „Kurvenpunkte mit parallelen Tangenten“ bedeutet demnach keineswegs, dass in diesen beiden Kurvenpunkten $S_1 S_2$ die Tangenten gegeben seien, sondern nur, dass $S_1 S_2$ **solche** Kurvenpunkte sein sollen, deren Tangenten parallele Richtung haben. Nur im dritten Falle (c) ist dann die Richtung dieser Tangenten und damit also beide Tangenten selbst auch gegeben.

Erkl. 365. Vergleicht man die nebenstehenden Bestimmungen der gleichseitigen Hyperbel mit denen des Kreises in der vorhergehenden Aufgabe 238, so tritt zunächst an Stelle beliebiger Kurvenpunkte als Büschelscheitel die Bedingung solcher Kurvenpunkte, welche parallele Tangenten erhalten. Aber auch so stimmt zwar Aufgabe 242a und b überein mit Aufgabe 238a, 242c mit 238b, aber zu Aufgabe 238c fehlt die analoge in Aufgabe 242. Würde man nämlich zwei beliebige Tangenten wählen, so wären ihre Berührungspunkte nicht mehr Scheitel kongruenter Büschel; und würde man parallele Tangenten wählen, so könnte zu einem vorgegebenen Berührungspunkt auf der einen noch jeder beliebige Berührungspunkt auf der zweiten hinzutreten, und man hätte doch immer eine Bestimmung der Art wie Aufgabe 242c. Umgekehrt schliesst man, dass es noch unendlich viele gleichseitige Hyperbeln gibt, die einen gegebenen Parallelstreifen berühren, und zwar auf der einen Seite in einem festen Punkte. (Aus der Symmetrieeigenschaft folgt dann, dass der Mittelpunkt dieser Hyperbeln jeweils auf dem Mittelpunkt der Verbindungsstrecke beider Berührungspunkte liegt.)

Figur 110.



der Strahlen der beiden Büschel zu messen in entgegengesetzter Umlaufsrichtung: bei a) und b) von den Strahlen nach dem im Endlichen bezw. Unendlichen gegebenen Kurvenpunkte, bei c) im einen Büschel von der Verbindungsgeraden beider Scheitel, im andern Büschel von der Tangente aus.

2. Da die Hyperbel als gleichseitige festgelegt wird durch Rechtwinkligstehen der Asymptoten, so erhält man aus den Aufgaben 227 bis 230 noch die Bestimmungsweisen:

d) durch eine Asymptote und zwei Kurvenpunkte,

e) durch eine Asymptote und einen Kurvenpunkt nebst seiner Tangente,

f) durch die Richtung der einen Asymptote und drei Kurvenpunkte,

g) durch die Richtung der einen Asymptote und zwei Kurvenpunkte nebst der Tangente im einen derselben.

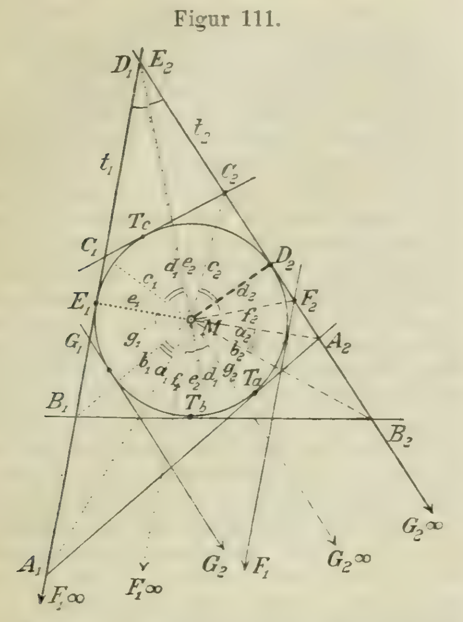
Von diesen Bestimmungen entspricht die vorletzte f) dem Fall $PPPPP$, d) und g) dem Falle $PPP(PT)$, e) dem Falle $P(PT)(PT)$. Denn wenn die eine Asymptotenrichtung bekannt ist, so verlangt der Name der gleichseitigen Hyperbel, dass die Richtung der zweiten Asymptote die Senkrechte zur ersten sei, und das bedeutet die Hinzunahme eines weiteren Kurvenpunkts im Unendlichen.

Erkl. 366. In den Bestimmungen a) bis c) wird die gleichseitige Hyperbel durch kongruente Büschel erzeugt, in den Bestimmungen d) bis g) durch allgemeine Büschel. Es könnte auffallen einmal, dass aus der grossen Gruppe der Aufgaben 221 bis 233 nicht mehr als diese vier besonderen Fälle hervorgehen, und dann, dass keine Elementengruppe zur Bestimmung der gleichseitigen Hyperbel als Klassenkurve entsteht. Beide Umstände haben dieselbe Veranlassung. Wenn man nämlich die Aufgaben 221 und 222 nicht etwa in der besondern Form aussprechen will, dass die gegebenen Asymptoten senkrecht stehen sollen, so können thatsächlich keine andern Aufgaben aus jener ganzen Gruppe entstehen. Denn zu Aufgabe 223, 224 und 233 kann z. B. keine entsprechende gebildet werden, weil zu der gegebenen Asymptotenrichtung die dazu senkrechte Richtung der zweiten einen Kurvenpunkt ersetzt, während in jenen Aufgaben kein ersetzbarer vorhanden ist. So fallen die weiteren Aufgaben 225 und 228 mit e), 226 und 227 mit d), 226, 229, 231 mit f) und 225, 230, 232 mit g) zusammen, ohne dass neue Fälle entstehen.

Aufgabe 243 bis 249. Man soll beliebige weitere Kurvenpunkte, insbesondere auch die beiden Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel konstruieren, welche durch die Elementengruppen a) bis g) der vorigen Aufgabe 242 bestimmt ist.

Aufgabe 250. Man soll zwei projektivische Punktreihen herstellen, die einen Kreis von vorgegebenem Radius erzeugen.

Figur 111.



Erkl. 367. Die nebenstehende Konstruktion der Punktreihen selbst kann in beliebiger Lage derselben ausgeführt werden, geschieht allerdings am einfachsten gleich von vorn herein in derjenigen Lage, in welche die Punktreihen zur Erzeugung des Kreises nachträglich verbracht werden müssen. In Figur 111 sind die beiden Dreiecke $D_1 E_1 M$ und $E_2 D_2 M$ mit zugeordneten ungleichnamigen Endpunkten der grösseren Kathete gegeben. Zur weiteren Festlegung der projektivischen Verwandtschaft bedarf es dann noch eines Punktepaares, z. B. C_1 auf t_1, und dazu C_2 derart bestimmt, dass $\sphericalangle (d_2 c_2)$ gemessen von d_2 im spitzen Winkel gegen e_2 gleich wird $\sphericalangle (d_1 c_1)$ gemessen wieder im spitzen Winkel von d_1 gegen e_1 — oder zu B_1 auf t_1 Punkt B_2 so bestimmt, dass $\sphericalangle (e_2 b_2)$ gemessen im Aussenwinkel von e_2 nach b_2 gleich wird $\sphericalangle (e_1 b_1)$ gemessen im Aussenwinkel von e_1 nach b_1. Und sowie drei Punktepaare *DEC* oder *DEB* auf beiden Reihen zugeordnet sind, kann die rein geometrische Konstruktion einsetzen.

Auflösung. Man zeichne mit einer beliebigen Strecke als Hypotenuse zwei symmetrisch kongruente rechtwinklige Dreiecke, welche die gegebene Radiuslänge r als eine Kathete haben, und nehme die anderen Katheten beider Dreiecke als Träger der Punktreihen an. Auf ihnen werden zugeordnet die ungleichnamigen Eckpunkte dieser Katheten und weiterhin irgend zwei solche Punkte der Träger, deren Verbindungsgeraden nach der Gegenecke des Dreiecks gleichwendig gleichgrosse Winkel bilden mit den Strahlen nach jenen ersten zugeordneten Punkten. Wenn man nun die beiden Dreiecke mit der gemeinsamen Hypotenuse symmetrisch aneinanderlegt, und nach der gewohnten Konstruktionsweise zu jedem Punkt der einen Punktreihe den entsprechenden der andern sucht, so umhüllen die Verbindungsgeraden der so zugeordneten Punkte einen Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r, welcher in den beiden Dreiecksscheiteln die Träger berührt.

Erkl. 368. Dass die so entstehende Klassenkurve wirklich ein Kreis sein muss, folgt aus der in Antwort auf Frage 46 erörterten Eigenschaft des Kreises: die Punktreihen $t_1 t_2$ werden aus M durch kongruente Büschel:

$$d_1 c_1 e_1 b_1 = d_2 c_2 e_2 b_2$$

ausgeschnitten; und die Fluchtpunkte $G_1 F_2$ entstehen durch die gleichen Winkel $(e_1 g_1) = (e_2 g_2) = (d_2 f_2) = (d_1 f_1) = \frac{1}{2} (t_1 t_2)$ als Eckpunkte kongruenter Dreiecke $M E_1 G_1 \cong M D_2 F_2$, liefern also ein Tangentenrhombus an die Kurve, nämlich $t_1 \parallel F_2 F_1$ und $t_2 \parallel G_1 G_2$.

Erkl. 369. Statt mit Hypotenuse MD_1 hätte dieselbe Konstruktion ausgeführt werden können etwa mit Hypotenuse MC_1 oder MC_2, also mit den rechtwinkligen Dreiecken $MC_1 E_1 \cong MC_1 T_c$ oder $MC_2 D_2 \cong MC_2 T_c$ und Trägerpaaren t_1 und $C_1 C_2$ oder t_2 und $C_1 C_2$. Auch zwei beliebige andere Kreistangenten könnten als Träger erscheinen, z. B. $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ mit Hypotenuse von M nach ihrem Schnittpunkt und Katheten $MT_a = MT_b = r$.

Aufgabe 251. Zwei beliebig gegebene projektivisch verwandten Punktreihen sollen so gelegt werden, dass sie einen Kreis erzeugen.

Erkl. 370. Nach Antwort auf Frage 37 des I. Teils gibt es bei zwei beliebigen projektivischen Punktreihen stets unendlich viele Paare

Auflösung. 1. Um zwei beliebige projektivische Punktreihen in solche Lage zu bringen, dass sie einen Kreis erzeugen, kann man das in Antwort auf Frage 46. 2 dieses Teils angegebene Verfahren anwenden.

gleichlanger Strecken zwischen entsprechenden Punkten, wie $D_1 E_1 = D_2 E_2$ in Figur 111. Man kann den einen Endpunkt D_1 beliebig wählen, trägt dann $G_1 D_1$ auf der andern Reihe ab als $F_2 E_2$ und konstruiert zu D_1 und E_2 die Punkte D_2 und E_1; dann wird auch noch $D_1 E_1 = D_2 E_2$, $D_1 G_1 = E_2 F_2$. Kennt man so in Figur 111 die Elemente $D_1 E_1 G_1$, so folgt das rechtwinklige Dreieck $D_1 M G_1$ mit Hypotenuse $D_1 G_1$ und Höhe $E_1 M$; bei Umklappung desselben um MD_1 entsteht Träger t_2 mit Punkt E_2 in D_1, und da $E_2 D_2 = E_1 D_1$, so fällt auch Strecke $D_1 E_1$ auf $E_2 D_2$ und Strecke $D_1 G_1$ auf $E_2 F_2$. Es werden E_1 und D_2 Berührungspunkte des Kreises, da $ME_1 = MD_2$ und beide senkrecht t_1 bezw. t_2.

2. Ein zweites Verfahren zum gleichen Zweck ist folgendes: Man sucht auf Grund der Antwort auf Frage 37, 3 des I. Teils in beiden Punktreihen zwei entsprechende Punktepaare, welche gleichgrosse Strecken zwischen einander einschliessen, und zwar von der ersten Art, bei welcher die Fluchtpunkte von diesen gleichen Strecken ausgeschlossen werden, aber auf beiden Reihen in gleichen Abständen von den ungleichnamigen Punkten entfernt liegen. Ueber dem grösseren dieser letztgenannten Abstände als Hypotenuse errichtet man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Höhe den zweiten Streckenpunkt als Fusspunkt hat, und klappt dieses Dreieck um die dem Fluchtpunkt gegenüberliegende Kathete um. Auf die Hypotenuse dieses neuentstehenden Dreiecks legt man dann die zweite Punktreihe derart auf, dass im Schnittpunkt der Träger ungleichnamige Endpunkte der gleichen Strecken zusammenfallen, und dann der Fluchtpunkt der zweiten Reihe mit dem herübergeklappten Fluchtpunkt der ersten Reihe zur Deckung kommt. Dann ist das Erzeugnis der beiden Punktreihen ein Kreis. Der gemeinsame Scheitelpunkt der beiden Dreiecke wird zum Mittelpunkt des Kreises, und die Höhen der Dreiecke sind die Radien nach den Berührungspunkten.

Erkl. 371. Dass die so entstehende Kurve wirklich ein Kreis sein muss, folgt wie in Erkl. 368 daraus, dass die Punkte G_1 und F_2 ein Tangentenrhombus liefern, in welchem E_1 und D_2 als zugeordnete Punkte zum Trägerschnittpunkt die Berührungspunkte sind. Die erzeugte Klassenkurve hat daher mit dem diesem Rhombus eingeschriebenen Kreis gemeinsam die Tangenten t_1, t_2, $G_1 G_2$ und $F_1 F_2$ sowie die Berührungspunkte $E_1 D_2$, somit zusammen sechs Elemente. Und schon bei fünf gemeinsamen Elementen muss die Kurve mit diesem Kreis identisch werden.

Erkl. 372. Wählt man statt D_1 einen andern Ausgangspunkt auf t_1 für die Konstruktion, so erhält das rechtwinklige Dreieck eine andere Hypotenuse, also der Kreis einen andern Radius und auch die Träger der beiden vorgegebenen Punktreihen einen andern Winkel. Man kann den Winkel τ der Träger und den Radius r des Kreises durch Rechnung verknüpfen mit der Konstanten der projektivischen Beziehung beider Reihen. Sei letzteres Streckenprodukt für den Augenblick bezeichnet mit dem Buchstaben k^2, so ist in Figur 111 $G_1 D_1 \cdot F_2 D_2 = G_1 D_1 \cdot G_1 E_1 = k^2$. Im rechtwinkligen Dreieck $G_1 M D_1$ ist aber auch:

$$G_1 D_1 \cdot G_1 E_1 = \overline{G_1 M}^2 = \left(G_1 D_1 \cdot \sin \frac{\tau}{2}\right)^2.$$

Folglich wird $\sin \frac{\tau}{2} = \frac{k}{G_1 D_1}$, und dann:

$$r = GM \cdot \cos \frac{\tau}{2} = k \cdot \cos \frac{\tau}{2}.$$

Dass nicht etwa bei der Wahl von $G_1 C_1$ anstatt $G_1 D_1$ einfach derselbe Kreis in Figur 111 mit den Trägern in der Lage t_1 und $C_1 C_2$ entstehen kann, geht daraus hervor, dass t_1 und $C_1 C_2$ nicht verschiedene Lagen derselben Punktreihe sein können. Denn im letztern Falle müssten $C_1 C_2$ und t_2 kongruent sein und folglich eine Parabel erzeugen (nach Antwort auf Frage 43), in Figur 111 erzeugen sie aber einen Kreis.

Erkl. 373. Man erkennt aus der letzteren Bemerkung zu Figur 111 sowie aus der Auflösung der beiden Aufgaben 250 und 251, dass wie derselbe Kreis durch verschiedenerlei Punktreihen, so auch verschiedene Kreise durch dieselben zwei Punktreihen erzeugt werden können. In beiden Auflösungen der Aufgaben 250 und 251 trat die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks als einzige willkürliche Länge auf: dort bei bestimmtem Radius, hier bei zwei bestimmt gegebenen Reihen. Hiernach muss es möglich sein, zwei beliebig gegebene Punktreihen so zu legen, dass sie einen Kreis auch bei vorgegebenem Schnittwinkel ihrer Träger erzeugen, oder dass sie einen Kreis von gegebenem Radius erzeugen, nicht aber beides zugleich. Für den ersten dieser Fälle findet man aus nebenstehender Erkl. 372 den erforderlichen Abstand:

$$G_1 D_1 = \frac{k}{\sin \frac{\tau}{2}},$$

für letzteren Fall den erforderlichen Winkel τ aus $\cos \frac{\tau}{2} = \frac{r}{k}$, und dann wieder $G_1 D_1$ wie eben.

Aufgabe 252. Man soll in Figur 111 die Potenzpunkte irgend zweier Trägertangenten des Kreises angeben.

Andeutung. Nach Erkl. 372 ist $k = G_1 M$ (vergl. Erkl. 130 des I. Teils dieses Lehrbuches).

Aufgabe 253. Zwei gegebene Punktreihen erzeugen eine Klassenkurve. Durch welche Ortsveränderung des zweiten Trägers bei festgehaltenem ersten Träger wird die Kurve zum Kreis?

Andeutung. Man berücksichtige Verschiebung in sich selbst oder sich selbst parallel, sowie Drehung um den Trägerschnittpunkt.

Aufgabe 254. Die vorige Aufgabe für den engeren Fall zu lösen, dass der vorhandene Winkel der Träger bestehen bleibt.

Andeutung. Man verfahre nach Erkl. 372 und 373.

Aufgabe 255. Die vorige Aufgabe für den engeren Fall zu lösen, dass der Kreis bestimmten Radius erhält.

Andeutung. Man verfahre nach Erkl. 372 und 373.

Aufgabe 256. Welche planimetrische Eigenschaft des Kreises ermöglicht dessen Konstruktion als Klassenkurve, wenn drei Tangenten gegeben sind?

Erkl. 374. Man erhält durch nebenstehende Konstruktion die vier Kreise zu den gegebenen drei Tangenten, nämlich die drei Ankreise durch Abtragung von s aus den drei Eckpunkten, und jedesmal denselben Inkreis durch Antragung von $s-a$ bezw. $s-b$, $s-c$. — Zur Not könnte man auf gleiche Weise auch den Kreis mit gegebenen Elementen T (TP) und P (PT) als Klassenkurve herstellen, indem man erst durch Symmetrie diese beiden Fälle identifiziert, und sodann entweder auf MD_1 in Fig. 111 die Radienlängen $ME_1 = MD_2 = r$ nach aussen oder innen anträgt und durch die senkrechten Tangenten in den Endpunkten ein neues Punktepaar beschafft, oder durch Verdoppelung der Strecken MD_2 und ME_1 die parallelen Tangenten F_1F_2, G_1G_2 hinzunimmt.

Auflösung. Die drei Tangenten bilden ein umgeschriebenes oder ein angeschriebenes Dreiseit mit Seitensumme $2s$. In einem solchen ist der Abstand der Berührungspunkte vom Tangentenschnittpunkt gleich der um eine Seitenlänge verminderten halben Seitensumme, bezw. gleich s selbst. Vergl. Antwort der Frage 66 im IV. Teile von Kleyer-Sachs, Planimetrie. Konstruiert man also diese Strecke und trägt sie von einem Tangentenschnittpunkt aus auf den von der dritten Tangente geschnittenen Schenkeln ab, so erhält man die Berührungspunkte und hat so auf den beiden Reihen drei entsprechende Punktepaare, nämlich D_1D_2, E_1E_2, und die zwei übrigen Tangentenschnittpunkte.

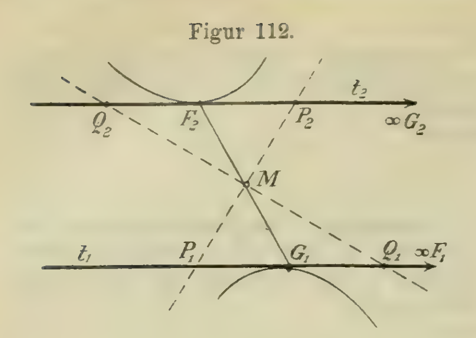
Aufgabe 257. Man soll zwei beliebig gegebene projektivische Punktreihen in solche Lage bringen, dass sie eine gleichseitige Hyperbel erzeugen.

Erkl. 375. Dass die parallelen Träger in Fig. 112 gleichlaufend sein müssen, um überhaupt eine Hyperbel erzeugen zu können, ist schon in Aufgabe 148 nachgewiesen worden; und die Reihen t_1 und t_2 in Fig. 112 sind gleichlaufend, denn in beiden ist die Reihenfolge zugeordneter Elemente P_1, G_1, Q_1, $F_1 \infty$ bezw. P_2, $G_2 \infty$, Q_2, F_2. — In Antwort auf Frage 37 des I. Teiles ist gezeigt worden, dass es für zwei projektivische Punktreihen stets zwei

Auflösung. A) Dass die Aufgabe erfüllt ist, wenn man die beiden Reihen zu einander senkrecht und mit den Fluchtpunkten aufeinanderlegt, ist schon in Satz 21 gesagt. Sie kann aber auch bei paralleler und bei konvergenter Lage der Punktreihen gelöst werden.

B) 1. Angenommen nämlich, t_1 und t_2 in Fig. 112 seien zunächst zwei beliebige gleichlaufend parallele Träger, und man kenne auf denselben die Fluchtpunkte G_1F_2, sowie die Potenzpunkte P_1Q_1, P_2Q_2 (vergl.

Figur 112.



Punktepaare PQ gibt, für welche die sogenannte Potenz der projektivischen Beziehung dieser Reihen nicht als Rechteck, sondern als Quadrat erscheint. Für ein beliebiges weiteres Punktepaar $A_1 A_2$ in Fig. 112 müsste demnach sein: $\overline{G_1 A_1} \cdot \overline{F_2 A_2} = \overline{G_1 P_1}^2 = \overline{G_1 Q_1}^2 = \overline{F_2 P_2}^2 = \overline{F_2 Q_2}^2$. — Die Hyperbel liegt jedenfalls beiderseits ausserhalb des Parallelstreifens $t_1 \parallel t_2$ und berührt diese Tangenten in G_1 und F_2, hat also die Lage der in Fig. 112 angedeuteten Kurvenbogenstücke; und die Winkelhalbierenden der Asymptoten sind die Achsen der Hyperbel.

Erkl. 376. Die Lösung B) der nebenstehenden Aufgabe geschieht am bequemsten dadurch, dass man für die beiden gegebenen projektivischen Reihen $t_1 t_2$ die Konstante der projektivischen Beziehung $\overline{G_1 P_1}^2$ aufsucht und dann mit der doppelten Strecke $G_1 P_1$ um G_1 einen Kreisbogen zeichnet. Auf diesen Kreisbogen muss F_2 zu liegen kommen. Das ist nicht bei beliebigem Abstand der Parallelen möglich, sondern nur wenn sie höchstens den Abstand $2 \cdot G_1 P_1$ haben. Man muss also t_2 sich selbst parallel gegen t_1 heranschieben bezw. in sich selbst verschieben, bis F_2 auf den Kreisbogen kommt. Für einen bestimmten Abstand der Parallelen gibt es dann im allgemeinen zwei Lösungen, indem F_2 zwei (gegen das Lot auf t_1 in G_1 symmetrische) Lagen auf dem Kreisbogen haben kann.

Erkl. 377. Bei den beiden Auflösungen B) und C) der nebenstehenden Aufgabe sind jeweils drei Teile zu unterscheiden, ein allgemeiner für die zu verlangende Lage der Träger, ein besonderer für die spezielle Art der verlangten Hyperbel, und ein dritter mit der eigentlichen Konstruktion. Man beachte wohl, dass der erste Teil allgemeine Geltung hat für jede durch solche Träger erzeugte Hyperbel. So gewinnt man aus Lösung B) die bemerkenswerten Sätze: Wenn zwei parallele projektivische Punktreihen eine Hyperbel erzeugen, so sind die Verbindungsgeraden ihrer Potenzpunkte die Asymptoten. (Bei einer Ellipse liefern dieselben ein Tangentenparallelogramm mit Berührungspunkten in den Mittelpunkten der vier Seiten.) Und: Die Asymptoten einer Hy-

Erklärung 375). Dann sind $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ ebenfalls Tangenten der Kurve; die von ihnen gebildeten Dreiecke $P_1 M Q_1$ und $P_2 M Q_2$ sind aber kongruent wegen der gleichen Winkel und der gleichen Seitenstrecken $P_1 Q_1 = P_2 Q_2$, folglich ist der Schnittpunkt M der Mittelpunkt der beiden Tangentenstrecken $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$. Da ferner der Schnittpunkt der Träger $t_1 \parallel t_2$ unendlich fern liegt, so sind die Fluchtpunkte zugleich zugeordnete Punkte dieses Schnittpunktes und folglich die Berührungspunkte der Kurve mit den parallelen Trägern; und ihre Verbindungsgerade verbindet die Mittelpunkte der Dreieckseiten $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, geht also wegen der centrischen Symmetrie ebenfalls durch den Mittelpunkt M und wird dort auch halbiert. Nun trifft aber nach Erkl. 126 bezw. 165 die Verbindungsgerade der Berührungspunkte zweier Trägertangenten jede andere Tangente im vierten harmonischen Punkte zu ihrem Berührungspunkt und den Schnittpunkten jener Träger, also muss der Berührungspunkt auf $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ als zugeordneter harmonischer zum Mittelpunkt M der unendlich ferne Punkt sein; d. h. $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ sind die Asymptoten der so entstehenden Hyperbel.

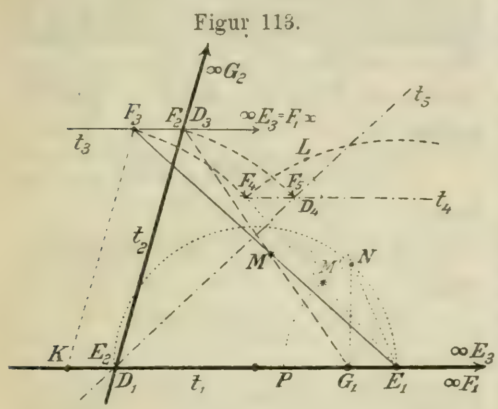
2. Damit nun diese Hyperbel gleichseitig werde, müssen die Asymptoten senkrecht stehen: also sind dann die Dreiecke $P_1 M Q_1$ und $P_2 M Q_2$ rechtwinklige und ihre Schwerlinie MG_1 gleich der Hälfte der Hypotenuse, folglich die ganze Strecke $G_1 F_2 = P_1 Q_1 = P_2 Q_2$.

3. Der einfachste Weg zu dem von der Aufgabe gesetzten Ziele ist hiernach der, die beiden Punktreihen in gleichlaufend parallele Lage zu bringen, und dann die eine soweit in sich selbst oder parallel sich selbst zu verschieben, dass der Abstand der Fluchtpunkte $G_1 F_2$ beider Reihen in Fig. 112 gleich dem Abstand der Potenzpunkte auf jeder der Reihen $P_1 Q_1$ gleich $P_2 Q_2$ wird.

C) 1. Sind endlich t_1 und t_2 in Fig. 113 zwei beliebige konvergente Träger, und man kennt wieder die beiden Fluchtpunkte $G_1 F_2$ und den Berührungspunkt E_1 auf t_1, so kann man sofort zwei parallele Trägertangenten der zu erzeugenden Kurve erhalten, wenn man zu t_1 die Parallele durch F_2 als t_3 hinzunimmt. Auf diesen beiden Trägern $t_1 \parallel t_3$ werden dann zugeordnete Punkte zunächst die von der Kurventangente t_2 ausgeschnittenen Punkte D_1 und $F_2 = D_3$, ferner der Berührungspunkt E_1 jetzt als zugeordneter zum unendlich fernen Schnittpunkt $E_3 \infty$ von $t_1 t_3$

perbel schneiden auf je zwei parallelen Tangenten die Potenzpunkte aus in gleichem Abstand beiderseits des Berührungspunktes. Und da allgemein die Berührungspunkte paralleler Tangenten zugleich deren Fluchtpunkte sind, so erhält man noch den Satz für die Konstante der projektivischen Beziehung: Die Abstände zwischen den Berührungspunkten zweier festen parallelen Tangenten und deren Schnittpunkten mit einer veränderlichen dritten Tangente haben bei jeder Kurve konstantes Produkt ($\gtrless o$ für Ellipse bezw. Hyperbel).

Figur 113.



Erkl. 378. Da in Figur 113 der unendlich ferne Punkt G_2 auf t_2 eine weitere Tangente $G_1 G_2$ liefert, so hätte man auf t_3 noch den Punkt G_3 als Schnittpunkt mit $G_1 G_2$. Und im Tangenten-Parallelogramm $D_1 G_1 D_3 G_3$ müssen nach dem Satz in Erkl. 339 die Berührungspunkte centrisch-symmetrisch zum Diagonalenmittelpunkt M liegen. Demnach muss die Gerade von E_1 durch den Halbierungspunkt M der Diagonale $G_1 D_3$ den Berührungspunkt auf der parallelen Tangente t_3 treffen. Ist auch der Berührungspunkt D_2 auf t_2 bekannt, so würde durch die Verbindungsgerade $D_2 M$ auch auf $G_1 G_2$ der Berührungspunkt der Kurve ausgeschnitten werden. — Dass der Berührungspunkt E_1 ausserhalb der Strecke $D_1 G_1$ und gleichzeitig der Berührungspunkt D_2 ausserhalb der Strecke $E_2 F_2$ liegen muss, ist nach Antwort 39 ein allgemeines Erfordernis für zwei Punktreihen, welche eine Hyperbel erzeugen sollen. Die Konstruktion der Sehne $E_1 N$ ist daher immer möglich.

Erkl. 379. Im dritten Teil der Lösung C) ist zu suchen, für welche Lage von t_2 die Parallele $F_2 F_3$ ihren Endpunkt auf dem Kreisbogen mit Radius $E_1 L$ hat. Zu dem Zweck dreht man gleichzeitig F_2 um D_1 und F_3 um einen in der Entfernung $D_1 K = F_2 F_3$ ausserhalb D_1 liegenden Punkt K. Dann kommt F_3 auf den Kreisbogen nach F_4, die Parallelstrecke $F_3 D_3$ er-

und somit als Fluchtpunkt auf t_1 für die Beziehung von t_1 auf t_3, und endlich als zweiter Fluchtpunkt zu $F_1 \infty$ und somit auch Berührungspunkt auf t_3 derjenige Punkt F_3, in welchem t_3 geschnitten wird durch die Verbindungsgerade von E_1 durch den Mittelpunkt M von $G_1 F_2$.

2. Damit nun eine gleichseitige Hyperbel entsteht, muss für die Träger t_1 und t_3 die Beziehung der Fig. 112 in Geltung treten, nämlich der Abstand der Fluchtpunkte $E_1 F_3$ gleich sein dem Abstand der Potenzpunkte, oder $\overline{ME_1}^2 = \overline{MF_3}^2$ gleich der Potenz der projektivischen Beziehung zwischen den Punktreihen t_1 und t_3. Für die zugeordneten Punkte $D_1 D_3$ lässt sich letztere aber anschreiben als $E_1 D_1 \cdot F_3 D_3 = E_1 D_1 \cdot E_1 G_1$; und dieses Produkt müsste gleich sein $\overline{ME_1}^2$. Nun ist aber in Fig. 113 im Halbkreis über $D_1 E_1$ die Halbsehne $G_1 N \perp D_1 E_1$, also

$$\overline{E_1 N}^2 = E_1 D_1 \cdot E_1 G_1.$$

folglich $E_1 L = 2 \cdot E_1 N$ gleich derjenigen Entfernung von E_1, in welcher der Fluchtpunkt F_3 auf t_3 liegen muss, damit durch t_1 und t_3 die gleichseitige Hyperbel zustande kommt.

3. Um also die gewünschte Lage des ursprünglichen Trägers t_2 zu finden, in welcher derselbe mit t_1 eine gleichseitige Hyperbel erzeugt, zeichnet man über $D_1 E_1$ den Halbkreis mit senkrechter Halbsehne $G_1 N$ und zieht einen Kreisbogen mit der doppelten Länge $E_1 N$. Ferner trägt man in F_2 die Strecke $G_1 E_1$ entgegengesetzt parallel t_1 nach aussen an als $F_2 F_3$ und dreht den Träger t_2 um D_1 soweit, bis F_3 als F_4 auf den vorigen Kreisbogen zu liegen kommt. Wenn dann auf t_4 wieder $F_4 D_4 \# F_3 D_3$ als $F_4 F_5$ abgetragen und $D_1 F_2$ in die Lage $D_1 F_5$ gedreht ist, so hat t_2 diejenige Lage t_5, dass t_1 und t_5 eine gleichseitige Hyperbel erzeugen. Denn die so erhaltene Lage von $t_1 t_5$ liefert ein Paar Parallelträger $t_1 \parallel t_4$, für welche $E_1 F_4 = 2 \cdot E_1 M'$, und

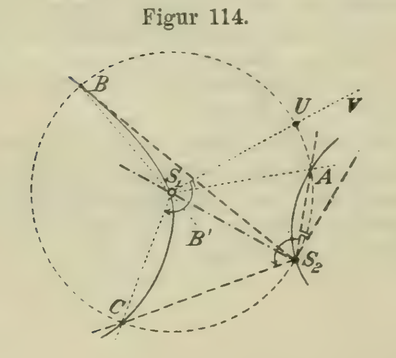
$\overline{E_1 M'}^2 = \overline{E_1 N}^2 = E_1 G_1 \cdot E_1 D_1 = E_1 D_1 \cdot F_4 D_4$

gleich der Potenz der Reihen $t_1 \overline{\wedge} t_4$; folglich entsteht für t_1 und t_4 die Figur 112 mit rechtwinkligen Dreiecken PMQ, also mit rechtwinkligen Asymptoten.

scheint wieder als Parallelstrecke $F_4 D_4$, und D_3 wandert um den Punkt D_1 nach D_4 (denn es entstehen zwei Parallelogramme $D_1 K F_3 D_3$ und $D_1 K F_4 D_4$ mit lauter gemeinsamen Seitenstrecken $D_1 D_3 = K F_3 = K F_4 = D_1 D_4$ und $K D_1 = F_3 D_3 = F_4 D_4$). Die gefundene gleichseitige Hyperbel liegt ausserhalb der Tangenten-Parallelogramme $t_1 \| t_4$ und $t_5 \| G_1 G_5$, berührt von aussen t_1 in G_1 und t_4 in F_4, hat als Mittelpunkt M' und als Asymptoten die beiden senkrechten Verbindungsgeraden von M' nach dem im Abstande $E_1 M' = E_1 P$ beiderseits E_1 und F_4 liegenden Punkte, die Potenzpunkte für die projektivische Beziehung der Punktreihen t_1 und t_4 (nicht aber Potenzpunkte für t_1 und t_5). Die Aufgabe würde dann unmöglich, wenn die Strecke $D_1 F_2 = K F_3$ so gross oder so klein wäre, dass der Kreis um K den Kreis mit Radius $E_1 L$ nicht mehr treffen würde.

Erkl. 380. Da über die Reihen $t_1 t_2$ keine weiteren Festsetzungen getroffen sind als die Zuordnung der Punktepaare EFG, so kann E_2 in beliebigem Punkte D_1 auf t_1 aufgelegt werden: entweder so, dass zu vorgeschriebenem Winkel $t_1 t_5$ der Punkt D_1 bestimmt wird, oder dass zu vorgegebenem Punkte D_1 der Winkel $t_1 t_5$ bestimmt wird. Es können also dieselben zwei gegebenen Punktreihen in sehr verschiedenen Lagen eine gleichseitige Hyperbel erzeugen. Man könnte für die vorkommende Grösse des Winkels $(t_1 t_5)$ ähnlich wie in Erkl. 372 trigonometrische Beziehungen aufstellen, und darnach die Grössen der Strecken und Winkel durch Rechnung finden, wie solches im Obenstehenden durch Konstruktion geschehen ist.

Figur 114.



Erkl. 381. Eine merkwürdige Beziehung besteht zwischen einer als Ordnungskurve erzeugten gleichseitigen Hyperbel und der aus dem Altertum bekannten Aufgabe der Dreiteilung eines beliebig gegebenen Winkels, sowie auch des Kreises. Sind nämlich S_1 und S_2 in Figur 114 die Scheitel zweier ungleichlaufenden kongruenten Büschel, so werden in einem mit Radius $S_1 S_2$ um S_1 beschriebenen Kreise durch die Strahlen von S_1 Mittelpunktwinkel, durch die entsprechenden Strahlen von S_2 Peripheriewinkel von gleicher Grösse gebildet, z. B. in Figur 114:

$$A S_1 V = A S_2 V,\ A S_1 C = A S_2 C \text{ u. s. w.}$$

Für die Schnittpunkte ABC der gleichseitigen Hyperbel mit dem Kreise tritt dazu noch die Eigenschaft dieser Winkel auf gleichem Bogen, also:

$$A S_2 B = A S_1 B' = 180 - A S_1 B \text{ u.} = \frac{1}{2} \cdot A S_1 B;$$

folglich:

$$\sphericalangle A S_1 B = \frac{2}{3} \cdot 180^0 = 120^0.$$

Ebenso

$$A S_2 C = A S_1 C \text{ und } = \frac{1}{2}(360 - A S_1 C);$$

folglich:

$$\sphericalangle A S_1 C = \frac{1}{3} \cdot 360 = 120^0.$$

Endlich

$$B S_2 C = B' S_1 C = 180 - B S_1 C \text{ u.} = \frac{1}{2} \cdot B S_1 C;$$

folglich:

$$\sphericalangle B S_1 C = \frac{2}{3} \cdot 180^0 = 120^0.$$

Ist insbesondere V der Hyperbelpunkt, nach welchem die Kreistangente in S_2 geht, so ist aus gleichen Gründen

$$\sphericalangle A S_2 V = A S_1 U,$$

also der Bogen $\widehat{S_2 A}$ des Sehnentangentenwinkels $A S_2 V$ doppelt so gross als der Bogen $\widehat{AU}$ des gleichgrossen Mittelpunktwinkels $A S_1 U$; folglich

$$\sphericalangle U S_1 A = \frac{1}{2} \cdot A S_1 S_2 = \frac{1}{3}\ U S_1 S_2,$$

d. h. der Schnittpunkt A der gleichseitigen Hyperbel mit dem Kreis schneidet ein Dritteil des Bogens $\widehat{US_2}$ bezw. des Winkels $U S_1 S_2$ ab. Um also einen gegebenen Winkel $U S_1 S_2$ in drei gleiche Teile zu teilen, errichte man die beliebige Senkrechte $S_2 V \perp S_1 S_2$ und zeichne diejenige gleichseitige Hyperbel, welche durch kongruente Büschel mit Scheiteln $S_1 S_2$ und Kurvenpunkt V erzeugt wird. Ihr Schnittpunkt A mit dem Kreisbogen $\widehat{S_2 U}$ liefert ein Drittel und zwei Drittel dieses Kreisbogens $\widehat{S_2 U}$, und ihre drei Kreisschnittpunkte ABC teilen den ganzen Kreis in drei gleiche Teile.

Aufgabe 258. Auf zwei parallelen Tangenten einer Hyperbel die potenzhaltenden Punkte aufzusuchen.

Andeutung. Man vergleiche Erkl. 377.

Aufgabe 259. Man soll über die Elemente der Hyperbel in Fig. 114 genauere Angaben machen.

Andeutung. Man verfahre nach Antwort 45 und Erkl. 153.

Aufgabe 260. Aus Erkl. 381 soll ein allgemeiner Satz über Kreis und Hyperbel abgeleitet werden.

Aufgabe 261. Die Eigenschaft des konstanten Produkts der Asymptotenabschnitte einer Hyperbel soll zur Hyperbelkonstruktion verwendet werden.

Erkl. 382. In Figur 115 ist jedesmal $MC = 21,3$ mm. Man kann also die zusammengehörigen Abschnitte

$$MA_1, MA_2;\ MB_1, MB_2; \cdots$$

entweder durch Rechnung erhalten oder durch Konstruktion. Im ersten Falle hat man für

$$MA_1 \cdot MA_2 \text{ bezw. } MB_1 \cdot MB_2$$

$$21,3^2 = 13 \cdot 34,9 = 18 \cdot 25,2 \text{ u. s. w.}$$

Im zweiten Falle zeichnet man einen Kreis mit einer Tangente von der Länge MC und zieht durch deren Endpunkt beliebig viele Sekanten des Kreises. Jedesmal geben die Sekantenabschnitte dasselbe Produkt $\overline{MC}^2$. [Um kleinere und grössere Abschnitte zu erhalten als dieser eine Kreis liefert, kann man jeweils einen weiteren Kreis von grösserem Radius verwenden, der dieselbe Tangente im gleichen Punkt berührt.]

Auflösung. Man wähle zwei beliebige Geraden zu Asymptoten, zeichne dann etwa mittels eines beliebigen Kreises (vgl. Erkl. 382) eine grosse Anzahl von Streckenpaaren, welche sämtlich gleiches Produkt ergeben, und trage dieselben auf allen vier Halbstrahlen $t_1 t_2 t_3 t_4$ der Asymptoten ab. Dann erhält man gleichzeitig auf sechs verschiedene Arten Hyperbeln:

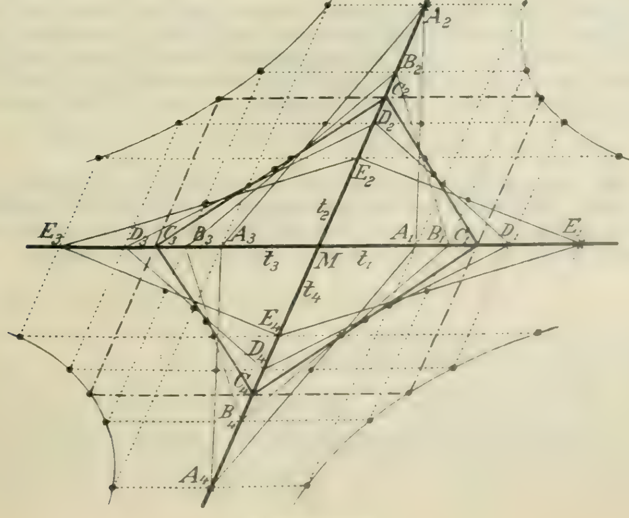
1. Im Winkel $t_1 t_2$ und seinem Scheitelwinkel $t_3 t_4$ liefern die Verbindungsgeraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ u. s. w. und $A_3 A_4$, $B_3 B_4$ u. s. w. die Tangenten einer Hyperbel als Klassenkurve, deren Potenz ist

$$MA_1 \cdot MA_2 = MB_1 \cdot MB_2 \cdots$$

Ist $MC_1 = MC_2 = MC_3 = MC_4$, so ist der Wert dieser gleichen Produkte auch gleich $\overline{MC}^2$.

2. Die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2 \cdots$ und $A_3 A_4$,

Figur 115.



Erkl. 383. Es verdient hervorgehoben zu werden, dass zwei Punktreihen der nach voriger Erklärung oder Figur 115 hergestellten Art $t_1 t_2$ projektivische Verwandtschaft aufweisen, also hinzutreten zu den dieselbe Eigenschaft aufweisenden kongruenten und ähnlichen Punktreihen. Hat man also etwa zu Erläuterung des Sekantensatzes auf den Seiten eines Quadrats nach innen und aussen die Strecken abgetragen, welche inhaltsgleiche Rechtecke liefern, so liegen die Endpunkte aller dieser gleichen Rechtecke auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt die Quadratecke ist. Dass die Quadratseiten selbst Asymptoten werden, erkennt man aus der Produktengleichheit $\overline{MC}^2 = 0 \cdot \infty$; die Quadratseite selbst liefert also auch ein unendlich schmal zusammengeschrumpftes Rechteck von unendlicher Länge, dessen unendlich ferner Eckpunkt ein Kurvenpunkt ist.

Erkl. 384. Unter den Dreiecken MA_1A_2 ist ein gleichschenkliges MC_1C_2; ebenso unter den Parallelogrammen $A_1MA_2\cdots$ ein Rhombus $C_1MC_2\cdots$ Die vierte Rhombusecke bezw. der Mittelpunkt von C_1C_2 liegt jedesmal auf der Winkelhalbierenden der Asymptoten und bildet den Scheitel des betreffenden Hyperbelastes. Und alle vier Hyperbeln haben als gemeinsame Achsen die Winkelhalbierenden der Asymptoten: die einen als Haupt- und Nebenachse, die konjugierten als Neben- und Hauptachse. — Dass die Kurvenäste in den Scheitelwinkeln wirklich zusammengehörige Aeste derselben Hyperbel bilden, folgt aus der Symmetrie (Satz 22). — Die beiden äusseren Hyperbeln der Fig. 115 sind den inneren ähnlich mit dem Längenverhältnis 1:2, dem Flächenverhältnis 1:4. In der That ist das Dreieck ihrer Tangenten je viermal so gross als das Dreieck der inneren Tangenten; auch die Potenz ist die vierfache, nämlich gleich:

$$2 \cdot MA_1 \cdot 2 \cdot MA_2 = 4 \cdot MA_1 \cdot MA_2.$$

B_3B_4, $C_3C_4 \cdots$ als Kurvenpunkte liefern dieselbe Hyperbel als Punktkurve, da ja der Berührungspunkt auf jeder Hyperbeltangente der Mittelpunkt ihres zwischen den Asymptoten liegenden Abschnitts ist.

3. Eine weitere Hyperbel als Punktkurve wird erzeugt durch die Eckpunkte derjenigen inhaltsgleichen Parallelogramme, welche die zusammengehörigen Streckenpaare bilden:

$$MA_1,\ MA_2 \cdots MA_3,\ MA_4.$$

Denn diese sind Mittelpunkte von Parallelstrecken zu den Tangenten $A_1A_2\cdots$, welche ebenso wie jene, inhaltsgleiche Dreiecke mit den Asymptoten bilden.

4. Im Winkel t_2t_3 und seinem Scheitelwinkel t_1t_4 entsteht durch die Verbindungsgerade der Punkte $A_2A_3\cdots$, $A_1A_4\cdots$ wieder eine Hyperbel als Klassenkurve mit derselben Potenz $MA_2 \cdot MA_3 = \overline{MC}^2$, wie die erste: sie hat mit jener gleiche Asymptoten und Achsen und gleiche Potenz und heisst die konjugierte.

5. Dieselbe Hyperbel im Winkel t_2t_3 bezw. t_1t_4 entsteht als Punktkurve durch die Mittelpunkte der vorgenannten Tangentenstrecken.

6. Eine weitere Hyperbel als Punktkurve entsteht im Winkel t_2t_3 bezw. t_1t_4 durch die Eckpunkte der analog der dritten Auflösung gebildeten inhaltsgleichen Parallelogramme.

Erkl. 385. Die in Figur 115 vorliegende Hyperbelkonstruktion erlaubt eine einfache Verknüpfung der Hyperbeltheorie im vorliegenden Zweige der Geometrie mit jener in der analytischen (Koordinaten-) Geometrie. Bezeichnet man nämlich den Kurvenpunkt durch die beiden Abstände x und y, welche die von ihm ausgehenden Parallelstrecken zu zwei festen Geraden (Koordinatenachsen) zwischen Kurvenpunkt und Achsenschnittpunkt aufweisen, so besteht für alle Punkte der äusseren bezw. inneren Hyperbeln in Figur 115 die Gleichung:

$$x \cdot y = \text{Const., nämlich} = \overline{MC}^2 \text{ bezw.} = \frac{1}{4}\,\overline{MC}^2.$$

Und das ist in der analytischen Geometrie die Gleichung einer Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten als Achsen eines Parallelkoordinatensystems. Die Gleichung derselben Hyperbel für die Winkelhalbierenden der Asymptoten als rechtwinklige Koordinatenachsen entsteht aus jener im vorigen Koordinatensystem $x'y'$ mit Winkel φ durch die Transformation:

$$x' = x - y\,ctg\,\frac{\varphi}{2},\quad y' = x + y\,ctg\,\frac{\varphi}{2}.$$

Folglich:

$$x'y' = \overline{MC}^2 = x^2 - y^2\,ctg^2\,\frac{\varphi}{2}.$$

Setzt man:

$$MC = a,\quad \overline{MC} \cdot tg\,\frac{\varphi}{2} = b,$$

so kommt die auf den Mittelpunkt und die Achsen der Kurve bezogene allgemein übliche Hyperbelgleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Aufgabe 262. Man konstruiere nach voriger Aufgabe eine Hyperbel, von welcher gegeben sind die Asymptoten und eine Tangente.

Aufgabe 263. Man konstruiere nach Aufgabe 261 eine Hyperbel, von welcher gegeben sind die Asymptoten und ein Kurvenpunkt.

Aufgabe 264. Von einer Hyperbel ist der eine Ast gegeben; man suche den andern Ast sowie die konjugierte Hyperbel.

Aufgabe 265. Von einer Hyperbel seien gegeben die Asymptoten und die Potenz. Man suche die parallelen Tangenten zu einer gegebenen Geraden.

Andeutung. Man kennt von den Asymptotenabschnitten der zu suchenden Tangente das Produkt und den Quotienten.

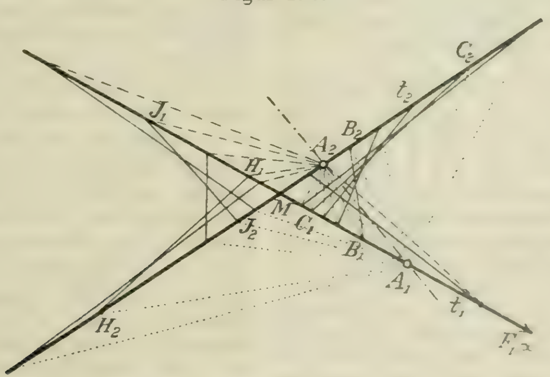
Aufgabe 266. In einem gegebenen Hyperbelpunkte die Tangente zu konstruieren, wenn die Asymptoten bekannt sind.

Erkl. 386. Noch einfacher ist umgekehrt die Auffindung des Berührungspunktes auf gegebener Tangente einer Hyperbel, wenn von dieser noch die Asymptoten bekannt sind: er ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen den Asymptoten. — Beide Aufgaben sind geeignet zur Auswechselung der Konstruktionsweisen der Hyperbel als Punktkurve bezw. Tangentenkurve.

Auflösung. Man ziehe in Punkt P Fig. 52 die Parallele zu einer der Asymptoten und verdopple die auf der andern Asymptote entstehende Strecke von M aus bis nach A_1'' bezw. A_2''; dann ist $A_1'' P A_2''$ die gesuchte Tangente.



Figur 116.



Aufgabe 267. Man konstruiere eine Hyperbel auf Grund der Antwort 48, 5.

Erkl. 387. Die nebenstehende Konstruktion liefert eine zweite Lösung zu der Aufgabe 264, den zweiten Hyperbelast zu finden, wenn der erste gegeben. — Man zieht ferner den Schluss, dass durch die Parallelstreckenpaare Punkte ausgeschnitten werden, welche Asymptotenabschnitte

Auflösung. Es seien wieder $t_1 t_2$ in Fig. 116 die gegebenen Asymptoten einer Hyperbel und $A_1 A_2$ eine beliebige ihrer Tangenten. Man lege durch A_1 und A_2 beliebig viele Paare von Parallelen:

$$A_1 B_2 \parallel A_2 B_1, \quad A_1 C_2 \parallel A_2 C_1,$$
$$A_1 H_2 \parallel A_2 H_1, \quad A_1 J_2 \parallel A_2 J_1, \text{ u. s. w.}$$

mit konstantem Produkt bilden; und insbesondere den Schluss, dass auch durch solche Parallelstreckenpaare zwei Punktreihen von projektivischer Verwandtschaft ausgeschnitten werden. — Die Mittelpunkte jeder Tangentenstrecke liefern wieder die Berührungspunkte. — Die Asymptoten entstehen selbst als Tangenten, wenn eine der Parallelstrecken in eine Asymptote hineinfällt.

Dann sind die Verbindungsgeraden

$$B_1B_2,\ C_1C_2,\ H_1H_2,\ J_1J_2,\ \text{u. s. w.}$$

neue Tangenten der Hyperbel, weil sie sämtlich mit den Asymptoten inhaltsgleiche Dreiecke bilden. Es ist nämlich jeweils wegen gemeinsamer Grundseite und Höhe (zwischen den Parallelen) z. B.:

$$MA_1A_2 = MB_1A_2 + B_1A_2A_1$$
$$= MB_1A_2 + B_1A_2B_2 = MB_1B_2;$$

und ebenso:

$$MA_1A_2 = H_2A_1A_2 - H_2A_1M$$
$$= H_2A_1H_1 - H_2A_1M = MH_1H_2.$$

Aufgabe 268. Man soll die Aufgaben 262 bezw. 263 und Aufgabe 264 auf Grund voriger Aufgabe 267 lösen.

Aufgabe 269. Welche Veränderungen erfährt eine durch projektivische Punktreihen erzeugte Kurve, wenn die eine der Punktreihen a) um den Trägerschnittpunkt gedreht, b) auf ihrem Träger verschoben wird.

Erkl. 388. Durch Zusammensetzung von einer Drehung und zwei Verschiebungen kann man jede beliebige gegenseitige Lage zweier Träger herbeiführen: die Drehung bringt die parallele Lage zur verlangten, und dann wird erst der eine und dann der andere der bestimmten Punkte in den Schnittpunkt geschoben. Dabei kann Parallelverschiebung eines Trägers ersetzt werden durch Verschiebung des andern in sich, bis der bestimmte Punkt im Schnittpunkt anlangt; denn kongruente Ortsveränderung beider Reihen unter Festhaltung ihres Winkels ändert nichts an der Kurvengattung.

Erkl. 389. Sowohl bei der Drehung als bei der Verschiebung einer der auf ihrem Träger festgehaltenen Punktreihen kann nach vorigen Aufgaben 251 bis 259 die Kurve einmal zum Kreis werden und einmal zur gleichseitigen Hyperbel. Die Träger selbst (einer oder beide) werden Hyperbel-Asymptoten, wenn (einmal oder beidemale) der Fluchtpunkt in den Schnittpunkt oder der Berührungspunkt ins Unendliche geschoben worden ist. — Die Parabel entsteht überhaupt nicht bei allgemein projektivischen Punktreihen im Endlichen, sondern nur bei ähnlichen oder kongruenten, d. h. wenn zwei zugeordnete Punkte beider Reihen ins Unendliche geschoben würden. Wohl aber würde die Parabel entstehen, wenn die eine von zwei beliebigen Reihen so verschoben würde, dass ihr Träger ins Unendliche zu liegen kommt.

Erkl. 390. Als Seitenstück zu Aufgabe 125 des I. Teiles dieses Lehrbuchs kann hier die Frage aufgestellt werden nach der Ortsveränderung des Projektionsscheitels zweier perspektivischen Punktreihen, wenn (nicht wie

Auflösung. Man denke sich die beiden Punktreihen bestimmt durch ihre beiden Fluchtpunkte und den Berührungspunkt auf einer derselben (vergl. Fig. 103 S. 163). Dann bilden die Parallelen zu t_1 und t_2 durch die Fluchtpunkte mit den Trägern ein Tangentenparallelogramm, welches die Kurve einschliessen oder ausschliessen muss, je nach Lage des einen (und folglich auch gleichartiger Lage des andern) Berührungspunktes.

a) Wird nun der eine Träger um den Schnittpunkt gedreht, so bleibt die Lage der beiden Berührungspunkte gegen das Parallelogramm ihrer Art nach unverändert, folglich ändert die Kurve nur ihre Gestalt, nicht ihre Gattung, bleibt also immer Ellipse oder bleibt Hyperbel, wenn sie es einmal ist.

b) Wird die eine Punktreihe t_2 auf ihrem Träger verschoben, so hängt die Kurvengattung davon ab, ob ihr (und damit gleichzeitig der andere) Berührungspunkt seine Lage innerhalb oder ausserhalb des vorigen Tangentenparallelogramms beibehält oder verändert. Denn das Tangentenparallelogramm behält die Seite D_1G_1 nebst deren anstossenden Parallelseiten fest; die vierte Seite aber verschiebt sich mit F_2, und mit ihr wechselt auch der dem Schnittpunkte D_1 zugeordnete Berührungspunkt D_2 der Reihe t_2 seine Lage. Solange der Berührungspunkt innerhalb ist, hat man Ellipsen, solange er ausserhalb ist, Hyperbeln; beim Zusammenfallen entsprechender Punkte im Schnittpunkt findet der Wechsel statt. Als Uebergangsfigur entsteht die perspektivische Lage der Träger, als Kurve in

dort der Schnittpunkt der Träger festgehalten und ihr Winkel geändert, sondern) der Winkel der Träger festgehalten und der Schnittpunkt so geändert wird, dass stets zwei andere entsprechende Punkte beider Reihen in denselben hineingeschoben werden. Der Scheitelpunkt entsteht wieder wie dort (Figur 85 des I. Teils dieses Lehrbuchs) als vierte Ecke des Parallelogramms der Träger und ihrer Fluchtpunkte. Dessen Seiten sind also nunmehr S_1A_1 und F_2A_2, S_1B_1 und F_2B_2 u. s. w. Da aber diese Seiten wegen der projektivischen Beziehungen stets gleiches Produkt erhalten, so bilden die vierten Eckpunkte der Parallelogramme als geometrischen Ort für den Projektionsscheitel nach Aufgabe 261, 3 eine Hyperbel, welche die Träger zu Asymptoten und die vierfache Potenz der projektivischen Beziehung beider Punktreihen zur Hyperbelpotenz hat. solchem Falle das Punktepaar des Trägerschnittpunktes und des Projektionsscheitels, bezw. das Geradenstück zwischen beiden Punkten als unendlich schmale Grenzfigur der vorherigen Ellipse, oder das beiderseits ins Unendliche reichende äussere Geradenstück als unendlich schmale Grenzfigur der nachherigen Hyperbeln.

Aufgabe 270. Welche Veränderung erfährt eine durch projektivische Strahlenbüschel erzeugte Kurve, wenn der eine der Büschel a) sich selbst parallel verschoben, b) um seinen Scheitel gedreht wird?

Erkl. 391. Wird der zweite Büschelscheitel mit dem ersten zum Zusammenfallen gebracht, so entsteht als Kurve das Geradenpaar der vorhandenen getrennten oder die Doppelgerade der zusammenfallenden Doppelstrahlen bezw. der singuläre Punkt, welcher als Spezialfall der vor dem Zusammenfallen erzeugten Hyperbel oder Parabel bezw. Ellipse verbleibt. Wandert der eine Büschelscheitel ins Unendliche, so entsteht Parabel bezw. Hyperbel, erzeugt durch einen Parallelstrahlenbüschel und einen Büschel mit Scheitel im Endlichen; kommt auch der andere Scheitel ins Unendliche, so entsteht Hyperbel. — Bei der Hyperbel kann durch Parallelverschiebung der Scheitel zweimal perspektivische Lage eintreten, wenn die Parallelstrahlen zusammenfallen: die Hyperbel artet aus zum Geradenpaar, nämlich der Perspektivitätsachse mit der Verbindungsgeraden der Scheitel. — Bei der Drehung beider Büschel um gleiche Winkel zeigen Kreis und gleichseitige Hyperbel die Eigentümlichkeit, dass dieselbe Kurve in sich selbst verschoben wird; denn da bei ihnen schon zuvor alle Winkel entsprechender Strahlen gleichlaufend bezw. ungleichlaufend gleichgross sind, so fallen bei der genannten Drehung auch immer die Strahlen wieder in solche, die vorher schon zugeordnet waren.

Erkl. 392. Durch Zusammensetzung einer Parallelverschiebung und einer Drehung kann jede beliebige gegenseitige Lage zweier Büschel herbeigeführt werden. Bei der Drehung eines von zwei gleichlaufenden Büscheln entstehen aus einer Parabel erst lauter Ellipsen und dann unter Grenzübergang durch eine zweite Parabel lauter Hyperbeln, die wieder der ersten Parabelfigur zustreben. In diesem Falle, sowie bei dem

Auflösung. a) Die Kurvengattung wird bestimmt durch die Anzahl (0, 1, 2) der unendlich fernen Schnittpunkte entsprechender Strahlen; bei Parallelverschiebung bleiben aber parallele Strahlen parallel, konvergente Strahlen konvergent, folglich behält auch die Kurve ihre unendlich fernen Punkte nach Zahl und Lage bei. Man erhält also bei Parallelverschiebung des einen Büschels nur verschiedene Gestalten derselben ursprünglich vorhandenen Kurvengattung, wobei eine Parabel ihre Achsenrichtung, eine Hyperbel ihre Asymtotenrichtungen noch festhält. — Dasselbe Ergebnis, aber mit Wechsel der Achsenrichtung bezw. Asymptotenrichtungen, nur mit Festhaltung des Winkels der beiden letzteren, entsteht bei gleichzeitiger Drehung beider Büschel um den gleichwendig gleichen Winkelbetrag, gleich- oder ungleichlaufend mit der zugeordneten Umlaufsrichtung der beiden Büschel.

b) Wird bloss der eine Büschel um seinen Scheitel gedreht, so ist nur bei gleichlaufenden Büscheln Veränderung der Gattung möglich; denn ungleichlaufende Büschel erzeugen in jeder Lage Hyperbel mit Scheiteln auf getrennten Aesten. Um die Veränderung bei den gleichlaufenden Büscheln zu beurteilen, beachte man die bei denselben vorhandenen gleichen Winkelgrössen entsprechender Strahlenpaare (Satz 8 a des I. Teils), und zwar die gleichgerichtet gleichen Winkel, welche die Potenzstrahlen als Doppelstrahlen mit Winkel Null unter sich enthalten. Fällt von den Potenzstrahlen des einen Büschels selbst einer in die parallele Richtung des

der Drehung eines von zwei ungleichlaufenden Büscheln kommt unter der Reihe der Hyperbeln einmal die gleichseitige vor, wenn nämlich die zugeordneten Normalstrahlen $u_1 v_1$, $u_2 v_2$ (Antw. 38 des I. Teils dieses Lehrbuchs) parallel werden — und einmal tritt die perspektivische Lage auf, wobei die Hyperbel ausartet zum Geradenpaar, wie oben in Erkl. 391.

Erkl. 393. Als analoge Frage zu Erkl. 390 und Seitenstück zu Aufgabe 126 des I. Teiles dieses Lehrbuchs wäre hier zu suchen nach der Ortsveränderung der Perspektivitätsachse zweier projektivischen Strahlenbüschel, wenn (nicht wie dort der Verbindungsstrahl der Scheitel festgehalten und ihr Abstand geändert, sondern) der Abstand der Scheitel festgehalten und der Verbindungsstrahl in der Weise geändert wird, dass stets zwei andere entsprechenden Strahlen beider Büschel in denselben hereinfallen. Diese Aufgabe kann aber mit den an dieser Stelle der Entwicklung vorliegenden Mitteln nicht gelöst werden: es entsteht nämlich als Umhüllungsfigur dieser Geraden eine Kurve, welche die festgehaltenen Schnittpunkte zu Brennpunkten hat: eine Ellipse bei gleichlaufenden, eine Hyperbel bei ungleichlaufenden Büscheln, eine Parabel in dem Grenzfall, dass der eine Scheitel im Unendlichen liegt.

zugeordneten, so sind dies die einzigen Parallelstrahlen und die Kurve eine Parabel. Fällt sonst einer der Anfangsschenkel entsprechend gleicher Winkel in die Parallelrichtung zum zugeordneten, so müssen auch die Endschenkel dieser Winkel parallel sein, und man erhält eine Hyperbel. Treffen aber keine Anfangsschenkel in paralleler Richtung zusammen, so kann auch kein Paar der Endschenkel parallel werden, und die Kurve wird Ellipse. Der letzte oder der vorletzte Fall tritt also ein, wenn die gleichen Winkel der Potenzstrahlen beider Büschel so liegen, dass es überhaupt Parallelstrahlen zwischen ihnen gibt oder nicht gibt. So lange daher die Richtungen der Potenzstrahlen des ersten Büschels durch die den gleichen Winkel einschliessenden Richtungen der Potenzstrahlen des zweiten Büschels getrennt werden, so entstehen immer Ellipsen, im andern Falle immer Hyperbeln, im Grenzfalle je eine Parabel.

---

6. Aufgaben über die Erzeugung der Kurven als „Kegelschnitte“.

(Zu Abschnitt 4 c.)

Aufgabe 271. Man soll untersuchen, welche projektivischen Beziehungen bestehen bei der Projektion einer Kurve auf eine andere Ebene.

Erkl. 394. Das ganze ebene System ε ist projektivisch in perspektivischer Lage zu dem ebenen System ε'. Daher müssen in Figur 117 die Schnittpunkte von $t_1 t_2$ und von $t_1' t_2'$ auf einer Geraden durch S liegen. Ebenso die Büschelscheitel $S_1 S_1'$ bezw. $S_2 S_2'$ oder die von entsprechenden Strahlen beider Büschel ausgeschnittenen Kurvenpunkte, die Berührungspunkte bezw. Schnittpunkte entsprechender Tangenten mit der Kurve und mit entsprechenden andern Tangenten. — Ausserdem müssen die entsprechenden Geraden einander jeweils im gleichen Punkte der Schnittkante $(\varepsilon\varepsilon')$ treffen, so $t_1 t_1'$, $t_2 t_2'$ und jedes übrige Paar entsprechender Tangenten oder entsprechender Strahlenpaare beider Büschel. — Betrachtet man die Fig. 117 als ebene Figur, so sind die Figuren ε und ε' kollinear, d. h. für Dreiecke, Vierecke, Kurven u. s. w. gilt die Beziehung, dass die Verbindungsgeraden je zweier entsprechenden Punkte durch einen Punkt gehen, und die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Geraden auf einer Geraden liegen.

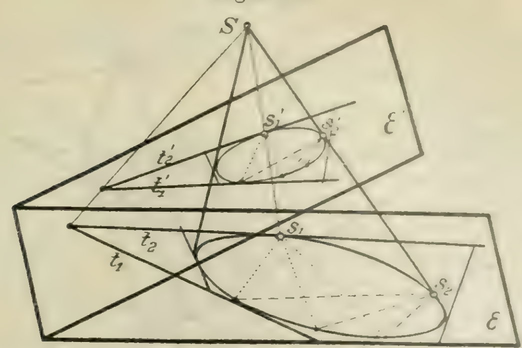
Erkl. 395. In Figur 117 besteht neben den projektivischen Grundgebilden auch projektivi-

Auflösung. 1. Sei ε in Fig. 117 die Originalebene und ε' die Bildebene, und in der Ebene ε die Kurve erzeugt durch projektivische Punktreihen $t_1 \barwedge t_2$ oder durch projektivische Strahlenbüschel $S_1 \barwedge S_2$. Dann sind wegen der Projektion $t_1 \barwedge t_1'$, $t_2 \barwedge t_2'$, also wird zunächst alle vier vorhandenen Punktreihen projektivisch; ferner $S_1 \barwedge S_1'$, $S_2 \barwedge S_2'$, also auch alle vier vorhandenen Strahlenbüschel projektivisch. Nach Satz 18 ist aber auch jeder Büschel S projektivisch zu den Punktreihen, welche dieselbe Kurve erzeugen, also sind sämtliche acht vorhandenen Grundgebilde projektivisch, nämlich:

$$t_1 \barwedge t_2 \barwedge t_1' \barwedge t_2' \barwedge S_1 \barwedge S_2 \barwedge S_1' \barwedge S_2'.$$

2. Von diesen projektivischen Beziehungen sind in perspektivischer Lage nur $t_1 \doublebarwedge t_1'$ und $t_2 \doublebarwedge t_2'$, weil diese Punktreihen in gleicher Ebene mit dem Scheitel S liegen. Dagegen sind S_1 und S_1' nicht in perspektivischer Lage, wenn auch in viel engerer Beziehung als etwa $S_1' \barwedge S_2$. Denn die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Strahlen liegen zwar auf einer Geraden: der Schnittkante der Ebene ε und ε'; aber die Büschel liegen in

Figur 117.



sche Verwandtschaft zwischen den Ebenen selbst, also ihren sämtlichen Kurven, Vielecken u. s. w. Unter den acht projektivisch verwandten Grundgebilden $t_1 \overline{\wedge} t_2 \overline{\wedge} t_1' \overline{\wedge} t_2' \wedge S_1 \overline{\wedge} S_2 \wedge S_1' \overline{\wedge} S_2'$ gibt es im ganzen 28 verwandte Paare. Davon sind: getrennten Ebenen. Ebenso sind $t_1 \wedge t_2'$ zwei projektivische Punktreihen auf kreuzenden oder windschiefen Geraden, also in einer entfernteren Art verwandt als die in gleicher Ebene liegenden $t_1 \overline{\wedge} t_2$.

2 Paare: Projektivische Punktreihen in perspektivischer Lage: $t_1 \overline{\wedge} t_1'$, $t_2 \overline{\wedge} t_2'$.

2 Paare: Projektivische Punktreihen in schiefer Lage in gleicher Ebene: $t_1 \wedge t_2$, $t_1' \wedge t_2'$,

2 Paare: Projektivische Punktreihen auf kreuzenden Geraden: $t_1 \wedge t_2'$; $t_2 \wedge t_1'$,

2 Paare: Punktreihen und Strahlenbüschel in gleicher Ebene mit vereinigt liegenden Trägern:

$$t_2 \overline{\wedge} S_1,\ t_2' \overline{\wedge} S_1'.$$

6 Paare: Punktreihen und Strahlenbüschel in gleicher Ebene mit getrennt liegenden Trägern:

$$t_1 \overline{\wedge} S_1,\ t_1' \wedge S_1',\ t_1 \overline{\wedge} S_2 \wedge t_2,\ t_1' \wedge S_2' \wedge t_2'.$$

8 Paare: Punktreihen und Strahlenbüschel in verschiedenen Ebenen:

$$t_1' \wedge S_1 \wedge t_2',\ t_1 \overline{\wedge} S_1' \overline{\wedge} t_2,\ t_1' \overline{\wedge} S_2 \overline{\wedge} t_2',\ t_1 \wedge S_2' \wedge t_2,$$

2 Paare: Projektivische Strahlenbüschel in schiefer Lage in gleicher Ebene: $S_1 \wedge S_2$, $S_1' \wedge S_2'$.

2 Paare: Projektivische Strahlenbüschel in verschiedenen Ebenen im gleichen Ebenenbüschel:

$$S_1 \overline{\wedge} S_1',\ S_2 \wedge S_2',$$

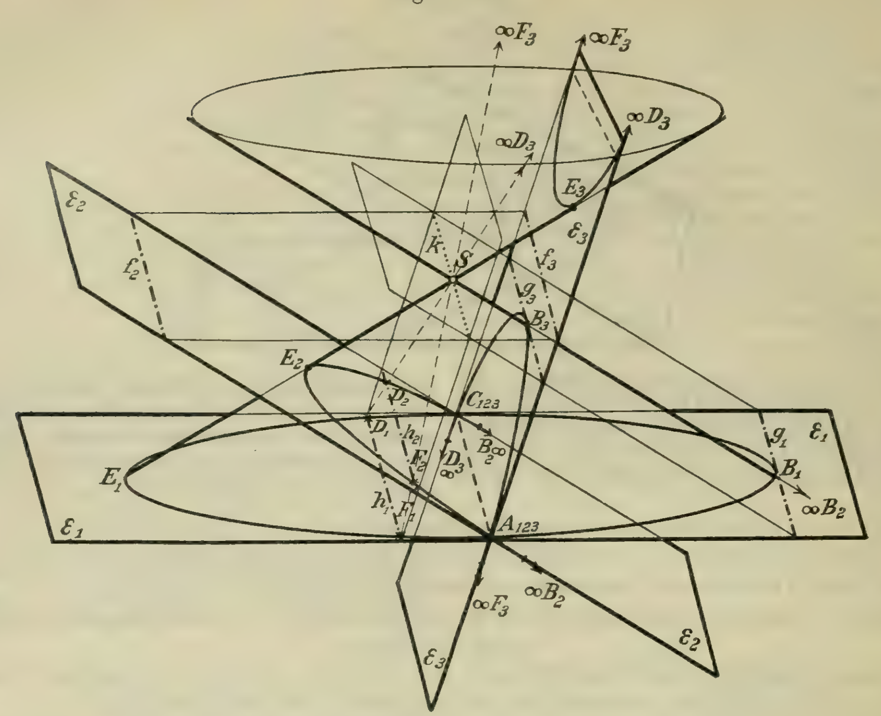
2 Paare: Projektivische Strahlenbüschel in verschiedenen Ebenen allgemein: $S_1 \wedge S_2'$. $S_2 \wedge S_1'$.

Aufgabe 272. Welche Veränderungen der Elemente in Fig. 117 erzeugen die übrigen Beziehungsarten projektivischer Kurven?

Erkl. 396. Man könnte die vorstehende Frage auch so beantworten, dass die Aenderungen unter Festhaltung des Scheitels vor sich gehen. Dabei wird z. B. die Kurve in ε' Ellipse bleiben, wenn die Kurve in ε dadurch zur Parabel wird, dass der Scheitel S_2 allein ins Unendliche verlegt wird, oder der Tangententräger zunächst dem Punkt S_2 allein ins Unendliche gelangt. Dadurch würde S_2' auf die Gegenachse in ε' gelangen, bezw. der Tangententräger nächst dem Punkt S_2' in die Gegenachse in ε' hineinfallen. Würden S_1 und S_2 ins Unendliche verlegt, oder der Berührungspunkt auf t_1 und t_2 ins Unendliche verschoben, so wäre die Kurve in ε eine Hyperbel, und in ε' lägen S_1' und S_2' bezw. die Berührungspunkte von t_1' und t_2' auf der Gegenachse.

Auflösung. Um die verschiedenen Beziehungsarten projektivisch verwandter Kurven zu erhalten, bedarf es in Fig. 117 keiner andern Veränderungen als der Verlegung des Projektionsscheitels S. Wird dieser so gelegt, dass die Parallelebene durch S zu ε' die festgehaltene Kurve in Ebene ε berührt oder schneidet, so erzeugen die Punktreihen $t_1' t_2'$ bezw. die Strahlenbüschel $S_1' S_2'$ in ε' eine Parabel oder Hyperbel. Würde umgekehrt die Kurve in ε' festgehalten und der Projektionsscheitel S so gelegt, dass die Parallelebene durch S zu ε die feste Kurve in ε' berührt oder schneidet, so erzeugen die Punktreihen $t_1 t_2$ bezw. die Strahlenbüschel $S_1 S_2$ in ε eine Parabel oder Hyperbel.

Figur 118.



Aufgabe 273. Man soll für die drei Kurven der Fig. 118 die Grenzen angeben für die verschiedenen Fälle der projektivischen Beziehungsweisen zwischen den einzelnen Kurvengattungen nach Antwort der Frage 52.

Erkl. 397. Wird eine Ebene ε auf eine parallele Ebene ε' abgebildet, so ist die Parallelebene durch S zu ε und zu ε' dieselbe, nämlich beiden parallel; die unendlich fernen Geraden beider Ebenen ε und ε' selbst sind identisch, und mit ihr fällt auch die Gegenachse zusammen als Schnittgerade mit der dritten Parallelebene. Daher müssen die Kurven in beiden Ebenen gleiche Beziehung zur gemeinsamen Gegenachse, d. h. zur unendlich fernen Geraden haben, und somit von gleicher Gattung sein.

Erkl. 398. Die Sehne AC in Figur 108 ist als gemeinsame Sehne der drei dort gezeichneten Kegelschnitte gewählt. Sie hat aber dennoch für die vorliegende Untersuchung ganz selbständigen Charakter als beliebige Sehne für jede einzelne der drei Kurven. Man kann also für die Ellipse in ε_1 eine andere Sehne denken, für die Parabel in ε_2 wieder eine andere, und für die Hyperbel in ε_3 noch eine dritte. Jedesmal gibt es zu der willkürlich gewählten Sehne zwei (bei der Parabel eine) parallele Tangenten

Auflösung. Man kann die verschiedenen Fälle darstellen durch Projektion von S aus auf Ebenen, welche alle durch dieselbe Schnittkante AC in Fig. 118 hindurchgehen, da bei Parallelverschiebung einer Ebene oder bei Durchlaufung aller verschiedenen Sehnen durch die Gerade AC die Gattung der Kurven unverändert bleibt. Man erhält hienach folgende drei Gruppen von je drei Fällen:

1. Die Ellipse in Ebene ε_1 kann von S aus abgebildet werden als Ellipse in allen den Ebenen durch AC, d. h. in allen Ebenen des Ebenenbüschels mit Achse AC, für welche die Gegenachse in ε_1 ausserhalb der Kurve liegt. Das ist der Fall für alle Ebenen, deren Neigungswinkel gegen ε_1 kleiner ist, als für Ebene ε_2. Solche Ebenen des Ebenenbüschels (AC) entstehen durch Drehung der Ebene ε_2 um AC gegen den Uhrzeiger bis in die Lage ε_1 selbst und weiter durch ε_1 hindurch bis in diejenige Lage, wo die gedrehte Ebene parallel würde mit der Ebene von S durch die anderseitige Paralleltangente zu g_1 an die Ellipse. Denn mit Drehung von ε_2 dreht sich auch

an die Kurve; und die Projektionsebenen dieser Paralleltangenten vom Scheitel S aus bestimmen die Richtung der Ebenen durch die gewählte Sehne, in welchen Abbildung als Parabel erfolgt.

Erkl. 399. Für jeden der drei Kegelschnitte teilt sich bei der Abbildung nach den drei Gattungen der Ebenenbüschel mit der gewählten Sehne als Achse in zwei Winkelräume: jede Ebene des einen Winkelraumes (mit seinem Scheitelwinkelraum) liefert Abbildung als Ellipse, jede Ebene des andern Winkelraumes (mit seinem Scheitelwinkelraum) liefert Abbildung als Hyperbel, und nur die beiden Trennungsebenen dieser beiden Winkelräume liefern Abbildung als Parabel. Die Unterscheidung dieser zwei Winkelräume geschieht am einfachsten dadurch, dass man durch den Projektionsscheitel S selbst eine parallele Gerade k legt zu der gewählten Kurvensehne, und den Ebenenbüschel in Betracht zieht, welcher diese Gerade als Achse hat. Dann bilden sofort die Projektionsebenen der zu $k \parallel AC$ parallelen Tangenten die Trennungsebenen derjenigen beiden Winkelräume dieses Ebenenbüschels, deren Ebenen die Originalkurve schneiden oder nicht schneiden. Und die Ebenen des Ebenenbüschels mit Achse AC unterscheiden sich dann je nach ihrer Parallelität mit den Ebenen jenes Ebenenbüschels.

Erkl. 400. Da in Figur 118 eine gemeinsame Sehne AC gewählt ist, so entsteht auch eine gemeinsame Parallele k durch S als Achse eines gemeinsamen Ebenenbüschels. In der That enthält in Figur 118 dieselbe Ebene durch k die Paralleltangenten an Ellipse ε_1, Parabel ε_2, Hyperbel ε_3, nämlich $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$, wobei g_2 die unendlich ferne Tangente der Parabel ε_2 ist; und ebenso enthält eine gemeinsame Ebene durch k auch die drei andern Paralleltangenten zu $AC \parallel k$ an Ellipse ε_1, Parabel ε_2, Hyperbel ε_3, ziemlich genau die Ebene durch die Achse k und die Kegelkante $E_1E_2E_3$. Dabei sind auch die drei Unterabteilungen des Ebenenbüschels (AC), welche in nebenstehender Auflösung getrennt werden, nur theoretisch verschieden in den drei Fällen, in der Anwendung auf die besondere Figur 118 aber identisch.

Erkl. 401. Dass die nebenstehende Auflösung der Aufgabe nicht etwa nur die speziellen Fälle mit Kante AC in sich begreift, sondern die allgemeine Lösung der Aufgabe liefert, kann dadurch nachgewiesen werden, dass jede beliebige Bildebene des Raumes auf eine der vorhandenen zurückgeführt werden kann. In der That ist es nur die Richtung der gewählten Ebene, welche den Ausschlag über die Gattung der Bildkurve gibt, nicht ihre Lage. Denn legt man zu der Schnittkante der Originalebene mit der gewählten Bildebene die Parallelgerade

die Parallelebene Sg_1; und die Gegenachse g_1 wandert nach rechts fort bis durchs Unendliche, und auf der andern Seite wieder herein bis zu der zu g_1 und AC parallelen Tangente an die Ellipse in ε_1 auf der entgegengesetzten Seite. — Als Parabel wird die Ellipse in ε_1 abgebildet auf denjenigen beiden Ebenen durch AC, von denen die eine wie ε_2 parallel läuft mit der einen, die andere parallel mit der andern der beiden Ebenen von S durch diejenigen Tangenten an die Ellipse, welche beiderseits parallel AC gezogen werden. — Als Hyperbel wird die Ellipse in ε_1 abgebildet auf allen denjenigen noch übrigen Ebenen des Ebenenbüschels AC, für welche die Gegenachse in ε_1 die Ellipse schneidet, und deren Neigungswinkel gegen ε_1 folglich grösser ist als der von ε_2. Solche Ebenen entstehen durch Drehung von ε_2 um AC mit dem Uhrzeiger in die Lage von ε_3 und weiter durch ε_3 hindurch bis wieder in die Lage parallel der Projektionsebene der andernseitigen Paralleltangente zu $g_1 \parallel AC$ an die Ellipse.

2. Die Parabel in Ebene ε_2 wird abgebildet als Ellipse in Ebene ε_1 und in allen gleichartigen Ebenen des Ebenenbüschels (AC) in dem Winkel derjenigen beiden Ebenen durch AC, von welchen die eine parallel läuft mit Ebene ε_2, die andere mit der Projektionsebene von S aus nach der Paralleltangente an die Parabel in ε_2 zu $f_2 \parallel AC$; denn für alle diese Ebenen des Büschels läuft die Gegenachse in ε_2 ausserhalb der Kurve. Als Parabel wird die Parabel in ε_2 nur auf eine einzige andere Ebene des Ebenenbüschels abgebildet, nämlich auf die Parallelebene zur Projektionsebene der Paralleltangente zu AC an die Parabel. Als Hyperbel dagegen wird die Parabel in ε_2 abgebildet auf alle die übrigen mit ε_3 gleichartigen Ebenen des Büschels in dem Nebenwinkel der vorgenannten beiden Ebenen, von denen die eine parallel ε_2, die andere parallel der Projektionsebene einer Parabeltangente parallel AC; denn für alle diese Ebenen des Büschels muss die Gegenachse in ε_2 die Parabel selbst durchschneiden.

3. Die Hyperbel in Ebene ε_3 wird projiziert als Ellipse in allen Ebenen des Ebenenbüschels AC, die parallel sind zu den Ebenen durch S zwischen den Projektionsebenen der beiden Paralleltangenten zu AC an die Hyperbel, denn für diese alle läuft die Gegenachse in ε_3 zwischen den beiden Hyperbelästen parallel zu g_3 hindurch, ohne die Hyperbel zu treffen. Als Parabel wird die Hyperbel projiziert nur in den beiden

k durch S, sowie die beiden Paralleltangenten zu k an die Originalkurve, so liefert der Ebenenbüschel mit Achse k als Projektionsebenen jener beiden Tangenten sofort die zwei einzigen Richtungen für Ebenen mit Parabelabbildung, sowie im Innenwinkel bezw. Nebenwinkel mit Ellipsen- bezw. Hyperbelabbildung. Und durch diejenige dieser Richtungen, mit welcher die gegebene Projektionsebene parallel ist, wird die Gattung der Bildkurve bestimmt.

Ebenen des Büschels AC, welche den Projektionsebenen der Paralleltangenten zu AC an die Hyperbel parallel sind, weil nur für diese die Gegenachse in eben jene Paralleltangenten hineinfällt. Als Hyperbel erscheint die Abbildung der Hyperbel in allen übrigen Ebenen durch AC, welche wie ε_1 im Nebenwinkel derjenigen ebengenannten beiden Ebenen liegen, welche den Projektionsebenen der Paralleltangenten zu AC an die Hyperbel parallel sind.

Aufgabe 274. Man soll die dreierlei Kegel, welche durch Projektion einer Ellipse, Parabel, Hyperbel entstehen, gegeneinander unterscheiden.

Erkl. 402. Diejenige Kurve, durch deren Projektion ein Kegel entsteht, wird auch die Leitkurve des Kegels genannt; ebenso auch dasjenige Vieleck das Leitpolygon einer Pyramide, durch dessen Projektion eine Pyramide entsteht. Ist der projizierende Scheitel ein unendlich ferner Punkt, dann hat man im ersten Falle die Leitkurve eines Cylinders, im letzten Falle das Leitpolygon eines Prisma.

Erkl. 403. Es wäre eine völlig unrichtige Vorstellung, wenn man sich einen parabolischen oder hyperbolischen Kegel als in der Rundung nicht geschlossen denken wollte. Denn wenn es auch nicht möglich ist, in dem endlichen Bereich der Zeichnungsebene die ganze Erstreckung der Kurve zu verzeichnen, so ist es doch stets möglich, durch einen im Endlichen gelegenen Projektionsscheitel alle Projektionsstrahlen auch nach den unendlich fernen Kurvenpunkten zu legen. Der projizierende Kegel wird also in seiner Rundung stets geschlossen sein: er besitzt Ellipsenschnitte ebensowohl wie Parabelschnitte und Hyperbelschnitte. In der Längenerstreckung der Projektionsstrahlen allerdings kann man einen Unterschied machen, je nachdem man dieselben als Halbstrahlen des Scheitels denkt, oder auch über den Scheitel verlängert. Und damit ergibt sich auch eine etwaige Unterscheidung zwischen elliptischem und parabolischem Kegel einerseits und hyperbolischem Kegel andererseits, indem letzterer stets als Doppelkegel (Kegel nebst Scheitelkegel) auftreten muss, die beiden ersteren aber schon als einseitige Kegel (Kegel ohne Scheitelkegel) vorgestellt werden können. — Denkt man sich in Figur 118 die Ebenen ε_1, ε_2, ε_3 der Reihe nach auf der horizontalen Zeichnungsebene aufgelegt, so hat man für die Ellipse ε_1 den gewöhnlich vorgestellten einfachen Kegel (in aufrechter Stellung), für die Parabel ε_2 einen Kegel mit einer Parallelkante zur Tischebene (der sich aber deshalb keineswegs etwa nach rechts hin weiter erstreckt als nach unten), für die Hyperbel ε_3 einen Doppelkegel in quer

Auflösung. 1. Man bezeichnet die dreierlei Kegel wohl mit verschiedener Benennung je nach der erzeugenden Kurve als elliptischen, parabolischen, hyperbolischen Kegel, aber im Grunde ist keiner dieser drei vom andern verschieden. Denn da ein jeder dieser Kegel geschnitten werden kann in einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel, so kann er auch angesehen werden als Projektion dieser andern Kurvengattung, also als Kegel der andern Gattung. Während nämlich die Punkte einer Parabel oder Hyperbel sich bis ins Unendliche erstrecken, weisen die Projektionsstrahlen aus S gar keinen Unterschied nach Art oder Lage auf, ob sie endlich oder unendlich fern gelegene Kurvenpunkte projizieren. Würde man sich also z. B. die Projektionsstrahlen in Fig. 118 aus festem Material und jeweils unendlich lang vorstellen, so entstünde genau derselbe Kegel mit Scheitel S durch Projektion jeder der drei verschiedenen Kurven in ε_1, ε_2 oder ε_3.

2. Andere Ergebnisse erhält man, wenn der Scheitel des Kegels ins Unendliche rückt, also für den Cylinder. Dieser kann von keiner Ebene in einer andern Kurvengattung geschnitten werden, als seine Leitkurve war. Denn die Parallelebene durch den Scheitel zur Bildebene ist immer die unendlich ferne Ebene des Raumes selbst, liefert also durch ihren Schnitt mit der Originalebene deren unendlich ferne Gerade als ihre Gegenachse; und somit fällt die für die Abbildungskurve massgebende Beziehung der Originalkurve zur Gegenachse zusammen mit der Beziehung der Originalkurve zur unendlich fernen Geraden: war die Originalkurve Ellipse, Parabel oder Hyperbel, so wird auch jede Schnittkurve wieder nur Ellipse, Parabel oder Hyperbel.

Demnach haben der elliptische, parabolische und hyperbolische Cylinder auch verschiedenes Aussehen: nur der

gelegter Stellung [dessen Rundung links (rechts) oben geschlossen wird durch die Verlängerungen der Kanten von rechts (links) unten].

Erkl. 404. Eine Vorstellung von den drei Cylinderarten durch körperliches Modell kann man sich auf folgende Weise verschaffen: In einem etwas steifen Papier schneidet man die Linie der verlangten Leitkurve mit der Schere aus und schiebt durch den entstehenden Spalt ein anderes Blatt Papier unter beliebigem Neigungswinkel hindurch. Dessen gewölbte Fläche liefert dann einen elliptischen, parabolischen, hyperbolischen Cylinder, wenn die Leitkurve Ellipse, Parabel, Hyperbel war. Ein Abbild einer solchen Cylinderfläche liefert auch jede Ueberwölbung eines Kanalrohres, einer Bahnhofshalle, einer Kirche u. s. w. Und zwar wird die Wölbung, wenn der Abschluss des Gewölbes als Leitkurve angesehen wird, in der Regel als ein senkrechter Cylinder erscheinen, bei schiefem Durchschnitt aber, etwa beim Zusammentreffen zweier Gewölbe, wohl auch als schiefer Cylinder. erstere liefert einen in der Rundung im Endlichen geschlossenen Körper, der zweite ist nach einer Seite, der dritte (aus zwei getrennten Stücken bestehend) nach zwei Seiten erst im Unendlichen geschlossen, d. h. für die praktische Auffassung offen. Während aber in der Massgeometrie die Cylinder jeder für sich und getrennt vom Kegel eigene Behandlung erfordern, beruht für die projektivisch-geometrische Auffassung der Unterschied allein auf der Eigentümlichkeit des unendlich fernen Scheitelpunktes, so dass die dreierlei Kegel keine besondere Behandlung gegeneinander und gegenüber dem Kegel erforderlich machen. Man kann daher in dieser Geometrie Kegelschnitt und Cylinderschnitt ohne weiteres als gleichartige Begriffe nebeneinanderstellen.

Erkl. 405. In der elementaren Stereometrie werden nur Kreiskegel und Kreiscylinder und von diesen vorzüglich nur die senkrechten behandelt. Daher besitzt der Kreiscylinder der elementaren Stereometrie nur Ellipsenschnitte, keine Parabelschnitte oder Hyperbelschnitte; wohl aber besitzt der Kreiskegel alle dreierlei Schnitte. Zu ihrer Unterscheidung geschieht in der Stereometrie ähnliches, wie oben die Verwendung des Ebenenbüschels mit Achse k, indem man den Kegelschnitt einer Ebene zurückführt auf den Schnitt einer Parallelebene durch den Kegelscheitel. Je nachdem dann die Kegelhalbweite kleiner, gleich oder grösser ist, als der Neigungswinkel dieser beiden parallelen Ebenen gegen die Kegelachse, entsteht als Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Und was in der Stereometrie verschiedene Schnitte des Kegels sind, das sind in der projektivischen Geometrie Abbildungen oder Projektionen der verschiedenen Kurven aufeinander mit dem Kegelscheitel als Projektionsscheitel.

Aufgabe 275 bis 277. Eine in gegebener Originalebene gegebene Kurve (Ellipse, Parabel, Hyperbel) soll auf eine gegebene Bildebene 275) als Ellipse, 276) als Parabel, 277) als Hyperbel projiziert werden. Welche Willkür erlaubt die Lage des Projektionsscheitels?

Andeutung. Für jede Lage der Gegenachse kann als Projektionsscheitel jeder Punkt der Parallelebene zur Bildebene durch die Gegenachse auftreten.

Aufgabe 278 bis 280. Eine in gegebener Originalebene gegebene Kurve (Ellipse, Parabel, Hyperbel) soll von gegebenem Scheitel S aus 278) als Ellipse, 279) als Parabel, 280) als Hyperbel projiziert werden. Welche Willkür erlaubt die Lage der Bildebene, wenn sie einem Ebenenbüschel mit gegebener Achse a angehören soll.

Erkl. 406. Man beachte, dass in den beiden letzten Aufgabengruppen die Auswahl für das Entstehen einer Parabel eine um eine Stufe engere ist, als für Ellipse und Hyperbel. In der vorliegenden Aufgabengruppe hat man für Ellipse und Hyperbel je beliebig viele (∞^1) Ebenen zur Auswahl, für Parabel nur zwei; in der vorhergehenden Aufgabengruppe hatte man für Ellipse und Hyperbel beliebig viele (∞^3) Punkte

Auflösung. Man lege durch den Projektionsscheitel S eine Parallelgerade b zu der gegebenen Achse a des Ebenenbüschels, und durch diese Gerade b zwei Tangentenebenen γ und δ an den Kegel, durch welchen die gegebene Kurve vom gegebenen Scheitel S aus projiziert wird. Zu den beiden Ebenen γ und δ lege man durch die Achse a die Parallelebenen $\gamma' \delta'$. Dann entsteht in jeder dieser beiden Ebenen $\gamma' \delta'$ als Bildkurve eine Parabel, in jeder Ebene im Innenwinkel zwischen beiden eine Hyperbel, in jeder Ebene im Aussenwinkel der beiden eine Ellipse. — Dabei ist

eines ganzen Raumteils, für Parabel nur die (∞^2) Punkte zweier Ebenen. — Fällt die Gerade b ins Innere des projizierenden Kegels, so gibt es keine Ebenen γ, δ, und es können bloss Hyperbeln als Projektion entstehen.

Innenwinkel und Aussenwinkel der Ebenen $\gamma'\delta'$ zu unterscheiden nach Innenwinkel und Aussenwinkel der Ebenen γ und δ, nämlich darnach, ob hier der betreffende Winkelraum den Kegel einschliesst oder ausschliesst.

Aufgabe 281. Eine in gegebener Originalebene gegebene Kurve (Ellipse, Parabel, Hyperbel) soll auf eine gegebene Bildebene mit gegebener Gegenachse so als Parabel projiziert werden, dass ihre Achse parallel wird zu einer vorgegebenen Richtung. Man suche den Projektionsscheitel.

Erkl. 407. Wenn die Originalkurve Ellipse ist, gibt es sicher zwei, wenn sie Parabel ist, nur eine Tangente c parallel der Schnittkante q von α_1 und α_2. Ist die Originalkurve Hyperbel, so gibt es eine oder zwei bezw. keine solcher Tangenten c, je nachdem die Parallele zur Schnittkante q durch den Hyperbelmittelpunkt auf eine der Asymptoten oder in den Aussenwinkel bezw. Innenwinkel der Asymptoten fällt. Es gibt also bei originaler Ellipse sicher zwei, bei Parabel sicher einen, bei Hyperbel je nach Umständen keinen, einen oder zwei Scheitelpunkte von der verlangten Eigenschaft.

Erkl. 408. Es ist eine allgemeine Eigenschaft hierher gehöriger Aufgaben (275—281), dass wenn sie nicht gerade besondere Einzelheiten enthalten (wie z. B. die letzte Aufgabe 281), dann dieselbe Aufgabe nur in anderer Gestalt aufgestellt werden kann, indem man Originalkurve und Bildkurve vertauscht.

Auflösung. Der Projektionsscheitel muss liegen 1. allgemein auf der Parallelebene β zur Originalebene α_1 durch die Gegenachse. Damit die Bildkurve Parabel wird, muss er liegen 2. auf der Parallelebene γ zur Bildebene α_2 durch diejenige Tangente c der Originalkurve, welche der Schnittkante q beider Ebenen parallel ist. Damit kennt man eine Gerade ($\beta\gamma$), welche den Scheitel enthalten muss.

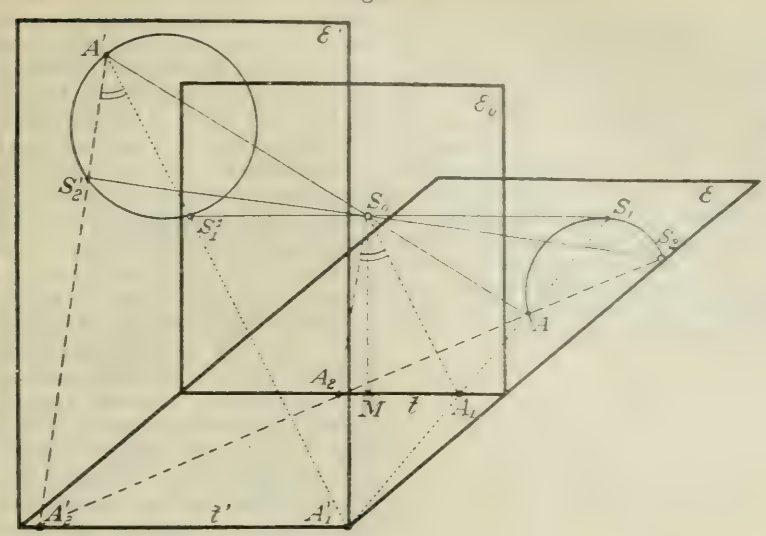
Damit endlich der unendlich ferne Punkt der Parabel in die vorbestimmte Richtung fällt, ziehe man in der vorgenannten Ebene γ durch den Berührungspunkt C der Originalkurve eine Parallele d zu der gegebenen Richtung. Wo diese Gerade d die Kante ($\beta\gamma$) trifft, dort muss der gesuchte Scheitel liegen. Denn von ihm aus wird der Berührungspunkt C als einziger Punkt der Originalkurve ins Unendliche projiziert, und zwar in der vorgegebenen Achsenrichtung der Parabel.

Aufgabe 282. Man soll im vorliegenden Lehrbuche solche Eigenschaften der Kurven aufsuchen, welche auch durch Projektion vom Kreise hätten erhalten werden können.

Erkl. 409. Innere Punkte einer Kurve werden bei Projektion auch immer wieder innere, äussere äussere; (darum kann z. B. eine Hyperbel nie als Ellipse projiziert werden auf eine solche Ebene, deren Schnittkante mit der Bildebene beide Aeste trifft, vergl. Erkl. 407). Dagegen werden nicht übertragen bei der Projektion die Massbeziehungen des Mittelpunktes zur Kurve oder etwa die Winkelgrössen zwischen Durchmesser und Tangente. Der dem Mittelpunkt entsprechende Punkt behält vielmehr nur diejenige rein geometrische Eigenschaft bei der Projektion bei, dass während der Kreismittelpunkt der Pol der unendlich fernen Geraden ist (Kleyer-Sachs, Ebene Elementar-Geometrie, VIII. Teil, Antwort auf Frage 84), der Bildpunkt des Kreismittelpunktes (oder sonst Kurvenmittelpunktes der Originalkurve) an der Bildkurve zum Pol der Gegenachse wird.

Auflösung. Durch Projektion vom Kreise oder durch Schneiden eines Kreiskegels durch eine Ebene kann man die Eigenschaften der Kegelschnitte finden, welche in den Sätzen 13 bis 16 und 18 ausgesprochen sind. Nebenbei ergeben sich die Eigenschaften, dass durch jede Kurve die Ebene in zwei Teile geteilt wird, deren einer innere, deren anderer äussere Punkte enthält; dass eine Gerade eine Kurve treffen kann in keinem, einem, oder höchstens zwei Punkten; dass von den inneren Punkten aus keine, von den äusseren zwei Tangenten an jede Kurve gehen u. s. w. — Die Beziehungen der Gegenachse liefern auch auf Grund der Kreisprojektion die dreierlei Gattungen von Kurven je nach ihrem Verhalten zur unendlich fernen Geraden u. s. w.

Figur 119.



Aufgabe 283. Man soll die Aufgabe 275 für den Fall lösen, dass die Bildkurve zum Kreise wird.

Erkl. 410. Gerade Linien $t \parallel t'$ ausserhalb der Originalkurve gibt es bei Ellipse und Parabel immer, bei Hyperbel aber dann nicht, wenn die Parallele zu t' durch den Hyperbelmittelpunkt in den Innenwinkel der Asymptoten fällt. Hiernach richtet sich daher auch die Lösbarkeit der Aufgabe im besonderen Falle. — Da der Kreis selbst eine Ellipse ist, so liegen die Scheitelpunkte jedenfalls in dem Raumteil ausserhalb der beiden Parallelebenen zur Bildebene, deren Schnittgeraden mit ε die parallelen Tangenten zu t' an die Originalkurve ausschneiden (vergl. Aufgabe 275). Hierin decken sich die beiden Anforderungen, dass t ausserhalb der Kurve liegen muss (siehe Antwort auf Frage 54), und dass die Gerade t als Gegenachse die Kurve nicht treffen darf, weil sonst keine Ellipse entstehen kann. Und unter den dreifach unendlich vielen (∞^3) Punkten dieses Raumteils besitzen nur einfach unendlich viele (∞^1) die Eigenschaft, Kreise zu liefern — entsprechend dem Umstand, dass der Kreis eine Ellipse von zweifach geringerer Willkürlichkeit ist, als die allgemeine Ellipse.

Auflösung. Es sei in Ebene ε der Fig. 119 die gegebene Originalkurve, ε' sei die gegebene Bildebene, t' die Schnittkante $(\varepsilon\varepsilon')$. Dann legt man parallel t' die beliebige Gerade t ausserhalb der Originalkurve und sucht in der parallel ε' durch t gelegten Ebene ε_0 den Scheitel S nach Antwort 54,3. Da es zu t' unendlich viele Parallelgeraden t gibt, und jede einen andern Scheitel S_0 liefert, so gibt es auch unendlich viele (∞^1) Punkte S_0 für die gegebenen Bedingungen der Aufgabe.

Erkl. 411. Man könnte auch die Aufgabe 278 für den Kreis zu lösen verlangen. Nimmt man etwa in Figur 119 $A' S_1' A_1'$ als Büschelachse a, sodass die Ebene ε' aufgefunden werden soll, dann wäre unter den Geraden in ε, die durch den Schnittpunkt A_1 der durch S_0 zur Büschelachse a gelegten Parallelen $S_0 A_1$ hindurchgehen, eine solche zu suchen, für welche Punkt S_0 die Eigenschaft der Figur 119 aufweist. Das wird aber nur in Ausnahmefällen zutreffen. Ist aber überhaupt eine solche Gerade t vorhanden, dann hat die Ebene durch A_1' und die Parallele $t' \parallel t$ die verlangte Eigenschaft.

Aufgabe 284. Man soll prüfen, ob es möglich ist, in einen beliebig gegebenen Kegel (Kreiskegel, elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Kegel) jede beliebige Kurve zweiten Grades als Kegelschnitt einzuschieben.

Erkl. 412. Eine gegebene Kurve in einen gegebenen Kegel als Kegelschnitt einschieben.

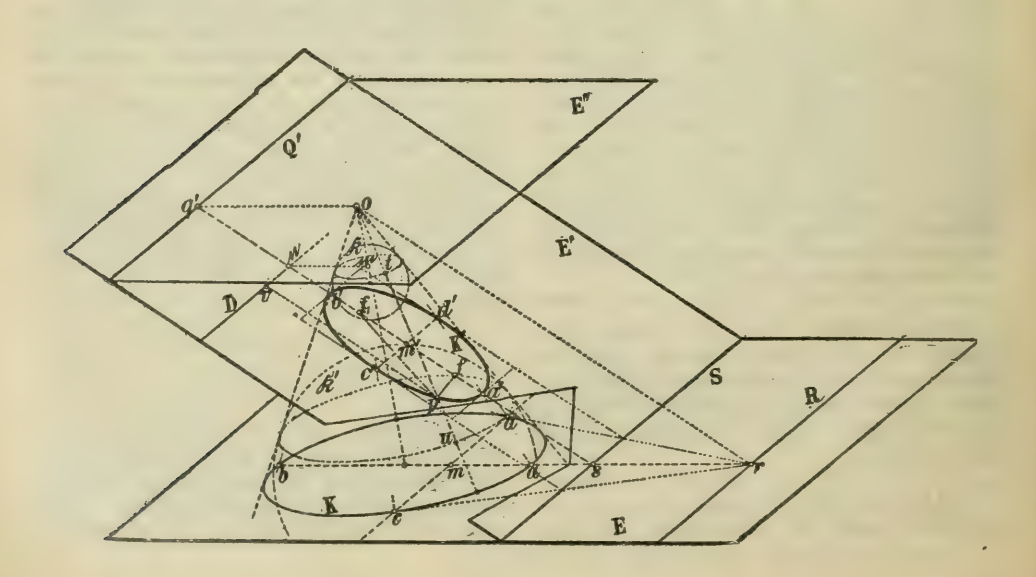
Auflösung. Auf Grund der Antwort 54 und Auflösung der Aufgabe 274 kann man die Untersuchung statt mit einem beliebigen Kegel mit einem Kreiskegel anstellen. Wählt man eine beliebige Sehne des Kegels als

will soviel heissen, als einen Kegelschnitt des gegebenen Kegels aufsuchen, der mit der gegebenen Kurve identische Gestalt hat, oder die Lage derjenigen Ebene aufsuchen, deren Schnittkurve mit dem gegebenen Kegel identische Gestalt hat mit der gegebenen Kurve. — Die nebenstehende Ueberlegung hat selbstverständlich nicht den Charakter einer völlig strengen Beweisführung, schon weil sie die Grenzen nicht aufstellt, innerhalb deren die allgemeine Giltigkeit beschränkt bleiben kann; vielmehr soll sie nur zur Orientierung dienen über eine Frage, welche sich auf Grund der bisherigen Erörterungen aufdrängt, deren genaue Durchführung aber gar nicht dem Rahmen des vorliegenden Teiles geometrischer Untersuchungen angehört.

Achse eines Ebenenbüschels, so sind unter den Schnitten der Ebenen desselben mit dem Kegel sowohl Ellipsen als Hyperbeln in einfach unendlicher Anzahl, und zwei Parabeln. Parallelebenen zu den Ebenen dieses Büschels liefern zu jeder der vorigen Kurven einfach unendlich viele ähnliche; also hat man im ganzen doppelt unendlich viele an Gestalt verschiedene Ellipsen- und Hyperbelschnitte, einfach unendlich viele Parabelschnitte, und unter den Ellipsenschnitten einfach unendlich viele Kreisschnitte durch die Parallelebenen des Leitkreises. Nun gibt es aber nach den früheren metrischen Betrachtungen (vergl. als Beispiel Erkl. 149) auch im ganzen an Gestalt verschiedene Ellipsen und Hyperbeln nur in doppelt unendlicher, Parabeln und Kreise in einfach unendlicher Anzahl. Folglich gelangt man zu dem Schlusse, dass innerhalb gewisser Grenzen thatsächlich in jeden beliebigen Kegel zweiten Grades jede beliebig gegebene Kurve zweiten Grades als Kegelschnitt in einer bestimmten Lage eingeschoben werden kann.

Erkl. 412a. Die endgiltige Behandlung der vorliegenden Frage bleibt der eigentlichen metrischen Betrachtungsweise vorbehalten. Man benutzt dazu am besten die Darstellung der Kegelschnitte als Projektion eines Kreises, wie solche z. B. in Figur 120a bis c zu erkennen ist. Für jeden Punkt p der Ellipse in Fig. 120a haben die Abstände vom Brennpunkte (pf_1) und von der Leitlinie D (pv) ein konstantes Verhältnis, welches kleiner ist als 1. Für jeden Punkt p der Parabel in Figur 120b sind die Abstände pf und pv einander gleich, haben also ebenfalls ein konstantes Verhältnis, welches gleich 1 ist. Für jeden Punkt p der Hyperbel in Figur 120c haben die Abstände pf und pv ein konstantes Verhältnis, welches grösser als 1 ist (vergl. Erkl. 132). Nun ist aber ein gegebener Kegelschnitt eindeutig bestimmt durch dieses Verhältnis (die sog. numerische Excentricität) und den Abstand fn zwischen Brennpunkt und zugehöriger Leitlinie; und das Einlegen eines gegebenen Kegelschnittes in einen gegebenen

Figur 120a.



Kreiskegel ist vollzogen, wenn man eine Schnittkurve dieses Kreiskegels findet, welche die vorgeschriebene Excentricität nebst dem vorgeschriebenen Abstand $f\mathfrak{n}$ aufweist. Der letztere durchläuft aber alle Werte von 0 bis ∞ bei Parallelverschiebung der Kegelschnittebene; und die erstere durchläuft alle möglichen Werte bei Drehung der Kegelschnittebene um eine in ihr liegende Gerade; allerdings nicht alle Werte von 0 bis ∞, sondern nur von 0 bis zum reciproken Cosinus der halben Kegelweite (s. Erkl. 413). Demnach kann man in einen gegebenen senkrechten Kreiskegel alle Kurven zweiten Grades als Kegelschnitte einlegen, deren numerische Excentricität kleiner ist, als der reciproke Cosinus der halben Kegelweite: Das sind aber alle Ellipsen und Parabeln ohne Ausnahme, da ja deren numerische Excentricität stets kleiner bezw. gleich 1 ist; und dazu alle Hyperbeln, deren Asymptotenwinkel kleiner ist als die Kegelweite des Kreiskegels (denn der reciproke Cosinus des halben Asymptotenwinkels ist gleich der numerischen Excentricität der Hyperbel).

Erkl. 413. Die Fig. 120 a b c sind entnommen dem Lehrbuch des Projektionszeichnens von Vonderlinn. In denselben ist ein beliebiger senkrechter Kreiskegel mit Scheitel o geschnitten durch eine Ebene, welche in Fig. 120 a eine Ellipse, in Fig. 120 b eine Parabel und in Fig. 120 c eine Hyperbel erzeugt. Für jede der Kurven erhält das Verhältnis der Abstandsstrecken eines beliebigen Kurvenpunktes vom Brennpunkt und von dessen zugehöriger Leitlinie einen konstanten Wert $pf:pv$, welcher bei den drei Kurven der Reihe nach kleiner, gleich, oder grösser als 1 wird. Bezeichnet man insbesondere mit y den gemeinsamen Schnittpunkt der Geraden tr (Figur 120 a und 120 c) bezw. uv (Figur 120 b) mit der Geraden or, welche durch den Kegelscheitel parallel zur Kegelschnittebene E' geht, und mit der Geraden $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$, nämlich den Durchbohrungspunkt der Geraden or durch die Ebene des Kreises mit Mittelpunkt $\mathfrak{m}$, so ist der Wert des Quotienten $pf:pv$ jedesmal auch gleich $ot:oy$ (Figur 120 a und c) bezw. $ou:oy$ (Figur 120 b). Nun werden bei verschiedenen Lagen des Punktes y ausserhalb des Kreises $\mathfrak{m}$ (Figur 120 a) alle Werte des Quotienten $ot:oy$ durchlaufen, welche kleiner als 1 sind; bei allen Lagen des Punktes y auf dem Kreis (Figur 120 b) entsteht ein Quotient $ou:oy$ gleich 1; und bei allen Lagen des Punktes y innerhalb des Kreises (Fig. 120 c) entstehen Quotienten $ot:oy$, welche grösser als 1 sind. Da aber im letzteren Falle oy nicht kleiner als $o\mathfrak{m}$ werden kann, so kann auch $ot:oy$ nicht grösser werden als der Wert $ot:o\mathfrak{m}$, und dies ist der reciproke Wert von:

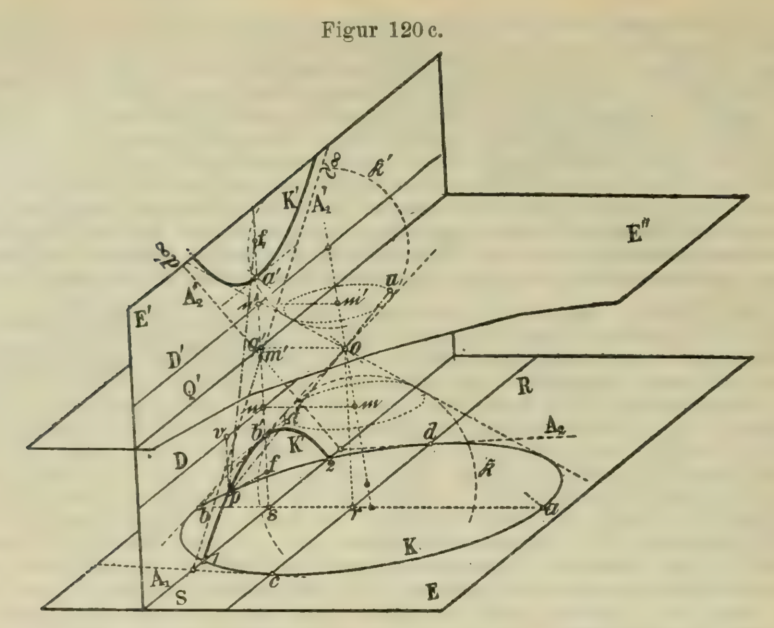
$$o\mathfrak{m}:ot = \cos \mathfrak{m}ot.$$

Soll also in den senkrechten Kreiskegel ein gegebener Kegelschnitt eingelegt werden, so bestimmt man erst in beliebiger Ebene $\mathfrak{m}$ einen Punkt y so, dass $ot:oy$ gleich der numerischen Excentricität der Kurve ist, legt parallel zu oy (und senkrecht zur Zeichenebene) zunächst eine beliebige Schnittebene durch den Kegel, und verschiebt diese parallel so lange, bis auch der Abstand $f\mathfrak{n}$ den vorgeschriebenen Wert erhält.

Figur 120 b.

Erkl. 413 a. In den drei Figuren 120 ist der Kegel jedesmal anzusehen als Projektion des Kreises K in der Ebene E aus dem Scheitel o. Die Kurve K' ist jeweils die Bildkurve in der Bildebene E', und die Parallelebene E'' zur Originalebene durch den Scheitel o schneidet in der Bildebene die Gegenachse Q' aus, welche jedesmal ausserhalb der Bildkurve verläuft, weil die Originalkurve jedesmal Ellipse ist. Dagegen schneidet die Ebene durch o und E als Parallelebene zur Bildebene durch den Scheitel o in der Originalebene die Gegenachse R aus, und diese muss in Figur 120 a ausserhalb K liegen, in Figur 120 b K berühren, in Figur 120 c K schneiden, weil die Bildkurve der Reihe nach Ellipse, Parabel, Hyperbel ist. — Man beachte übrigens, dass in den Figuren 120 der Leitkreis des Kegels doch jedesmal als Ellipse K gezeichnet ist: denn der Kreis liegt in einer zur Zeichenebene senkrechten Ebene, wird also durch die Sehstrahlen aus dem Auge des Lesers projiziert durch eine Kegelfläche, und tritt in

Figur 120 c.



der Zeichnung wieder auf als Schnitt dieses Kegels mit der Zeichnungsebene. Demnach erscheinen auch Kreise bei der Zeichnung als Ellipsen. und dies gilt besonders auch von Kreisen auf der Erdkugel (Länge- und Breitekreisen), welche bei der Darstellung eines Globus Verwendung finden. Es ist daher stets als ein schwerer Verstoss gegen die Lehre von der Kreisprojektion zu bezeichnen, wenn sich in manchen Schriften oder Büchern solche Kreise auf einer Erdkugel als beiderseits spitze Kurven (wie Spitzbogenzweiecke) gezeichnet vorfinden: Kreislinien werden vom Auge stets nur als Kegelschnitte bezw. Ellipsen projiziert, und diese sind nirgends spitz, sondern haben allseitig runde Begrenzung.

---

7. Aufgaben über die Sätze von Brianchon und Pascal nebst ihren Anwendungen.

(Zu Abschnitt 5.)

Aufgabe 285. Man soll einige Beziehungen aufsuchen zwischen den durch die Sätze von Brianchon und Pascal bestimmten Eigenschaften der Sechsecke bezw. Sechsseite, welche durch dieselben sechs Elemente bestimmt werden.

Erkl. 414. In Figur 121a kann man ganz wohl der Auffassung Raum geben, dass die sechs Punkte $ABCDEF$ etwa auf einer Ellipse lägen. Dann müssen für jedes der 60 Sechsecke die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten auf einer Geraden liegen, so dass also 60 verschiedene Pascalsche Geraden entstehen. — In Figur 121b kann keinesfalls angenommen werden, dass die sechs Geraden eine Ellipse berührten; wohl aber kann man durch eine kleine Verschiebung der Geraden e oder f [den Schnittpunkt (ae) passend links vom Schnittpunkt (af) gelegt] den Fall herbeigeführt denken, dass etwa die Geraden eine Hyperbel berühren, von welcher der eine Ast im offenen Raum der Tangenten $abcdf$ liegt (wo jeweils die Ordnungsziffer der 60 Figuren steht), und der andere Ast im Scheitel-

Auflösung. 1. Unter den verlangten Beziehungen ist als erste hervorzuheben diejenige, dass wenn eines der aus gegebenen sechs Elementen gebildeten Sechsecke bezw. Sechsseite einem Kegelschnitt ein- bezw. umoder angeschrieben ist, dann jedes der 60 aus denselben 6 Elementen zu bildenden ebenfalls ein ein- bezw. um- oder angeschriebenes Sechseck ist, also die Eigenschaften der Sätze von Pascal bezw. Brianchon erfüllen muss.

2. Jede Beziehung unter den Pascalschen Geraden der 60 aus denselben sechs Kurvenpunkten gebildeten Sechsecke steht dualistisch gegenüber einer entsprechenden Beziehung unter den Brianchonschen Punkten der 60 aus denselben sechs Kurventangenten gebildeten Sechsseite. Man braucht daher nur in der einen dieser beiden Richtungen die Untersuchung durchzuführen, und erhält dann

winkel (fa) nach links hin. Dann müssten wieder für jedes der 60 Sechsseite die Verbindungsgeraden je zweier Gegenecken durch einen Punkt gehen, so dass also 60 verschiedene Brianchonsche Punkte entstehen.

Erkl. 415. Die vier Sechsecke mit Gegenseiten AB und DE im dritten Teil nebenstehender Auflösung sind $12_3 45_6$ (Fig. 121a, 1), $12_6 45_3$ (Fig. 121a, 22), $12_3 54_6$ (Fig. 121a, 3), $12_6 54_3$ (Fig. 121a, 24). Die Sechsecke mit Umstellung 21 ... für 12 ... liefern keine neuen Figuren, da sie mit den vorigen in umgekehrter Umlaufsfolge (und zugleich umgekehrter Reihenfolge der Erzeugung) zusammenfallen, nämlich $21_3 45_6$ mit 24, $21_6 45_3$ mit 3, $21_3 54_6$ mit 22, $21_6 54_3$ mit 1.

Eine Zusammenstellung aller Gruppen von je vieren der 60 Sechsecke in Figur 121a, deren Pascalsche Geraden je durch einen Punkt gehen, würde 45 Zeilen folgender Art ergeben:

Nebenecke (12. 45.) für die vier Sechsecke 1, 3, 22, 24;

Nebenecke (23. 56.) für die vier Sechsecke 1, 2, 25, 26;

Nebenecke (34. 61.) für die vier Sechsecke 1, 7, 58, 60;

Nebenecke (12. 46.) für die vier Sechsecke 2, 5, 16, 18 u. s. w.

Erkl. 416. Aus den Geradenpaaren (12) und (45), (23) und (56), (34) und (61) kann man folgende vier Paare von Dreiseiten zusammenstellen:

1) . . . (12) (23) (34) und (45) (56) (61),

2) . . . (12) (23) (61) und (45) (56) (34),

3) . . . (12) (56) (34) und (45) (23) (61),

4) . . . (12) (56) (61) und (45) (23) (34).

Das dritte von diesen ist das nebenstehend benützte Paar; die drei andern geben keine neuen Ergebnisse, weil jedesmal bloss der Pascalsche Satz selber entsteht für je eines der nebenstehenden drei Sechsecke, nämlich beim ersten für das Sechseck 125436 bezw. 163452, beim zweiten für 143256, beim vierten für 123654. — Man sieht, dass diese Sechsecke in der Weise zusammen gehören, dass als erste, dritte, fünfte Ecke die Punkte 1. 3. 5. festgehalten bleiben und die zwischenliegenden cyklisch verschoben werden: .2 .6 .4 oder .4 .2 .6 oder .6 .4 .2. Würde man umgekehrt etwa .2 .6 .4 festhalten und dazwischen 1. 3. 5. oder 3. 5. 1. oder 5. 1. 3. in cyklischer Vertauschung einsetzen, so entstehen genau die gleichen drei Sechsecke. — Ein anderer Steinerscher Punkt aber, der als Gegenpunkt des vorigen bezeichnet wird, entsteht durch die gleichen cyklischen Vertauschungen der Punkte, wenn zuvor ein Paar (von der geraden oder von der ungeraden Stellung) vertauscht wurde.

ohne neue Beweisführung durch dualistische Uebertragung die entsprechenden Beziehungen für die andern Gebilde. [Hiernach beschränkt sich auch die hier folgende Betrachtung auf die Figur des Pascalschen Sechsecks, ohne dass jedesmal die Anwendung aufs Brianchonsche Sechsseit ausdrücklich durchgeführt wird.]

3. Bezeichnet man die sechs Punkte $ABCDEF$ (bezw. die sechs Geraden $abcdef$) der Einfachheit halber mit den Ziffern 1 bis 6, so sind die gegenüberliegenden Elemente 1, 2 und 4, 5; 2, 3 und 5, 6; 3, 4 und 6, 1. Zwei dieser gegenüberliegenden Elemente behalten nun aber diese Lagenbeziehung bei für jede beliebige Anordnung der übrigen Elemente, z. B. 1, 2 · 4, 5 · für Einschiebung von · · 3 · · 6 oder · · 6 · · 3 und wieder 1, 2 · 5, 4 · für Einschiebung von · · 3 · · 6 oder · · 6 · · 3.

Daraus folgt, dass für jedes der so gebildeten vier Sechsecke der Schnittpunkt der Geraden AB und DE als Schnittpunkt zweier Gegenseiten auftritt, oder dass die Pascalsche Gerade in jedem der genannten vier Sechsecke durch die Nebenecke (AB) (DE) des vollständigen Sechsecks $ABCDEF$ hindurchgeht. Und ebenso müssen allgemein in jeder Nebenecke die Pascalschen Geraden von vier verschiedenen der 60 Sechsecke zusammentreffen.

4. Nach dem Pascalschen Satze für das Sechseck 1 2 3 4 5 6 liegen auf einer Geraden die Schnittpunkte der Gegenseiten (1, 2) und (4, 5), (2, 3) und (5, 6), (3, 4) und (6, 1). (Vergl. Fig. 125, S. 200.) Diese Geraden kann man nun auf mehrfache Art in der Weise zu zwei Dreiecken zusammenfassen, dass die zwei Geraden durch den ersten Schnittpunkt als erste Seiten beider Dreiecke verwendet werden, die zwei Geraden durch den zweiten als zweite Seiten, die Geraden durch den dritten als dritte. Und solche zwei Dreiecke müssen nach Satz b in Aufgabe 73 des I. Teils dieses Lehrbuchs perspektivisch sein, und die Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte gehen durch einen Punkt. Führt man dies oben durch mit den Gruppen (1, 2), (5, 6), (3, 4) als erstem und (4, 5), (2, 3), (6, 1) als zweitem Dreieck, so müssen durch einen Punkt gehen die Verbindungsgeraden der entsprechenden Eckpunkte:

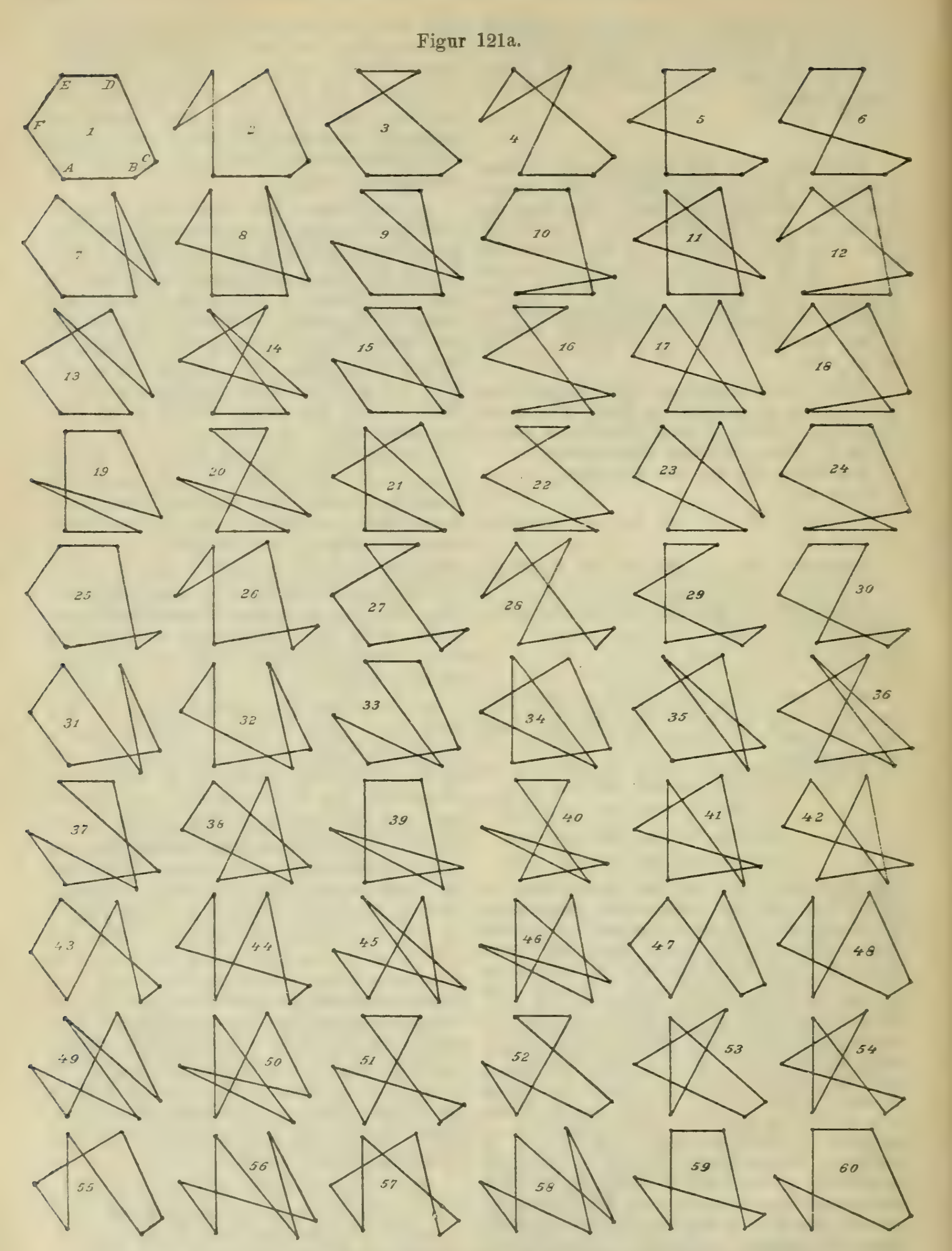
1) . . . (1, 2), (5, 6) und (4, 5), (2, 3);

2) . . . (5, 6), (3, 4) und (2, 3), (6, 1);

3) . . . (3, 4), (1, 2) und (6, 1), (4, 5).

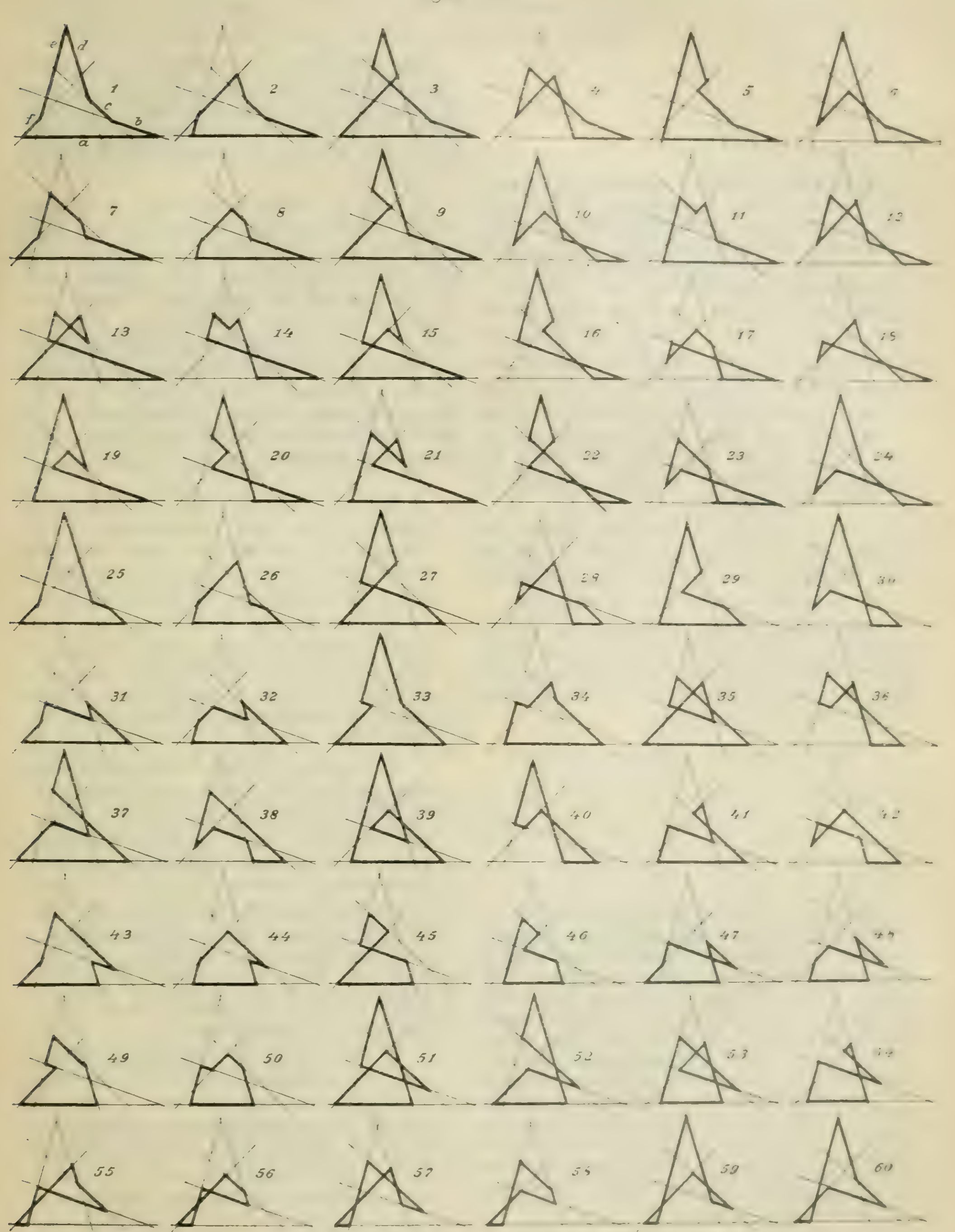
Diese selben drei Verbindungsgeraden entstehen aber als Pascalsche Geraden bei folgender Anordnung der sechs Elemente:

Figur 121a.



Sechzig verschiedene einfache Sechsecke im gleichen vollständigen Sechseck.

Figur 121b.



Sechzig verschiedene einfache Sechsseite im gleichen vollständigen Sechsseit.

1. 1, 2, 3, 6, 5, 4 mit Schnittpunkten (1, 2) (6, 5), (2, 3) (5, 4) und dazu (3, 6) (4, 1);
2. 1, 4, 3, 2, 5, 6 mit Schnittpunkten (4, 3) (5, 6), (3, 2) (6, 1) und dazu (1, 4) (2, 5);
3. 1, 6, 3, 4, 5, 2 mit Schnittpunkten (3, 4) (2, 1), (1, 6) (4, 5) und dazu (6, 3) (5, 2).

Demnach haben die Pascalschen Geraden dieser drei und allgemein je dreier von den 60 Sechsecken solche Lage, dass sie durch einen Punkt gehen: man nennt diese Punkte nach ihrem Entdecker Steiner Steinersche Punkte.

5. Die 60 Sechsecke geben noch Veranlassung zur Aufdeckung einer grossen Zahl anderer besonderen Lagebeziehungen von ziemlich verwickelter Natur. Sie beziehen sich alle auf vereinigte Lage von Punkten mit Geraden bezw. von Geraden mit Punkten, und diese Punkte und Geraden sind benannt worden nach ihren Entdeckern, nämlich Steiner, Plücker, Kirkman, Cayley, Salmon u. s. w. Die wichtigsten dieser Eigenschaften, an deren Spitze der Pascalsche Satz selber steht, lassen sich folgendermassen zusammenstellen:

Satz a) Von den 45 Nebenecken liegen je drei auf einer der 60 Pascalschen Geraden, und von den 60 Pascalschen Geraden gehen je vier durch eine der 45 Nebenecken.

b) Von den 60 Pascalschen Geraden gehen je drei durch einen der 20 Steinerschen Punkte, und von den 20 Steinerschen Punkten liegt je einer auf jeder der 60 Pascalschen Geraden.

c) Von den 20 Steinerschen Punkten liegen je vier auf einer der 15 Steiner-Plückerschen Geraden, und von den 15 Steiner-Plückerschen Geraden gehen je drei durch einen der 20 Steinerschen Punkte.

d) Von den 60 Pascalschen Geraden gehen je drei durch einen der 60 Kirkmanschen Punkte, und von den 60 Kirkmanschen Punkten liegen je drei auf einer der 60 Pascalschen Geraden.

e) Von den 60 Kirkmanschen Punkten liegen je drei auf einer der 20 Cayleyschen Geraden, und von den 20 Cayleyschen Geraden geht je eine durch jeden der 60 Kirkmanschen Punkte.

f) Von den 20 Cayleyschen Geraden gehen je vier durch einen der 15 Salmonschen Punkte und ausserdem je eine durch jeden der 20 Steinerschen Punkte.

Erkl. 417. Die 20 Steinerschen Punkte zerfallen nach voriger Ueberlegung in 10 Paare von Gegenpunkten, und die Gruppen je dreier Pascalschen Sechsecke der Figur 121a, welche zu je einem dieser Steinerschen Punkte bezw. seinem Gegenpunkte gehören, sind folgende:

1, 17, 51 und 6, 15, 47; 2, 23, 53 und 4, 21, 48; 3, 11, 59 und 5, 9, 57; 7, 18, 35 und 12, 13, 31; 8, 24, 39 und 10, 19, 32; 14, 22, 40 und 16, 20, 36; 25, 38, 52 und 30, 37, 43; 26, 42, 54 und 28, 41, 44; 27, 34, 60 und 29, 33, 55; 45, 50, 58 und 46, 49, 56.

Benennt man jeden Steinerschen Punkt für den Augenblick mit der Ziffer des ersten der zugehörigen Sechsecke, so liegen folgende je vier auf einer Geraden:

1, 2, 7, 8; 1, 3, 25, 27; 1, 14, 26, 45; 2, 5, 26, 29; 2, 16, 25, 46; 3, 4, 12, 14; 3, 8, 28, 46; 4, 6, 28, 30; 4, 10, 27, 45; 5, 6, 10, 16; 5, 7, 30, 45; 6, 12, 29, 46; 7, 16, 27, 28; 8, 14, 29, 30; 10, 12, 25, 26.

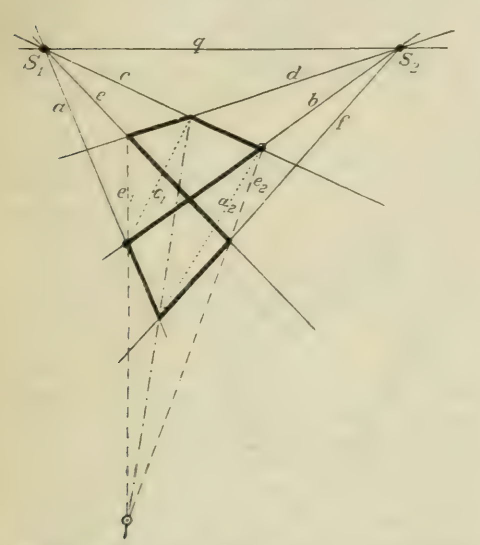
Die erstere Tabelle enthält gerade alle 60 Sechsecke der Figur 121a je einmal; die zweite jeden Steinerschen Punkt je dreimal, so dass jeder auf drei verschiedene Steiner-Plückerschen Geraden zu liegen kommt.

Erkl. 418. Von den nebenstehenden Sätzen, welche zum Teil auffallende Dualität zwischen manchen Elementen aufweisen, ist vom Satz a) die erste Hälfte der Pascalsche selbst, die zweite Hälfte bewiesen im dritten Teil dieser Auflösung, und der Satz b) in seiner ersten Hälfte im vierten Teil; die übrigen Sätze folgen aus weiteren Untersuchungen analoger Art, die hier nicht alle durchgeführt zu werden brauchen. — Bei der dualistischen Uebertragung auf den Satz des Brianchon werden jeweils Punkte und Geraden vertauscht, die Ordnungszahlen der einzelnen Sechsecke in obigen Einzelbeispielen und Tabellen aber bleiben für jede Erscheinung genau dieselben.

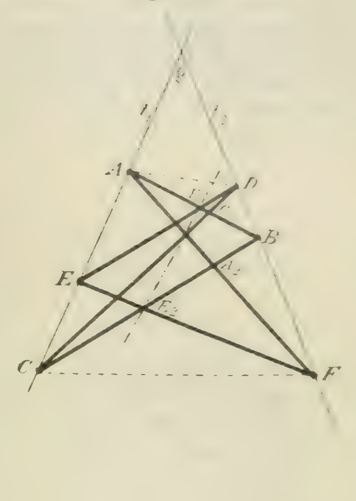
Aufgabe 286. Man soll die vorigen Sätze übertragen auf das Tangentensechsseit nach Fig. 121 b und Erkl. 414.

Aufgabe 286 a. Man soll ähnliche Ueberlegungen anstellen für die Beziehungen nach Brianchon und Pascal in Fünfecken, Vierecken, Dreiecken.

Figur 122.



Figur 123.



Aufgabe 287. Die Sätze von Brianchon und Pascal sollen für die ausgearteten Kurven bestätigt werden.

Erkl. 419. Will man an die Figuren 122 und 123 Untersuchungen anknüpfen nach Art der vorhergehenden Sätze in Aufgabe 285, so hat man zunächst nicht 60, sondern nur sechs verschiedene Fälle zu unterscheiden. Denn damit überhaupt Ergebnisse entstehen, hat man Auswahl unter AB oder AD oder AF, darnach zweierlei folgende Elemente und nach jedem dieser wieder zweierlei folgende. Das wären $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ Fälle; von diesen ist aber ein jeder vorwärts und rückwärts gezählt, also bleibt die Hälfte mit 6 Fällen übrig. Und entsprechend vermindert sich die Anzahl bei den übrigen Einzelbeziehungen jener Sätze.

Auflösung. Die Giltigkeit der Sätze

von Brianchon für das Sechsseit, dessen Seiten, statt eine Kurve zweiter Klasse zu berühren, zu je dreien durch zwei Punkte gehen (Figur 122), und

von Pascal für das Sechseck, dessen Ecken, statt auf einer Kurve zweiter Ordnung zu liegen, zu je dreien auf zwei Geraden liegen (Figur 123), ergibt sich entweder als unmittelbare Uebertragung der allgemeinen Sätze auf den Einzelfall, oder direkt durch Projektivitätsbetrachtungen, wie solche im Ergebnis der Aufgabe 158 und 159 des I. Teils ausgeführt sind.

Aufgabe 288. Es seien gegeben sechs beliebige Punkte oder Geraden. Man soll prüfen, ob dieselben Punkte bezw. Tangenten einer Kurve zweiten Grades sein können.

Erkl. 420. Will man einen ausdrücklichen Beweis führen für nebenstehende Auflösung, so würde indirekt zu verfahren sein. Man sucht

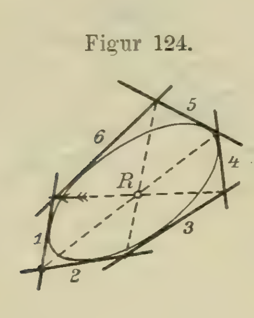
Auflösung. Man fasse die sechs Elemente zusammen zu einem Sechseck und prüfe, ob der Satz von Pascal bezw. Brianchon erfüllt wird. Liegen die Schnittpunkte von Gegenseiten auf einer Geraden bezw. gehen die Verbindungsgeraden von Gegenecken durch

in der vorgeschriebenen Lage dasjenige sechste Element, welches zu der von den fünf ersten Elementen bestimmten Kurve gehört: es wird mit dem gegebenen sechsten zusammenfallen oder nicht zusammenfallen. — Man kann hiernach durch die Sätze von Pascal und Brianchon für sechs Elemente die Lage zu einer allgemeinen Kurve ebenso prüfen, wie in der Planimetrie für vier Elemente die Lage zu einem Kreise untersucht wird.

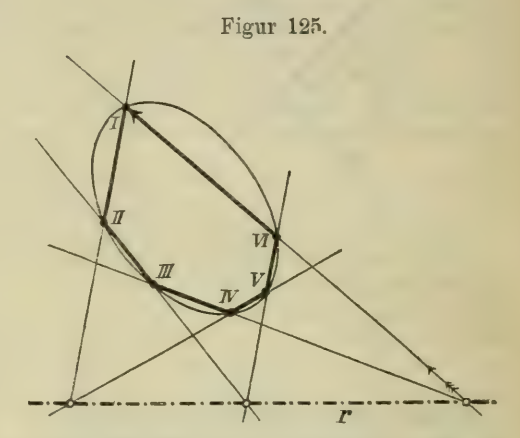
einen Punkt, so hat man sechs Elemente einer Kurve zweiten Grades; wenn nicht, dann gehört das sechste Element nicht zu derselben Kurve, welche durch die fünf übrigen bestimmt wird.

Aufgabe 289. Dieselbe Aufgabe für fünf Gerade mit einem oder vier Gerade mit zwei oder drei Gerade mit drei Berührungspunkten, bezw. für fünf Punkte mit einer oder vier Punkte mit zwei oder drei Punkte mit drei Berührungsgeraden.

Figur 124.



Figur 125.



Aufgabe 290, 291. Welche Beziehungen gestatten die Sätze von Brianchon und Pascal für die kollinearen Dreiecke in der Auflösung der Aufgabe 285, 4.

Auflösung.

290. Nimmt man von den sechs Ecken des Brianchonschen Sechsseits, Fig. 124, die erste, dritte, fünfte und ebenso die zweite, vierte, sechste zu zwei Dreiecken zusammen, so müssen wegen des Satzes die entsprechenden Eckpunkte zu je zweien jeweils auf einer Geraden durch denselben Punkt R zu liegen kommen, und somit werden diese Dreiecke kollinear: Das eine hat die Ecken (1, 2) (3, 4) (5, 6), das andere die Ecken (4, 5) (6, 1) (2, 3). Je zwei entsprechende Eckpunkte in der eben aufgeführten Reihenfolge sind verbunden durch einen Strahl des Punktes R, je zwei nicht entsprechende Eckpunkte aber durch Tangenten der Kurve. Daher erhält man die Aussage:

> Satz. Sind zwei Dreiecke kollinear, so sind die sechs Verbindungsgeraden ihrer nichtentsprechenden Eckpunktepaare sechs Tangenten einer Kurve zweiter Klasse.

291. Nimmt man von den sechs Seiten des Pascalschen Sechsecks, Fig. 125, die erste, dritte, fünfte und ebenso die zweite, vierte, sechste zu zwei Dreiseiten zusammen, so müssen wegen des Satzes die entsprechenden Seiten zu je zweien jeweils durch einen Punkt derselben Geraden r hindurchgehen, und somit werden die Dreiseite kollinear. Das eine hat die Seiten (I, II), (III, IV), (V, VI), das andere die Seiten (IV, V), (VI, I), (II, III). Je zwei entsprechende Seiten in der eben genannten Reihenfolge schneiden einander in einem Punkt der Geraden r, je zwei nicht entsprechende Seiten aber in einem Punkt der Kurve. Daher erhält man die Aussage:

> Satz. Sind zwei Dreiecke kollinear, so sind die sechs Schnittpunkte ihrer nicht entsprechenden Seitenpaare sechs Kurvenpunkte einer Kurve zweiter Ordnung.

Da aber nach den Sätzen der Aufgabe 73 des I. Teils die Kollinearitätsbedingungen von Dreieck und Dreiseit einander gegenseitig bedingen, so gelten beide Sätze für jedes einzelne Paar kollinearer Dreiecke.

Erkl. 421. Jedes Element des einen Dreiecks findet ein entsprechendes und zwei nicht entsprechende am andern; für alle sechs Elemente (3 Eckpunkte, 3 Seiten) hat man also 18 Paarungen, wovon sechs als Paarungen entsprechender Elemente hier ausser Betracht bleiben. (Für diese letzteren gilt zunächst die Beziehung des Satzes in Aufgabe 73 des I. Teils.) Die übrigen 12 Paarungen liefern zweimal sechs neue Elemente, und diese gehören zu je sechs derselben Kurve an, während schon fünf Elemente eine solche bestimmen.

Erkl. 422. Die Willkür in der Gruppierung der Dreieckspaare in Auflösung der Aufgabe 285, 4) bleibt hier ausser Betracht, weil nur die angegebene Zusammenfassung ein neues Ergebnis liefert. — Die Kurven zweiter Ordnung bezw. zweiter Klasse sind im allgemeinen nicht dieselbe Kurve. Dieser Sonderfall tritt ein, wenn von den beiden kollinearen Dreiecken zugleich das eine dem andern ein- bezw. umgeschrieben ist. Dann entsteht die Figur zum Satze von Brianchon bezw. Pascal für das Dreieck nach Satz 23 d) und 24 d).

Aufgabe 292. Den vorigen Satz für Punktreihen bezw. Strahlenbüschel zweiten Grades auszusprechen.

Aufgabe 293, 294. Man soll aus den Sätzen von Brianchon und Pascal die Möglichkeit einer mechanischen Kurvenkonstruktion ableiten.

Auflösung.

293. Geht man aus Fig. 124 zurück auf deren grundlegende Figur 27, so hat man ein Dreieck $P_0 P_1 P_2$, dessen Ecken wandern auf den drei festen Geraden $t_0 t_1 t_2$, während dessen Seiten $P_0 P_1$ und $P_0 P_2$ durch die beiden festen Punkte S_1 und S_2 hindurchgehen, also sich um diese Punkte drehen. Die dritte Seite p beschreibt dabei den Strahlenbüschel zweiter Klasse. Man kann also dem Satze von Brianchon auch folgende Fassung geben:

Satz. Ist ein Dreieck in der Art beweglich, dass seine drei Eckpunkte auf drei festen Geraden wandern und zwei seiner Seiten sich um zwei feste Punkte drehen, so umhüllt die dritte Seite eine Kurve zweiter Klasse.

294. Geht man aus Fig. 125 zurück auf deren grundlegende Figur 32, so hat man ein Dreiseit $p_0 p_1 p_2$, dessen Seiten sich drehen um die drei festen Punkte $S_0 S_1 S_2$, während dessen Ecken $(p_0 p_1)$ und $(p_0 p_2)$ auf den beiden festen Geraden $t_1 t_2$ liegen, also sich auf diesen Geraden verschieben. Der dritte Eckpunkt P beschreibt dabei die Punktreihe zweiter Ordnung. Man kann daher dem Satze von Pascal auch folgende Fassung geben:

Satz. Ist ein Dreiseit in der Art beweglich, dass seine drei Seiten sich um drei feste Punkte drehen und zwei seiner Eckpunkte auf zwei festen Geraden wandern, so beschreibt der dritte Eckpunkt eine Kurve zweiter Ordnung.

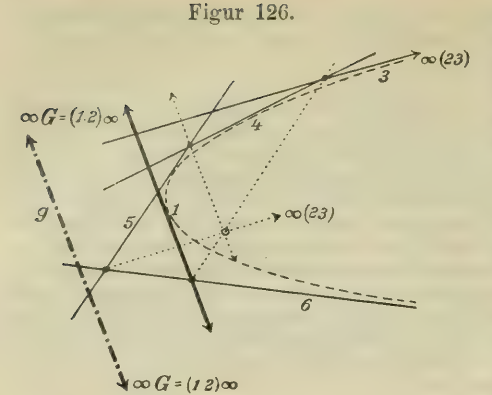
Erkl. 423. Es wäre Sache des Mechanikers, durch Charniere und Scheren einen Apparat herzustellen, der ein bewegliches Dreieck bezw. Dreiseit von der in vorigen Sätzen genannten Art abgeben kann. Ein solcher Apparat würde dann das sein, was man einen Ellipsenzirkel, Hyperbelzirkel, Parabelzirkel nennt. Auf analoge Weise hat der Geometer Grassmann die Herstellung von Kurven beliebig hoher Grade angegeben.

Erkl. 424. Es ist ohne weiteres klar, dass die Elemente der Figuren 27 und 32 auch die gegebenen Bestimmungsstücke der entstehenden Kurve sind, nämlich in Fig. 27 $t_1 t_2 a b c$ als fünf Tangenten, in Figur 32 $S_1 S_2 A B C$ als fünf Punkte der Kurve. Sind also in dem Apparat nach Erkl. 423 die „festen Elemente" verstellbar, so erhält man auch die durch fünf gegebene Elemente bestimmte Kurve in beweglicher Darstellung.

Aufgabe 295. Eine Parabel sei durch vier gegebene Tangenten bestimmt. Man konstruiere eine Tangente derselben, welche einer vorliegenden Geraden parallel sein soll.

Auflösung. Da mit dem Namen Parabel festgelegt ist, dass die unendlich ferne Gerade Tangente der Kurve sein muss, so kennt

Figur 126.



Erkl. 425. Die vorstehende Aufgabe ist eine Wiederholung der Aufgabe 210 und bietet das Gleiche in weitaus einfacherer Form. Die unendlich ferne Gerade wird genau so in die Konstruktion einbezogen, wie jede beliebige Gerade im Endlichen. — Andere Beispiele zur gleichen Konstruktionsmethode, wobei nur der Satz von Brianchon fürs Sechsseit in Anwendung gelangt, bilden die Aufgaben 116 bis 121, 138 bis 140, 211, 218 u. s. w. Es kann dem Studierenden nicht genug empfohlen werden, jene Aufgaben — nicht nur alle einmal, sondern jede auch mit möglichst vielfachen Abänderungen — zu wiederholen und sich von der ausserordentlichen Leichtigkeit dieser Lösungsmethode zu überzeugen.

Erkl. 426. Hat die zu suchende Tangente die Ziffer 1 bekommen, so hat man für die Ziffer 2 keine andere Auswahl mehr, als eben diejenige Tangente, auf welcher der Schnittpunkt mit 1 gegeben ist (in Figur 126 ist es die unendlich ferne). Dagegen können dann die Ziffern 3, 4, 5, 6 beliebig auf die vier übrigen Tangenten verteilt werden, also $4! = 24$mal. In umgekehrter Reihenfolge würden dieselben 24 Sechsecke entstehen, wenn die unendlich ferne Gerade Ziffer 6 bekäme. Bei jeder neuen Bezifferung entsteht ein anderes der 60 einfachen Sechsseite aus den 6 Geraden $1-6$, also auch ein anderer Punkt des Brianchon, aber jedesmal dieselbe Gerade 1.

man f ü n f T a n g e n t e n der Kurve. Die gesuchte Tangente soll parallel einer gegebenen Geraden g sein (Fig. 126), muss daher die unendlich ferne Gerade in demselben unendlich fernen Punkte G treffen, wie g; man sucht also die sechste Tangente, welche durch den gegebenen Punkt G der gegebenen unendlich fernen Tangente hindurchgeht. Hiernach kann die Aufgabe behandelt werden nach Brianchon auf Grund der Antwort auf Frage 56, 3 links.

Man beziffert die gesuchte Tangente mit 1 (irgendwo parallel g), die gegebene unendlich ferne mit 2, die übrigen gegebenen Tangenten in beliebiger Reihenfolge mit den Ziffern 3 bis 6. Sodann ist Schnittpunkt (1, 2) der gegebene Punkt $G\infty$; dieser wird verbunden mit Schnittpunkt (4, 5), und so entsteht die erste Gerade durch den Punkt des Brianchon. Man verbindet sodann den Schnittpunkt (2, 3), das heisst den unendlich fernen Punkt von 3, mit (5, 6), und erhält so die zweite Gerade durch den Punkt des Brianchon. Dieser Punkt ist also der Schnittpunkt der beiden eben gezogenen Geraden: und durch ihn muss hindurchgehen die Gerade von (3, 4) nach (6, 1). Nun ist aber (3, 4) bekannt; verbindet man also diesen Schnittpunkt (3, 4) mit dem gefundenen Punkt des Brianchon, so liegt auf dieser neuen Verbindungsgeraden der Schnittpunkt (6, 1); d. h. der Schnittpunkt (6, 1) ist der Schnittpunkt dieser d r i t t e n G e r a d e n d u r c h d e n P u n k t d e s B r i a n c h o n mit der bekannten Geraden 6. Und durch diesen so aufgefundenen Punkt auf 6 muss die gesuchte Gerade 1 gelegt werden in der Richtung nach dem Punkt (1, 2), welcher im vorliegenden Falle der unendlich ferne Punkt $G\infty$ ist. (Vergl. Aufgabe 210.)

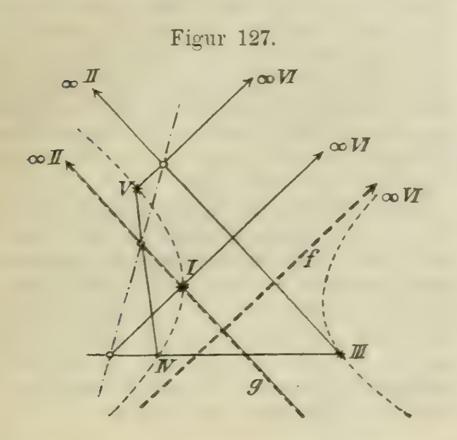
Erkl. 427. Da es an die Parabel zu jeder Geraden nur eine e i n z i g e parallele Tangente p gibt, so ist die vorliegende Aufgabe für die Parabel mit den vorliegenden Mitteln konstruierbar. Für die Ellipse gibt es zu j e d e r Geraden zwei parallele Tangenten, für die Hyperbel ebenso zu jeder Geraden durch den Schnittpunkt der Asymptoten, welche durch den Aussenwinkel der Asymptoten geht. Daher ist die Aufgabe für die Parabel vom ersten Grade, für Ellipse und Hyperbel vom zweiten Grade (vergl. Erkl. 350).

Aufgabe 296. An eine durch fünf Tangenten gegebene Kurve die Paralleltangente zu einer der gegebenen zu zeichnen.

Andeutung. Punkt (1, 2) ist wieder der unendlich ferne Punkt von 2.

Aufgabe 297. Einem gegebenen Dreieck eine Hyperbel umzuschreiben mit Asymptoten parallel zwei gegebenen Geraden f und g. Man soll auf einer dieser beiden Geraden (g) den Hyperbelschnittpunkt aufsuchen.

Figur 127.



Auflösung. Das gegebene Dreieck sei gebildet von den Punkten III, IV, V in Figur 127. Die beiden Geraden f und g liefern die beiden unendlich fernen Punkte der Hyperbel. Man kennt also von der Hyperbel im ganzen fünf Punkte. Der gesuchte Hyperbelpunkt soll liegen auf der Geraden g, also auf einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt der Kurve, ist also der zweite Punkt einer gegebenen Sekante. Hiernach kann die Aufgabe behandelt werden nach Pascal auf Grund der Antwort 56, 3 rechts. Man beziffert den gesuchten Punkt mit I (irgendwo auf g), den gegebenen unendlich fernen Punkt der Geraden g mit II, die übrigen vier Punkte in beliebiger Reihenfolge mit den Ziffern III bis VI. Sodann ist Verbindungsgerade I, II die gegebene Gerade g; diese wird geschnitten mit der Verbindungsgeraden IV, V, und so entsteht der erste Punkt auf der Pascalschen Geraden. Man schneidet ferner die Gerade II, III, das ist die Parallele zu g durch III, mit V, VI, der Parallelen zu f durch V, und erhält so den zweiten Punkt der Pascalschen Geraden. Die letztere Gerade ist demnach die Verbindungsgerade der beiden eben gefundenen Punkte; und auf ihr muss liegen der Schnittpunkt von III, IV und VI, I. Nun ist aber III, IV bekannt; schneidet man also diese Verbindungsgerade III, IV mit der gefundenen Pascalschen Geraden, so geht durch diesen neuen Schnittpunkt die Verbindungsgerade VI, I, d. h. die Gerade VI, I ist die Verbindungsgerade dieses d r i t t e n P u n k t e s auf der P a s c a l s c h e n G e r a d e n mit dem bekannten Punkte VI. Und auf dieser so aufgefundenen Geraden durch VI muss der gesuchte Punkt I liegen, nämlich im Schnittpunkt mit der Geraden I, II. Um die zu den Geraden f und g parallelen Asymptoten der Hyperbel selber zu finden, hat man nur dieselbe Konstruktion zweimal zu wiederholen, indem Ziffer I einmal zum Punkte II, das andere Mal zum Punkte VI hinzugefügt wird.

Erkl. 428. Die vorstehende Aufgabe ist eine Anwendung der Aufgabe 229 und leistet durch einfaches Abzählen dasselbe, was dort durch viel umständlichere Konstruktion gemacht worden. — Andere Beispiele zur gleichen Konstruktionsmethode, wobei nur der Satz des Pascal fürs Sechseck zur Anwendung gelangt, bilden die Aufgaben 177—179, 192—194, 231 u. s. w. Auch über diese gilt für den Studierenden die Bemerkung in Erkl. 425, damit er diese und ähnliche Konstruktionen mit völliger Leichtigkeit beherrschen lernt.

Erkl. 429. Nachdem die Ziffern I und II gesetzt sind, besteht für die anderen Ziffern III—VI wieder 24-fache Auswahl für den Umlauf des Sechsecks. Und dabei ist kein Sechseck doppelt gezählt. Wohl aber könnte man — unter Festhaltung der Ziffer I für den gesuchten Punkt — einem Nachbarpunkt (nämlich dem unendlich fernen von g) die Ziffer VI geben und die Sechsecke zählen I VI V IV III II und I II III IV V VI. Dabei würden dann dieselben 24 Sechsecke in umgekehrter Folge entstehen und jedesmal wieder eine andere von den 60 Pascalschen Geraden des Sechsecks der sechs Punkte, aber jedesmal derselbe Punkt I. — Will man in Figur 126 oder 127 (Erkl. 426 oder 429) dasjenige der 60 Sechsecke hervorheben, welches gerade zu der Konstruktion verwendet worden ist, so hat man bloss die sechs Elemente 1—6 bezw. I—VI in der Reihenfolge ihrer Ziffern durch auffallende Schnittpunkte bezw. Verbindungsgeraden auszuzeichnen.

Aufgabe 298. Warum gibt es keine Aufgabe für die Parabel, welche nach dem Satze von Pascal fürs Sechseck selbst zu lösen wäre?

Aufgabe 299. Einem Dreiseit soll eine Parabel in der Weise angeschrieben werden, dass eine Seite in bestimmtem Punkte berührt wird. Man suche die Achsenrichtung der Parabel.

Auflösung. Nach Antwort 43 ist die Symmetrieachse der Parabel eine Gerade durch den Berührungspunkt der unendlich fernen Tangente. Wenn man also diesen Berührungspunkt findet, so gibt er selbst die Richtung der Achse an. Die Aufgabe verlangt also, für eine durch vier Tangenten nebst Berührungspunkt auf einer derselben bestimmten Kurve den Berührungspunkt noch auf einer andern Tangente zu finden. Das geschieht nach Brianchon:

Man beziffert die unendlich ferne Gerade mit 6, 1, die andern Tangenten mit 2 bis 5, wobei der samt Berührungspunkt gegebenen zwei benachbarte Ziffern zukommen müssen. Dann liefern wieder (1,2), (4,5) und (2,3), (5,6) den Punkt des Brianchon, und dessen Strahl nach (3,4) trifft die unendlich ferne Gerade im Berührungspunkt, d. h. dieser Strahl selbst ist die Richtung der Achse.

Erkl. 430. Die nebenstehende Aufgabe bildet einen Einzelfall der Aufgaben 129 bezw. 212, 219. Die Figur ist so einfach, dass der Studierende sie selbst entwerfen möge, und zwar in mehrfach verschiedener Art sowohl der gegebenen Elemente, als auch der zu wählenden Bezifferung für die Elemente 2—5. — Man könnte die Aufgabe auffassen als Anwendung des Satzes 23 b) bezw. 23 c), aber es erleichtert den Vorgang, dass man wie immer aufs Sechseck in der Bezifferung zurückgeht.

Erkl. 431. Eine Weiterführung dieser Aufgabe würde auch die Achse selbst und den Scheitel der Kurve verlangen. Das kann auf zwei Arten geschehen, je nachdem man zuerst das eine oder zuerst das andere verlangt: Entweder sucht man zuerst den Scheitel. Dieser ist jedenfalls der Berührungspunkt auf derjenigen Tangente, welche zur Achsenrichtung senkrecht steht. Man ziehe also a) eine beliebige Senkrechte zur gefundenen Achsenrichtung und konstruiere wie in Aufgabe 295 diejenige Tangente, welche dieser Geraden parallel ist. Sodann konstruiert man b) nach Antwort auf Frage 58 den Berührungspunkt dieser Tangente, und hat somit den Scheitel. Beide Konstruktionen geschehen nach Brianchon mit Bezifferung der Tangenten. c) Die Achse selbst ist dann die durch den Scheitel gehende Parallele zur Achsenrichtung.

Erkl. 432. Man kann auch zuerst die Achse suchen. Diese ist Mittelsenkrechte jeder Kurvensehne, welche zur Achse senkrecht steht. Um eine solche zu finden, muss aber erst ein Kurvenpunkt gesucht werden, also nach Pascal konstruiert werden (mit Bezifferung der Kurvenpunkte). Man zeichnet also zunächst a) nach Brianchon einen dritten Berührungspunkt auf einer der Tangenten, zieht dann durch einen dieser zwei im Endlichen vorhandenen Berührungspunkte eine Senkrechte zur Achse und sucht darauf b) nach Pascal den zweiten Kurvenpunkt. Die Mittelsenkrechte der Sehne ist die Achse. Sie verbindet den noch unbekannten Scheitel mit dem unendlich fernen Berührungspunkt, ist also ebenfalls eine Sehne. Auf ihr konstruiert man endlich nach Pascal c) den Scheitel als ihren zweiten Kurvenpunkt.

Aufgabe 300 bis 303. Man konstruiere Achse und Scheitel und sonstige weitere Kurvenpunkte und Tangenten einer Parabel, von welcher gegeben sind:

300. die Achse und dazu zwei beliebige Elemente (zwei Tangenten, zwei Kurvenpunkte, oder eine Tangente nebst Berührungspunkt);

301. die Scheiteltangente und dazu entweder zwei beliebige Tangenten oder eine Tangente nebst Berührungspunkt;

302. die Richtung der Achse, und dazu drei beliebige Elemente von der Art TTT oder $T(TP)$ oder $P(PT)$ oder PPP;

303. vier beliebige Elemente nach der Art $TTTT$ oder $TT(TP)$ oder $(TP)(TP)$.

Auflösungen. Kennt man die Achsengerade selbst (300), so erhält man aus jedem Element durch symmetrische Uebertragung auf die andere Seite der Symmetrielinie ein zweites. Folglich braucht man ausser der Achse nur noch zwei Elemente. Ist eines von ihnen symmetrisch übertragen, so hat man drei Elemente im Endlichen und dazu durch die Achsenrichtung die unendlich ferne Gerade samt Berührungspunkt.

Durch die Scheiteltangente (301) kennt man diese Tangente und die dazu senkrecht stehende Achsenrichtung, also im ganzen schon zwei Tangenten und auf einer

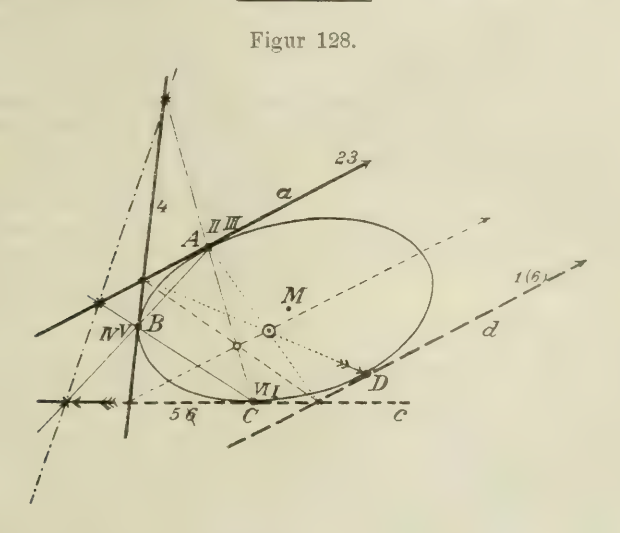
Erkl. 433. Die vorstehenden Aufgaben bilden eine Erweiterung der Aufgaben 211 bis 217, indem jeweils Achse und Scheitel verlangt werden. Die Konstruktion geschieht nach Erkl. 431 und 432, indem die Achsenrichtung die Richtung zum endlich fernen Berührungspunkt ist, die Achse selbst die Symmetrielinie ist zu den zwei Endpunkten einer zu ihr senkrechten Sehne oder zu den zwei Schenkeln eines durch ihre Richtung halbierten Tangentenwinkels; der Scheitel ist der zweite Kurvenpunkt auf der Achse oder der Berührungspunkt der Scheiteltangente.

derselben, nämlich der unendlich fernen, den Berührungspunkt, also $T(TP)$. Es fehlen also nur noch zwei Elemente. Und diese können sein TT oder (TP), nicht aber PP, da die Zusammenstellung $TPP(TP)$ hier nicht annehmbar ist.

Die Richtung der Achse (302) gibt den Berührungspunkt auf der unendlich fernen Tangente.

Aufgabe 304. Man beweise, dass eine Parabel eindeutig bestimmt ist durch ihren Scheitel nebst Achsenrichtung und ein einziges weiteres Element (P oder T).

Figur 128.



Aufgabe 305. Eine Kurve sei bestimmt durch drei Punkte nebst Tangenten in zweien derselben. Es wird gefragt nach dem Berührungspunkt derjenigen Tangente, welche zu der einen gegebenen parallel läuft.

Erkl. 434. Der erste Teil nebenstehender Auflösung bildet die Analysis, während die eigentliche Konstruktion wieder in drei Teile zerfällt. In der Analysis hat man sich klar zu werden über diese drei Teile und deren einzelne Leistungen: ob nach Brianchon konstruiert werden muss oder nach Pascal, ob die gegebenen Elemente in stand setzen, nach der zu wählenden Methode zu konstruieren, oder ob, um eine Konstruktion nach Pascal (bezw. Brianchon) ausführen zu können, erst noch neue Elemente nach Brianchon (bezw. Pascal) beschafft werden müssen. Denn sind lauter Tangenten (oder in Ueberzahl Tangenten) gegeben, so können nach Brianchon auf dreien derselben die Berührungspunkte gezeichnet werden und dann kann nach

Auflösung. Gefragt ist nach dem Berührungspunkt einer Tangente: den findet man nach Brianchon. Zuvor muss aber diese Tangente selbst gezeichnet werden: sie soll parallel einer gegebenen sein, ist also eine Tangente durch den gegebenen unendlich fernen Punkt dieser gegebenen Tangente, und wird ebenfalls gefunden nach Brianchon. Um jedoch nach Brianchon konstruieren zu können, braucht man mindestens drei Tangenten und Berührungspunkte auf zweien. Gegeben sind aber drei Punkte und Berührungspunkte auf zweien. Man muss sich also zuerst eine dritte Tangente verschaffen, und das geschieht nach Pascal. Demnach zerfällt die Auflösung in drei Teile: erstens die Konstruktion der Tangente c im dritten Kurvenpunkt C (nach Pascal), zweitens der Tan-

Pascal weiterkonstruiert werden. Sind dagegen lauter Kurvenpunkte (oder in Ueberzahl Kurvenpunkte) gegeben, so können nach Pascal durch drei derselben die Tangenten gezeichnet werden, und dann kann nach Brianchon weiter konstruiert werden. Ueber alle diese Beziehungen hat die Analysis Klarheit zu verschaffen.

Erkl. 435. Wird nach Brianchon konstruiert, so ist 1 eine Tangente, 2 eine Tangente u. s. w., (1 2) der Schnittpunkt der Tangenten 1 und 2, (2 3) der Schnittpunkt der Tangenten 2 und 3 u. s. w., und auch wenn eine Tangente Doppelziffer, z. B. 6, 1, erhalten hat, so ist 6 Tangente und 1 dieselbe Tangente, und der Schnittpunkt (6, 1) ist der Schnittpunkt der in die eine Tangente zusammenfallenden unendlich benachbarten Tangenten 6 und 1, nämlich der Berührungspunkt auf eben dieser Tangente. — Wird dagegen nach Pascal konstruiert, so ist I ein Kurvenpunkt, II ein Kurvenpunkt u. s. w., I II die Verbindungsgerade der Kurvenpunkte I und II, II III Verbindungsgerade der Punkte II und III u. s. w., und auch wenn ein Kurvenpunkt Doppelziffer, z. B. VI, I, erhalten hat, so ist VI Kurvenpunkt und I derselbe Kurvenpunkt, und VI I ist die Verbindungsgerade der in den einen Kurvenpunkt zusammenfallenden unendlich benachbarten Kurvenpunkte VI und I, nämlich die Tangente in eben diesem Kurvenpunkt.

Erkl. 436. Es kommt häufig vor, dass wie in Figur 128, mehrfache Konstruktionen mit verschiedenen Bezifferungen an derselben Figur zusammentreffen. Dann hat man verschiedene Mittel, um doch die Deutlichkeit bezw. die Uebersicht festzuhalten. Man kann, wie in Figur 128 gezeigt, die gegebenen Tangenten bezeichnen durch starke ausgezogene Linien, die gesuchten durch starke gestrichelte Linien von verschiedener Strichlänge; Kurvenpunkte durch starke Punkte, Punkte von Pascalschen Geraden durch Sterne, Brianchonsche Punkte durch Ringe verschiedener Art (mit oder ohne Punkte); die Seiten Pascalscher Vielecke durch dünne ausgezogene Geraden, Brianchonsche Geraden durch strichpunktierte Linien, Geraden durch Pascalsche Punkte durch dünne punktierte bezw. gestrichelte Linien, u. s. w. So wird man im stande sein, an derselben Figur mehrfache aufeinanderfolgende Konstruktionen doch auch fürs Auge auseinanderzuhalten. Dazu kann für die Bezifferung die Unterscheidung treten, dass man mehrfach auftretende Zahlen für ein zweitesmal durchstreicht bezw. einklammert oder mit Strichen versieht u. s. w. (So ist Ziffer 6 in Figur 118 an c durchgestrichen, an d eingeklammert.)

gente $d \parallel a$ (nach Brianchon), drittens des Berührungspunktes D dieser Tangente d (nach Brianchon).

1. Man beziffert (Fig. 128) den Punkt C mit VI und I, die Punkte A und B mit II und III bezw. IV und V. Dann ist die Verbindungsgerade II, III die Tangente a, IV, V die Tangente b. I, II und IV, V liefern den ersten, II, III und V, VI den zweiten Punkt der Pascalschen Geraden, und durch deren Schnittpunkt mit III, IV geht die Gerade VI, I, nämlich die Tangente c im Punkte C.

2. Man beziffert die unbekannte Tangente d mit 1, deren parallele a mit 2, und verteilt die Ziffern 3 bis 6 nach Belieben auf die Tangenten a und b und c, indem davon zwei (a und c in Fig. 128) als Doppeltangenten und eine (b in Fig. 128) als einfache auftritt. Dann ist (1, 2) der unendlich ferne Punkt von 2, also wird die Parallele zu a durch (4, 5) die erste Gerade durch den Punkt des Brianchon. Die Schnittpunkte (2, 3) und (5, 6) sind jeweils die Berührungspunkte dieser Doppeltangenten, ihre Verbindungsgerade liefert mit der vorigen Parallelen den Punkt des Brianchon selbst; und dessen Verbindungsstrahl nach (3, 4) trifft die Gerade 6 in ihrem Schnittpunkt mit 1. Durch diesen Punkt auf c geht also die zu a parallele Tangente $d \parallel a$.

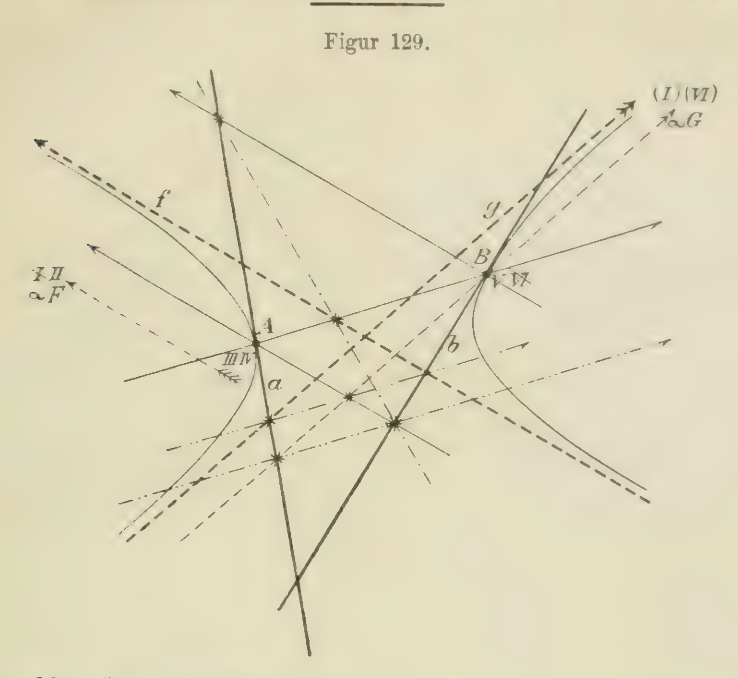
3. Um endlich auf d den Berührungspunkt D zu finden, belässt man der Tangente d die Ziffer 1 und gibt ihr dazu noch die Ziffer 6 (welche nunmehr am einfachsten von der Geraden c weggenommen wird). Tangente c behält dann bloss noch Ziffer 5, so dass also 1, 2, 3, 4, 5 in genau gleicher Eigenschaft bleiben wie zuvor. Dann geht von (1, 2) nach (4, 5) dieselbe Gerade parallel a wie zuvor, die Verbindungsgerade von (2, 3) nach (5, 6) liefert auf ihr den neuen Punkt des Brianchon; und dessen Verbindungsstrahl nach (3, 4) trifft d in (6, 1), dem Schnittpunkt der beiden in diese eine Tangente zusammenfallenden unendlich nahen Tangenten, also im gesuchten Berührungspunkt D.

Erkl. 437. In den späteren Untersuchungen des folgenden Bandes werden parallele Tangenten der Kurve noch besondere Bedeutung erlangen. Es wird sich nämlich zeigen, dass die Verbindungsgerade der Berührungspunkte AD in Figur 128 ein sog. Durchmesser der Kurve ist, d. h. dass der Mittelpunkt M der Verbindungsgeraden AD der Mittelpunkt der Kurve ist. Und insofern ist hier schon die Aufgabe gelöst, bei einer durch fünf beliebig gewählte Elemente bestimmten Kurve den Mittelpunkt durch elementare Konstruktionen zu finden.

Aufgabe 306. Man soll allgemein unterscheiden, wann Konstruktion nach Pascal und wann solche nach Brianchon einzutreten hat.

Andeutung. Man beachte, welche Art der Elemente in Ueberzahl gegeben ist.

Figur 129.



Aufgabe 307. Eine Hyperbel sei durch fünf beliebige Elemente bestimmt, darunter die Richtung der einen Asymptote. Man bestimme beide Asymptoten.

Erkl. 438. Die Richtung einer Asymptote ist der eine der beiden unendlich fernen Punkte der Hyperbel, deren Tangenten den Namen Asymptoten führen. Ausser einem Element P können noch gegeben sein $PPPP$ oder $PP(PT)$ oder $(PT)(PT)$. Durch eine oder zwei Konstruktionen nach Pascal können die beiden ersteren auf den im nebenstehenden als Beispiel gewählten letzteren übergeführt werden. Andere gegebene Elemente, z. B. $TT(TP)$ u. s. w., können auf dem hier vorliegenden Standpunkt der Entwickelungen nicht mit einem einzelnen Kurvenpunkte zusammen genommen werden.

Erkl. 439. In Figur 129 ist für jede der drei Konstruktionen im unendlich fernen Punkt F die Ziffer II, in A III und IV, in B V. Dagegen ist Ziffer I (durchgestrichen) im ersten Fall Punkt F, im zweiten und dritten (eingeklammert) Punkt G; und Ziffer VI (durchgestrichen) im ersten und zweiten Falle Punkt B, im dritten Falle (eingeklammert) Punkt G. Unter den 12 Geraden der Figur ist die Uebersicht dadurch aufrechterhalten, dass die zwei Tangenten dick, die drei Vielecksseiten dünn ausgezogen sind,

Auflösung. Als gegebene Elemente seien gewählt ausser dem einen gegebenen unendlich fernen Punkte F noch zwei Kurvenpunkte A und B mit ihren Tangenten a und b. Dann findet man die erste Asymptote f als Tangente im gegebenen Kurvenpunkte F durch Konstruktion nach Pascal. Sodann ist die unendlich ferne Gerade selbst eine Sekante der Kurve, welche durch den gegebenen unendlich fernen Punkt F hindurchgeht. Man findet also die Richtung der zweiten Asymptote, nämlich den zweiten Kurvenpunkt auf dieser Sekante, wieder durch Konstruktion nach Pascal. Endlich ergibt sich die zweite Asymptote auf gleiche Weise, wie zuvor die erste. Demnach zerfällt die Konstruktion in folgende drei Teile: erstens Tangente f, zweitens Kurvenpunkt G, drittens Tangente g (alle drei nach Pascal.

1. Man beziffert (Fig. 129) den gegebenen unendlich fernen Punkt F mit I und II, den Punkt A mit III und IV, B mit V und VI. Dann ist die Verbindungsgerade II, III die Parallele durch A zur Richtung nach F, Verbindungsgerade V, VI ist Tangente b, also

die Asymptotenrichtungen dünn, die Asymptoten selbst dick gestrichelt, die drei Pascalschen Geraden strichpunktiert (mit je ein, zwei, drei Punkten). Dadurch bleibt die Deutlichkeit gewahrt, auch wenn mehrfache Konstruktionen zusammentreffen, und doch ist mit diesen wenigen Geraden vieles geleistet. Dass auch dies noch einfacher hätte geschehen können, zeigt Erkl. 444.

Erkl. 440. Man erkennt, dass wenn neben vier andern Elementen der eine der beiden unendlich fernen Hyperbelpunkte bekannt ist, dann beide Asymptoten linear bestimmbar sind. Mit den Asymptoten kennt man aber nach Satz 22 auch den Mittelpunkt der Kurve als Asymptotenschnittpunkt und die Achsen der Kurve als Winkelhalbierende der Asymptoten. Und diese wichtigen Elemente sind hier durch lineare Konstruktionen gefunden. Es wiederholt sich also bei der Hyperbel dasselbe, was in Aufgabe 299 für die Parabel geleistet wurde: bei beiden Kurven kann man die grundlegenden Masselemente linear finden: bei der Parabel auch den (einzigen) Scheitel selbst, während bei der Hyperbel die Auffindung der (beiden) Scheitel Aufgabe zweiten Grades bleibt. Dass diese beiden Kurven in Bezug auf ihre metrische Behandlung zugänglicher erscheinen als die Ellipse, liegt eben daran, dass die Masseigenschaften sich als Beziehungen zu den unendlich fernen Elementen darstellen, welche sowohl bei Parabel als Hyperbel vertreten sind. Die Ellipse aber hat keine unendlich fernen Elemente, und daher auch keine so leicht auffindbaren Masseigenschaften.

Erkl. 441. Ein Vergleich der Aufgaben 299 und 307 zeigt ferner dasselbe Verhalten von Parabel und Hyperbel gegenüber der Konstruktion nach Brianchon bezw. Pascal, wie früher gegenüber der Erzeugungsweise durch Punktreihen bezw. Strahlenbüschel. Die Behandlung der Parabel geschieht am leichtesten mittels Erzeugung durch Punktreihen (als Klassenkurve) und hier mittels Konstruktion nach Brianchon (mit Tangentensechsseit), die der Hyperbel dagegen mittels Erzeugung durch Strahlenbüschel als Ordnungskurve, und hier mittels Konstruktion nach Pascal (mit eingeschriebenem Sechseck).

deren Schnittpunkt der erste Punkt der Pascalschen Geraden. Verbindungsgerade III, IV ist Tangente a selbst, VI, I ist die Parallele durch B zur Richtung nach F, also deren Schnittpunkt der zweite Punkt der Pascalschen Geraden; und wo diese zusammentrifft mit IV, V, dort ist der Punkt, durch welchen die Gerade VI, I hindurchgeht, d. h. durch diesen Schnittpunkt geht die Asymptote f als Parallele zur Richtung nach F.

2. Man nimmt die Ziffer I vom Punkte F weg und denkt sich mit I den zweiten unendlich fernen Punkt G der Hyperbel bezeichnet; dann ist I, II die unendlich ferne Gerade selbst von G nach F; dieselbe trifft IV, V im unendlich fernen Punkte der Sehne AB, also ist dieser unendlich ferne Punkt der erste Punkt der neuen Pascalschen Geraden. Verbindungsgerade II, III ist die schon vorhandene Gerade von ∞F nach A, ebenso V, VI wieder die vorhandene Tangente b, also geht durch deren Schnittpunkt auch die zweite Pascalsche Gerade, und zwar als Parallele zu AB. Ihr Schnittpunkt mit III, IV, nämlich der Tangente a, ist der Punkt, durch welchen die neue Gerade VI, I hindurchgeht; d. h. die Verbindungsgerade dieses Schnittpunktes mit Punkt VI (oder B) trifft die unendlich ferne Gerade I, II im gesuchten Punkte I oder $G\infty$, oder diese Gerade liefert die Richtung der zweiten Asymptote.

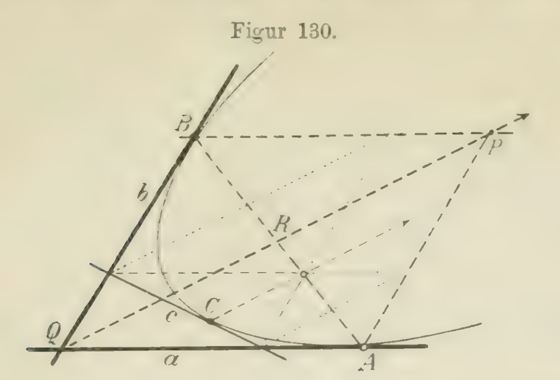
3. Um noch diese Asymptote selbst zu finden, setzt man an den Punkt ∞G zu der Ziffer I noch die am Punkt B wegzunehmende Ziffer VI. Dann ist I, II wieder die unendlich ferne Gerade, IV, V ist AB, also deren unendlich ferner Punkt wieder der erste Punkt der dritten Pascalschen Geraden. II, III ist wieder AF, V, VI ist jetzt BG, also ihr Schnittpunkt der zweite Punkt der Pascalschen Geraden, diese selbst durch den Schnittpunkt parallel AB. Ihr Schnittpunkt mit III, IV, nämlich der Tangente a, liefert den Punkt, durch welchen VI, I hindurchgeht, nämlich die Tangente im Punkte I als Parallele zur Richtung nach G, und diese ist die zweite Asymptote.

Aufgabe 308. Man untersuche, was für Elemente bekannt sein müssen behufs Konstruktion des Mittelpunktes und der Achsen einer Hyperbel.

Aufgabe 309. Man untersuche, welche metrischen Eigenschaften der Kurven durch Anwendung der Sätze von Brianchon und Pascal dargelegt werden können.

Auflösung. 1. Als eine Anwendung des Satzes von Brianchon fürs Dreiseit auf jede

Figur 130.



Erkl. 442. Das Viereck, welches die vier harmonischen Punkte auf der Tangente liefert, ist z. B. in Figur 73:

für Tangente in A das Viereck $CPBH$ mit harmonischen Punkten $AYJG$,

für Tangente in B das Viereck $APCJ$ mit harmonischen Punkten $BZGH$,

für Tangente in C das Viereck $BPAG$ mit harmonischen Punkten $CXHJ$.

Und genau gleiche Buchstaben gelten für Figur 74 und 75, wo R statt P steht, und die Buchstaben XYZ auf der Geraden r anzusetzen wären.

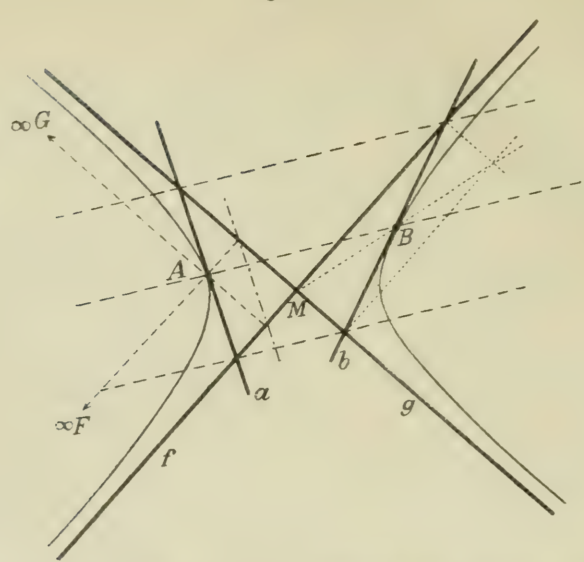
Erkl. 443. Die Eckpunkte des Tangentendreiecks der Parabel sind der Schnittpunkt Q von a und b, sowie die beiden unendlich fernen Punkte dieser Tangenten a und b. Man erhält daher bei mehrfachen Konstruktionen nach Brianchon bei der Parabel stets solche Parallelogramme $APBQ$ mit dem Punkt des Brianchon als Eckpunkt P. Es folgt daraus als allgemeine Parabeleigenschaft: Die Verbindungsgerade eines äusseren Punktes Q mit dem Mittelpunkt R der Berührungssehne seiner Tangenten geht durch den unendlich fernen Punkt der Parabel hindurch. Ferner lässt sich zeigen, dass auf QR auch gerade der Mittelpunkt von QR Kurvenpunkt sein muss mit Tangente parallel der Berührungssehne. — Lässt man nämlich den Schnittpunkt (ac) wandern auf a, so wird der zugehörige Schnittpunkt (bc) auf b ausgeschnitten von der Parallelen zu a durch denjenigen Punkt auf AB, welcher von der Parallelen zu b ausgeschnitten wurde. Den Berührungspunkt auf c trifft jeweils die Parallele zu PQ durch denselben Punkt auf AB. Zugleich liegen die Schnittpunkte der neuen Parallelen zu a und b auf den vorigen Parallelen durch A bezw. B. (Vergl. Kleyer-Sachs, Ebene Elementar-Geometrie, V. Teil, Figur 17.) Auf diesem Wege findet man, wenn $c \parallel AB$, das vorhin angekündigte Ergebnis, dass der Mittelpunkt von QR Berührungspunkt, also Kurvenpunkt ist.

Erkl. 444. Die vier Geraden im Satze des Brianchon fürs Vierseit gehen durch einen Punkt; allgemeine Kurve erkennt man an den Figuren 73 bis 75 die Richtigkeit der bereits in Erklärung 126 und 165 angeführten Eigenschaft, dass der Berührungspunkt einer Tangente stets vierter harmonischer Punkt ist zu ihren Schnittpunkten mit einer beliebigen Sehne und den Tangenten in deren Kurvenpunkten. Denn diese beiden Tangenten sind Seiten eines Vierecks, von welchem die Sehne die eine Diagonale und der Punkt des Brianchon die vierte Ecke bildet.

2. Wendet man auf die Parabel den Satz von Brianchon fürs Dreiseit an, indem man die unendlich ferne Tangente als eine Seite einsetzt, so entsteht (Fig. 130) ein Parallelogramm aus zwei Tangenten a und b mit deren Berührungspunkten A und B als Ecken. Und dessen zweite Diagonale muss erstens die Berührungssehne AB halbieren und zweitens nach dem Berührungspunkt der unendlich fernen Tangente gehen. — Nimmt man die unendlich ferne Tangente als eine Seite eines Tangentenvierecks der Parabel, so liegt der Punkt des Brianchon ebenfalls auf der Berührungssehne AB, und durch ihn gehen die Parallelen zu a und b und die Gerade vom Berührungspunkt C nach dem Berührungspunkt der unendlich fernen Tangente.

3. Wendet man den Satz von Brianchon fürs Vierseit in der Art auf die Hyperbel an, dass die beiden Asymptoten zwei Gegenseiten werden, so ist die Verbindungsgerade ihrer Berührungspunkte selbst die unendlich ferne Gerade, folglich müssen durch einen Punkt dieser Geraden gehen, d. h. parallel sein: die Verbindungsgeraden sowohl der Berührungspunkte AB, als auch der Schnittpunkte (fa) und (gb) sowohl als (fb) und (ga). Dadurch werden aber eine Reihe der früher nachgewiesenen metrischen Eigen-

Figur 131.



wenn also unter ihnen selbst die unendlich ferne Gerade ist, so gehen die drei anderen durch einen gemeinsamen Punkt, durch welchen auch die unendlich ferne Gerade geht; das kann aber nur selbst ein unendlich ferner Punkt sein, und folglich gehen die drei Geraden durch einen und denselben unendlich fernen Punkt, d. h. sie sind parallel. Aus der Parallelität dieser Geraden folgt aber, wie schon in Erkl. 169 angedeutet, auch die Flächengleichheit der Dreiecke zwischen Asymptote und veränderlicher Tangente, und damit die Gesamtheit der in Satz 22 aufgestellten Hyperbeleigenschaften. Während diese aber dort durch metrische Betrachtungen gefunden wurden, geschieht dies hier durch Anwendung des rein projektivischen Satzes von Brianchon.

schaften der Hyperbel offengelegt. — Nimmt man für die Hyperbel den Satz des Brianchon für drei Tangenten, wovon zwei Asymptoten (bfg in Fig. 131), so findet man wieder, dass der Berührungspunkt B der Tangente b der Mittelpunkt der Asymptotenschnittpunkte $(bf)\,(bg)$ der Tangente b sein muss. — Zum gleichen Ziel gelangt man durch Anwendung des Satzes von Pascal für drei Kurvenpunkte, wovon zwei die unendlich fernen; denn für das Dreieck AFG muss die Pascalsche Gerade, d. i. die Verbindungsgerade der Asymptotenschnittpunkte von AF und AG parallel werden mit der Tangente a selbst, also A Mittelpunkt zwischen (af) und (ag).

Erkl. 445. In Figur 131 ist rechts der Satz von Brianchon dargestellt für das Dreiseit der Tangenten bfg. Aehnlich der Figur 130 entsteht ein Parallelogramm, dessen Diagonalenschnittpunkt B der Mittelpunkt von b sein muss. — Links ist der Satz von Pascal dargestellt für das Dreieck der Kurvenpunkte AFG. Auf einer Geraden liegen die Schnittpunkte von AG mit f. AF mit g und a mit FG. Letzterer Schnittpunkt ist unendlich fern, folglich die Verbindungsgerade der andern parallel a. Demnach ist dem Dreieck afg ein anderes mit parallelen Seiten eingeschrieben, und das kann nur das Dreieck der Seitenmittelpunkte sein. Daher folgt hier links wie rechts, dass der Berührungspunkt der Tangente der Mittelpunkt ihrer Asymptotenschnittpunkte ist.

Aufgabe 310. Einem gegebenen Winkel mit gegebenen Berührungspunkten auf den Schenkeln soll eine Parabel eingeschrieben werden. Man suche beliebige weitere Kurvenelemente.



Ergebnisse der ungelösten Aufgaben.

Aufgabe 2. Die drei Seiten a, b, c können Vierseite bilden mit vierter Seite k, oder l oder m; die drei Seiten a, b, e mit g, l, m oder n; drei Seiten a, b, h mit g, k, l, m, n u. s. w. Von jeder Art wieder die verschiedenen Abwandlungen, so dass eine sehr grosse Zahl harmonischer Punktgruppen entsteht, die vielfach erst neu in die Figur eingezeichnet werden müssen.

Aufgabe 5. Die sieben Punkte $ABCDEFG$ liefern ausser $ABCD$ noch sechs verschiedene Vierecke, z. B. $ACEF$ mit Nebenecken B, D, M, also vier harmonischen Strahlen in B: a, b; f, i; in D: c, d; f, l; in M: e, g; i, l. Ferner entstehen Vierecke aus ABC mit K oder L oder N und viele andere, wobei jeweils drei harmonische Strahlengruppen erscheinen.

Aufgabe 8. Die Ausführung des zweiten Beweisganges an Figur 78 wäre folgende:

1. Für die Dreiecke $b_1c_1a_1$ und $b_2c_2a_2$ gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Schnittpunkte durch denselben Punkt (ef) und ebenso für die Dreiecke $d_1c_1a_1$ und $d_2c_2a_2$. Daher liegen

2. die Schnittpunkte entsprechender Seiten c_1c_2, a_1a_2, b_1b_2 auf einer gemeinsamen Geraden t und die Schnittpunkte entsprechender Seiten c_1c_2, a_1a_2, d_1d_2 auf einer gemeinsamen Geraden t', und folglich alle vier Schnittpunkte c_1c_2, a_1a_2, b_1b_2, d_1d_2 auf gleicher Geraden durch a_1a_2, c_1c_2. Hiernach liegen

3. für die Dreiecke $b_1d_1a_1$ und $b_2d_2a_2$ (oder $b_1d_1c_1$ und $b_2d_2c_2$) die Schnittpunkte entsprechender Seiten b_1b_2, d_1d_2 und a_1a_2 (oder c_1c_2) auf derselben Geraden t, folglich gehen auch die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken b_1d_1 und b_2d_2 durch denselben Punkt, wie die Verbindungsgeraden der Ecken a_1b_1, a_2b_2 und a_1d_1, a_2d_2, nämlich durch den Punkt (ef).

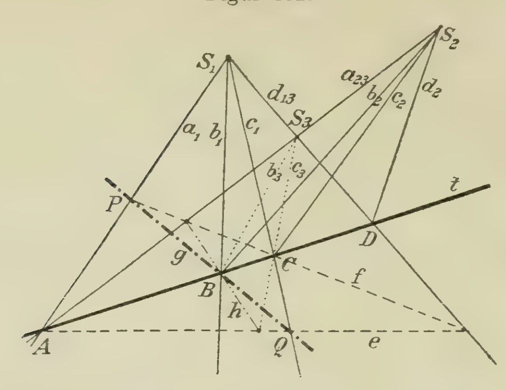
Aufgabe 10. In Figur 76 sind nach Erkl. 3 die Punktgruppen $AHBF$ harmonisch, folglich auch die Strahlen dahin aus den Scheiteln M oder N; also müssen vier harmonische Punkte mit gleicher Zuordnung auf jeder andern Schnittgeraden auch durch dieselben Geraden ausgeschnitten werden.

In Figur 77 sind nach Erkl. 217 die Strahlengruppen $ahde$ harmonisch, folglich auch die Schnittpunkte derselben mit den Geraden m oder n; also müssen vier harmonische Strahlen mit gleicher Zuordnung aus jedem andern Scheitel auch durch dieselben Punkte hindurchgehen.

Aufgabe 11. G ist stets vierter harmonischer Punkt zu K, B, C. Also muss dieselbe Gerade, welche zu EK, EB, EC die vierte harmonische ist, auch auf jeder Geraden durch B oder C den vierten harmonischen Punkt ausschneiden, d. h. alle Punkte G liegen auf derselben Geraden EG.

Aufgabe 14. Je nachdem das Dreieck der drei zuerst zu wählenden Hilfselemente den Träger (Scheitel) der drei ursprünglich gegebenen Elemente im Innern hat oder in einem Scheitelwinkelraum oder Aussenwinkelraum, entsteht eine verschiedene der in Figur 4 und Figur 78 dargestellten Zeichnungen.

Figur 132.



Aufgabe 16. 1. $ABCD$ (Fig. 132) harmonisch; $S_3 = (a_{23} d_{13})$; beliebige Gerade g durch B; vollständiges Viereck $APQC$, dessen Nebenecke $(a_1 c_1)$ mit der neuentstehenden Nebenecke (ef) durch den bereits vorhandenen vierten harmonischen Strahl d_{13} verbunden wird.

2. Dreiecke $a_1 f a_3$ und $c_1 e c_3$ haben die Schnittpunkte entsprechender Geraden a_1 und c_1, f und e, a_3 und c_3 alle drei auf einer Geraden d_{13}, folglich auch Verbindungsgeraden entsprechender Ecken $(a_1 f)$ und $(c_1 e)$, $(f a_3)$ und $(e c_3)$, $(a_3 a_1)$ und $(c_3 c_1)$ durch denselben Punkt B.

3. Vollständiges Viereck mit Seiten $tehf$, dessen Nebenecken (th) und (ef) mit der dritten Nebenecke $(a_2 c_3)$ durch zwei zugeordnete harmonischer Strahlen b_3 und d_3 verbunden, folglich $b_3 d_3$ harmonisch mit $a_3 c_3$.

4. Hiernach $a_3 b_3 c_3 d_3$ harmonisch wie $a_1 b_1 c_1 d_1$, also auch $a_2 b_2 c_2 d_2$ wie $a_3 b_3 c_3 d_3$ oder wie $a_1 b_1 c_1 d_1$.

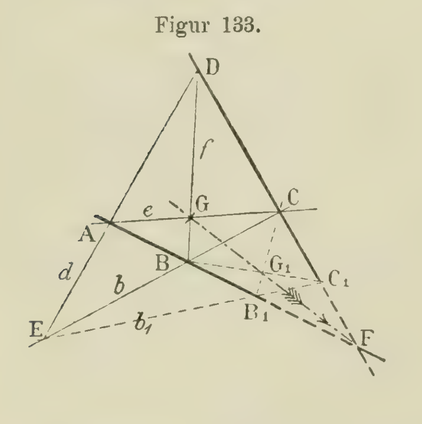
Aufgabe 18. Scheitel wird der Schnittpunkt von $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ oder von $A_1 B_2$, $A_2 B_1$. — Träger wird die Verbindungsgerade von $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ oder von $a_1 b_2$, $a_2 b_1$.

Aufgabe 20. Man kann entsprechen lassen beliebig AE (oder AF), folglich BF (oder BE), und wieder beliebig CH (oder CK), folglich DK (oder DH), also jedes Paar der einen Gruppe zweifach jedem Paar der andern — und daher zusammen auf achtfache Weise die Beziehung herstellen.

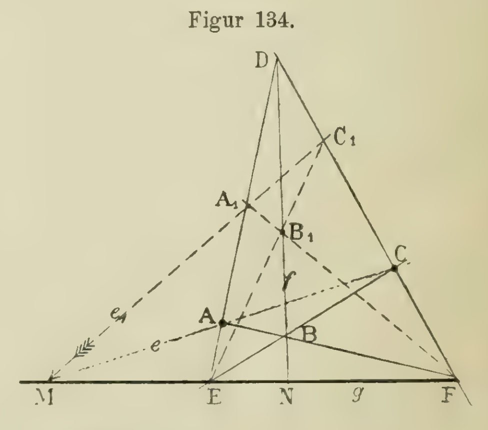
Aufgabe 22. Man verfährt nach Figur 133.

Aufgabe 25. Man verfährt wie in Figur 134.

Figur 133.



Figur 134.



Aufgabe 29. Genau wie in Auflösung der Aufgabe 28.

Aufgabe 30. Genau wie in Aufgabe 27.

Aufgabe 31. Durch eine gegebene Ecke im Fünfseit soll eine Gerade gelegt werden, auf der die Schnittpunkte aller fünf Seiten vier harmonische Punkte bilden. Zu lösen genau wie Aufgabe 27.

Aufgabe 32. Auf gegebener Geraden durch eine Ecke eines Fünfecks einen Punkt zu suchen, aus dem die übrigen vier Eckpunkte durch vier harmonische Strahlen projiziert werden. Zu lösen genau wie Aufgabe 28.

Aufgabe 39 bis 42. In den Aufgaben 29 bis 32 wird der Ausdruck „harmonisch" jeweils ersetzt durch „projektivisch mit den gegebenen vier Elementen". Die Lösung genau wie Aufgabe 37 bezw. 38.

Aufgabe 47. I. Endpunkte, Mittelpunkt und unendlich ferner Punkt einer beliebigen Strecke.

II. Vier Strahlen nach Aufgabe 46, durch eine Gerade geschnitten.

Aufgabe 49. 1. Durch die Verbindungsgerade der Schnittpunkte der nichtparallelen Trapezseiten und der Diagonalen werden beide Grundseiten des Trapezes halbiert.

2. Verbindet man zwei Ecken eines Dreiecks kreuzweise mit den Schnittpunkten irgend einer Parallelen zu ihrer Seite, so liegt der Schnittpunkt auf der Schwerlinie.

Aufgabe 52. Genau wie Aufgabe 50 und 51 zu lösen.

Aufgabe 55. Aufgabe 54 $n-1$ mal nebeneinander, oder in Zusammenfassungen.

Aufgabe 57.

$$(EJBC) = (mnfc) = (gnac) \text{ und } (mnfc) = (ELDA) = (gnca).$$

also:

$$(gnac) = (gnca) = \frac{1}{(gnac)} \text{ oder } (gnac)^2 = 1, \ (gnac) = -1.$$

Aufgabe 60.

$$1\alpha)\ a = 3,\ b = 15,\ x = \frac{2\cdot 3\cdot 15}{18} = 5;\ 1\beta)\ a = 10,\ b = 15,\ x = \frac{2\cdot 10\cdot 15}{25} = 12;$$

$$2\alpha)\ a = 3,\ c = 5,\ y = \frac{3\cdot 5}{6-5} = 15;\ 2\beta)\ a = 10,\ c = 12,\ y = \frac{10\cdot 12}{20-12} = 15 \text{ u. s. w.}$$

Aufgabe 62.

1. h innen: $\alpha = (kf) = 36^0\,41,\ \beta = (ke) = 113^0\,41',\ \varphi = (kh);$

$$ctg\,\varphi = \frac{1}{2}(1.34242 - 0{,}43862) = 0.45190;\ \varphi = 65^0\,41,\ (fh) = \varphi - \alpha = 29^0;$$

2. h' aussen: $\alpha = (fk) = 36^0\,41,\ \gamma = (fe') = 103^0,\ \psi = (fh');$

$$ctg\,\psi = 2\cdot - 0.23087 - 0.46174 = -1.80416;\ ctg(180-\psi) = +1.80416,$$
$$180 - \psi = 29^0,\ \psi = 151^0 = \sphericalangle(fh'),\ \sphericalangle(fh) = 180 - \psi = 29^0.$$

Aufgabe 64. Man wähle statt 48⁰ und 29⁰ in Aufgabe 61 zwei beliebige andere Winkel, rechne darnach die Winkel φ oder ψ und wiederhole hieran genau die Aufgabe 63.

Aufgabe 66. Zeile 2 hat:

$$x = \frac{3}{2},\ y = \frac{5}{2} : \frac{1}{2} = 5;\quad y = 5,\ x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ u. s. w.}$$

Aufgabe 68.

$$n_1 : n_2 = 1 : \frac{5}{3},\ n_3 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{3}\right) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3};\ n_1 : n_3 : n_2 = 1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{3} = 3 : 4 : 5;$$

$$l_1 : l_2 = \frac{5}{3} : 1,\ l_3 = 2\cdot\frac{5}{3}\cdot 1 : \left(\frac{5}{3} + 1\right) = \frac{10}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{5}{4};\ l_1 : l_3 : l_2 = \frac{5}{3} : \frac{5}{4} : 1 = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}.$$

Der neue Ton ist die Quart: als Figur entsteht (von rechts nach links gemessen) Zeile 6 der Figur 89.

Aufgabe 70. In Figur 89, Zeile 1 ist:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6} = \frac{1}{3} \text{ und } \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{4} \text{ und } \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Und in Figur 90 (Aufgabe 61 und 62) ist:

$$\begin{array}{rcr|rcr} ctg\, 48^0 & = & 0{,}90040 & ctg\, 29^0 & = & 1{,}80405 \\ -ctg\, 66^0\, 19' & = & -0{,}43862 & -ctg\, 36^0\, 41' & = & -1{.}34242 \\ \hline ctg\, 77^0 & = & 0{,}46178 & ctg\, 77^0 & = & 0{,}46163 \\ \\ ctg\, 36^0\, 41' & = & 1{,}34242 & ctg\, 29^0 & = & 1{,}80405 \\ -ctg\, 66^0\, 19' & = & -0{,}43862 & -ctg\, 48^0 & = & -0{.}90040 \\ \hline ctg\, 65^0\, 41' & = & 0{,}90380 & ctg\, 65^0\, 41' & = & 0{,}90365 \end{array}$$

Aufgabe 71.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{1} = \frac{3+1+2-6}{6} = 0 \text{ zweimal}$$

und

$$ctg\, 48^0 + ctg\, 113^0\, 41' + ctg\, 36^0\, 41' - ctg\, 29^0 = 0.$$

Aufgabe 72. Figur 89, Zeile 2:

$$EK\cdot HF = 15\cdot 2 = EH\cdot FK = 30,$$

und doppelt so gross ist:

$$EF\cdot HK = 5\cdot 12 = 60.$$

Ferner ist geteilt:

EH durch F wie $5:2$, durch K wie $15:12$;
EK durch F wie $5:10$, durch H wie $3:12$;
FH durch E wie $5:3$, durch K wie $10:12$;
FK durch H wie $12:2$, durch E wie $15:5$,

jeweils das erste Verhältnis doppelt so gross wie das zweite. Und in Figur 90 (Aufgabe 61 und 62) ist:

$$sin(ek)\cdot sin(hf) = sin\, 66^0\, 19'\cdot sin\, 29^0 = sin(eh)\, sin(fk) = sin\, 48^0\cdot sin\, 36^0\, 41' = 0{,}44395,$$

und doppelt so gross ist:

$$sin(ef)\cdot sin(hk) = sin\, 77^0\cdot sin\, 65^0\, 41' = 0{,}8879.$$

Ferner ist geteilt:

(eh) durch f wie $\frac{sin\, 77^0}{sin\, 29^0} = 2{,}01$, durch k wie $\frac{sin\, 66^0\, 19'}{sin\, 65^0\, 41'} = 1{,}005$;

(ek) durch h wie $\frac{sin\, 48^0}{sin\, 65^0\, 41'} = 1{,}2262$, durch f wie $\frac{sin\, 36^0\, 41'}{sin\, 77^0} = 0{,}6131$;

(fh) durch e wie $\frac{sin\, 77^0}{sin\, 48^0} = 1{,}3111$, durch k wie $\frac{sin\, 36^0\, 41'}{sin\, 65^0\, 41'} = 0{,}65555$;

(fk) durch h wie $\frac{sin\, 65^0\, 41'}{sin\, 29^0} = 1{,}8797$, durch e wie $\frac{sin\, 113^0\, 41'}{sin\, 77^0} = 0{,}9799$;

wieder jeweils das erste Verhältnis doppelt so gross wie das zweite.

Aufgabe 75. Setzt man in $\overline{MB}^2 = MP\cdot MQ$ den letzten Faktor:

$$MQ = MP + PQ = MP + 2PN = MP + 2PB + 2BN,$$

so wird:

$$\overline{MB}^2 = \overline{MP}^2 + 2MP\cdot PB + 2MP\cdot BN,$$

also:

$$\begin{aligned} 2MP\cdot BN &= \overline{MB}^2 - \overline{MP}^2 - MP\cdot PB - MP\cdot PB = \overline{MB}^2 - MP(MP + PB) - MP\cdot PB \\ &= \overline{MB}^2 - MP\cdot MB - MP\cdot PB = MB(MB - MP) - MP\cdot PB \\ &= MB\cdot PB - MP\cdot PB = PB(MB - MP) = \overline{PB}^2. \end{aligned}$$

Man hat also:

1. $\overline{PB}^2 = 2\,MP \cdot BN$ und ebenso 2. $\overline{QB}^2 = 2\,MQ \cdot BN$

und auch:

3. $\overline{AP}^2 = 2\,MP \cdot AN$, 4. $\overline{AQ}^2 = 2\,MQ \cdot AN$.

Werden diese vier Gleichungen addiert bezw. multipliziert, so kommt:

5. $\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{AQ}^2 + \overline{QB}^2 = 2\,MP(AN + BN) + 2\,MQ(AN + BN)$
$= 2(AN + BN)(MP + MQ) = 2(AM + MN + BM + MN)(MN + NP + MN + NQ)$
$= 2(2\,MN)(2\,MN) = 8\,\overline{MN}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{PQ}^2)$

und

6. $AP \cdot PB \cdot AQ \cdot QB = 4 \cdot AN \cdot BN \cdot MP \cdot MQ = \frac{1}{4}\,\overline{AB}^2 \cdot \overline{PQ}^2$.

wobei für Zeichenberücksichtigung negatives Vorzeichen stehen muss, weil rechts alle vier Strecken gleichgerichtet, links eine entgegengesetzt gerichtet ist. Und analog gilt:

$$ctg^2(ap) + ctg^2(pb) + ctg^2(aq) + ctg^2(qb) = 8\,[ctg^2(ab) + ctg^2(pq)] - 4$$

und

$$\sin(ap)\sin(pb)\sin(aq)\sin(qb) = \frac{1}{4}\sin^2(ab)\sin^2(pq).$$

Aufgabe 77. Der Berührungspunkt der Tangente ist der einzige Punkt derselben, durch welchen ausser ihr keine zweite Tangente hindurchgeht, — die Tangente durch einen Kurvenpunkt der einzige Strahl durch denselben, auf welchem kein zweiter Kurvenpunkt mehr liegt.

Aufgabe 79. Wird der Schnittpunkt von $B_1 B_2$ mit $A_1 A_2$ zu S_2, der mit $C_1 C_2$ zu S_1, so wird t_0 zu $A_1 C_2$, und dann $t_1 \;\overline{\wedge}\; S_1 \wedge t_0 \wedge S_2 \;\overline{\wedge}\; t_2$.

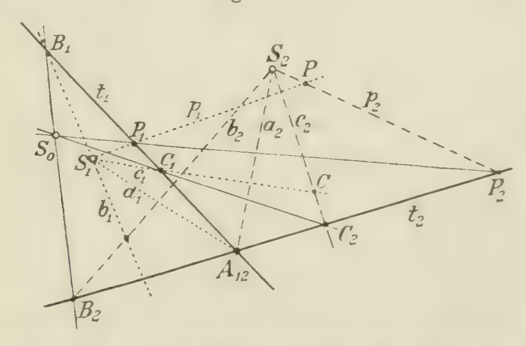
Aufgabe 81. Punkte D_2 und E_1 entsprechend dem Schnittpunkt D_1 und E_2 nach Figur 29 oder 63a.

Aufgabe 83, 86. Man verfährt nach Aufgabe 78, 79 und 82.

Aufgabe 84, 87. $F_1 F_2 \parallel t_1$ und $G_1 G_2 \parallel t_2$ wie in Aufgabe 80.

Aufgabe 150. Man verfahre wie in Auflösung der Aufgabe 149 und nach hierstehender Figur 135.

Figur 135.



Aufgabe 151. Strahlen d_2 und e_1 entsprechend dem Strahle d_1 und e_2 nach Figur 34 oder 64a.

Aufgabe 197. Man erhält die Kurve als Klassenkurve aus vier Tangenten nebst dem Berührungspunkte auf einer derselben, wobei die letztere zu einem Träger werden muss; also nach Aufgabe 82 bezw. 122 oder 141.

Aufgabe 198. Man erhält die Kurve als Ordnungskurve aus vier Kurvenpunkten nebst Tangente in einem derselben, wobei dieser letztere zu einem Scheitel werden muss; also nach Aufgabe 152 bezw. 155, 180 oder 195.

Aufgabe 203. Man projiziere drei oder mehr beliebige Punkte einer Kurve zweiter Ordnung aus zwei festen Punkten derselben auf eine die Kurve a) nicht treffende, b) berührende, c) schneidende Gerade (s. Figur 101), bezw. drei oder mehr Schnittpunkte von beliebigen Tangenten einer Kurve zweiter Klasse mit zwei festen Tangenten derselben aus einem a) innerhalb, b) auf, c) ausserhalb der Kurve liegenden Punkte (s. Figur 100).

Aufgabe 206. Es entsteht (allein oder neben der andern unter gleicher Ziffer aufgezählten Kurve):

Ellipse: 88 bis 97, 107 bis 111, 116 bis 118, 122, 124, 127, 130, 133, 134, 138 bis 147.

Parabel: 98, 99, 100, 112 bis 115, 119 bis 121, 128, 129, 136, 137.

Hyperbel: 88 bis 97, 101 bis 106, 107 bis 111, 116 bis 118, 122 bis 127, 130 bis 135, 138 bis 147.

Aufgabe 208. Es entsteht (allein oder neben der andern unter gleicher Ziffer aufgezählten Kurve):

Ellipse: 154 bis 157, 177, 180, 186, 192 bis 198.

Parabel: 170, 173, 183, 189.

Hyperbel: 154 bis 157, 158 bis 169, 171, 172, 174 bis 176, 178, 179 bis 182, 184 bis 188, 190, 191, 192 bis 198.

Aufgabe 218 bis 220. Man hat dieselben Aufgaben wie 211 bis 213, nur in anderer Ausdrucksweise.

Aufgabe 234. Einem gegebenen Dreieck oder einem gegebenen Winkel mit einem gegebenen Berührungspunkt eine Hyperbel so an- (223) oder umzuschreiben (226), dass eine gegebene Gerade Asymptote wird. Einem Dreieck eine Hyperbel so anzuschreiben, dass zwei gegebene Dreieckseiten Asymptoten werden. Einem gegebenen Viereck (Dreieck) eine Hyperbel umzuschreiben, so dass die eine (beide) der Asymptoten einer (zwei) gegebenen Geraden parallel wird u. s. w.

Aufgabe 237. Man erhält die Achsenrichtung bei der als Klassenkurve konstruierten Parabel als Richtung zum unendlich fernen Berührungspunkt; die Achse selbst bei der als Ordnungskurve konstruierten Parabel nach Aufgabe 236, 2.

Aufgabe 239 bis 241. Man verfährt nach Aufgabe 238 und Erkl. 363.

Aufgabe 243 bis 249. Man verfährt nach Aufgabe 242. Die Asymptoten bilden nach Erkl. 153 und Figur 49 den Winkel α bezw. $\frac{\alpha}{2}$ mit den Strahlen $a_1 a_2$ und gehen nach Erkl. 365 durch den Mittelpunkt von $S_1 S_2$.

Aufgabe 252. Da die Potenz k gleich der Strecke von M zum Fluchtpunkt für die zwei zusammengefassten Träger ist, so trage man $G_1 M$ auf t_1 bezw. t_2 beiderseits G_1 bezw. F_2 ab. Ebenso für t_2 und $C_1 C_2$ (wenn man annimmt $C_1 C_2 \parallel A_1 A_2$) die Strecke MA_2 auf t_2 beiderseits A_2 und auf $C_1 C_2$ beiderseits vom Schnittpunkt $C_1 C_2$ mit $G_1 G_2$.

Aufgabe 253. Erstens Verschiebung von t_2 in sich selbst, oder parallel sich selbst längs t_1, bis die Fluchtpunkte gleichen Abstand l vom Schnittpunkt haben; dann zweitens Drehung um den Schnittpunkt bis $\sin\frac{\tau}{2} = \frac{k}{l}$.

Aufgabe 254. Der vorhandene Winkel liefert $l = \frac{k}{\sin\frac{\tau}{2}}$. Folglich kann der gemeinsame Schnittpunkt weder der einen noch der andern Reihe festbleiben, sondern es erfolgt Verschiebung von t_2 erst in sich selbst, bis der Fluchtpunkt auf t_2 Abstand l vom Schnittpunkt hat, und dann auch noch parallel sich selbst längs t_2, bis der Schnittpunkt auch vom Fluchtpunkt auf t_1 denselben Abstand l hat.

Aufgabe 255. Der gegebene Radius liefert erst $\cos\frac{\tau}{2} = \frac{r}{k}$, dann $l = \frac{k}{\sin\frac{\tau}{2}}$. Also wie bei voriger Aufgabe Herstellung der beiden l, und dazu dann noch Drehung, bis Winkel τ erreicht.

Aufgabe 258. Die Schnittpunkte der parallelen Tangenten mit den Asymptoten.

Aufgabe 259. Trägt man in S_2 an S_2A den Winkel AS_1S_2 an, so entsteht die Tangente der Hyperbel in S_2: jene in S_1 entweder als Parallele hierzu, oder selbständig durch Antragen des Winkels AS_2S_1 in S_1 an S_1A. Der Mittelpunkt der Hyperbel ist der Halbierungspunkt von S_1S_2, und die Asymptoten sind die Parallelen zu den Halbierungsgeraden der Winkel S_1AS_2 oder S_1BS_2 oder S_1CS_2.

Aufgabe 260. Jeder Kreis, der die Verbindungsstrecke zweier centrisch symmetrischen Punkte einer gleichseitigen Hyperbel zum Radius hat, wird durch die Schnittpunkte mit dieser Hyperbel in drei gleiche Teile (von je 120 Bogengrad) geteilt.

Aufgabe 262. Die Schnittpunkte A_1A_2 der Tangente mit den Asymptoten in der Figur 115 liefern die Potenz $MA_1 \cdot MA_2$.

Aufgabe 263. Die Parallelen durch den gegebenen Kurvenpunkt zu den Asymptoten liefern wieder Punkte A_1A_2, wie in voriger Aufgabe.

Aufgabe 264. Konstruiert man die Tangenten in den unendlich fernen Punkten, so liefern diese als Asymptoten den Mittelpunkt, also durch Anwendung der centrischen Symmetrie die Elemente des zweiten Astes: die konjugierte Hyperbel entsteht durch Vertauschung der Tangentenabschnitte auf einem Asymptotenhalbstrahl.

Aufgabe 265. Sind K_1K_2 die Schnittpunkte der gegebenen Geraden mit den Asymptoten, und A_1A_2 die der gesuchten Tangente, so ist:

$$1.\ MA_1 \cdot MA_2 = \overline{MC}^2,\quad 2.\ MA_1 : MA_2 = MK_1 : MK_2,$$

also:

$$\overline{MA_1}^2 = \frac{MK_1}{MK_2} \cdot \overline{MC}^2 \text{ und } \overline{MA_2}^2 = \frac{MK_2}{MK_1} \cdot \overline{MC}^2.$$

Aufgabe 268. Man verfährt mit Asymptoten und Tangenten wie in Aufgabe 267, mit Asymptoten und Kurvenpunkten wie in Aufgabe 263 und 267; der zweite Ast wird gefunden durch Parallelstrecken wie AH oder AJ in Figur 116, und die konjugierte Hyperbel durch vorheriges Abtragen der einen Strecke MA in entgegengesetzter Richtung vom Schnittpunkt auf derselben Asymptote.

Aufgabe 275 bis 277. Man legt an die Originalkurve zwei Tangenten parallel zur Schnittkante und durch jede derselben eine Parallelebene mit der Bildebene. Jeder Punkt auf einer dieser Parallelebenen liefert eine Parabel, jeder Punkt dazwischen eine Hyperbel, jeder Punkt ausserhalb eine Ellipse.

Aufgabe 286. **Sätze** (siehe Figur 121b):

a) Von den 45 Nebenseiten gehen je drei durch einen der 60 Brianchonschen Punkte, und von diesen 60 Brianchonschen Punkten liegen je vier auf einer der 45 Nebenseiten.

b) Von den 60 Brianchonschen Punkten liegen je drei auf einer von 20 (Steinerschen) Geraden, und von diesen 20 (Steinerschen) Geraden geht je eine durch jeden der 60 (Brianchonschen) Punkte.

c) Von den 20 (Steinerschen) Geraden gehen je vier durch einen von 15 (Steiner-Plückerschen) Punkten, und von diesen 15 (Steiner-Plückerschen) Punkten liegen je drei auf einer der 20 (Steinerschen) Geraden.

d) Von den 60 Brianchonschen Punkten liegen je drei auf einer von 60 (Kirkmanschen) Geraden, und von diesen 60 (Kirkmanschen) Geraden gehen je drei durch einen der 60 (Brianchonschen) Punkte.

e) Von den 60 (Kirkmanschen) Geraden gehen je drei durch einen von 20 (Cayleyschen) Punkten, und von diesen 20 (Cayleyschen) Punkten liegt je einer auf jeder der 60 (Kirkmanschen) Geraden.

f) Von den 20 (Cayleyschen) Punkten liegen je vier auf einer von 15 (Salmonschen) Geraden und ausserdem je einer auf jeder der 20 (Steinerschen) Geraden.

Aufgabe 286a. Wenn eines der von gegebenen fünf Elementen mit einem Berührungselement gebildeten Fünfecke bezw. Fünfseite einem Kegelschnitt bezw. einem Strahlenbüschel zweiter Klasse oder Punktreihe zweiter Ordnung angehört, so gilt das von jedem der 12 Fünfecke aus denselben Elementen. Man hat also 12 verschiedene Pascalsche Geraden bezw. Brianchonsche Punkte; und unter diesen müssen analoge Lagebeziehungen in entsprechend verminderter Zahl bestehen, wie unter den 60 des Sechsecks. — Beim Viereck beschränkt sich die Anzahl auf die drei möglichen Vierecke bezw. Vierseite, also auch nur drei Pascalsche Geraden bezw. Brianchonsche Punkte. — Beim Dreieck ist überhaupt keine Vielfachheit möglich.

Aufgabe 289. Die Prüfung geschieht nach den Sätzen von Brianchon bezw. Pascal für Fünfseit, Vierseit, Dreiseit bezw. Fünfeck, Viereck, Dreieck analog Aufgabe 288.

Aufgabe 292. Sind zwei Dreiecke kollinear, so finden folgende Beziehungen statt:

a) Die drei Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte gehen durch einen Punkt;

b) die sechs Verbindungsgeraden nicht entsprechender Eckpunkte gehören einem Strahlenbüschel zweiter Klasse an;

c) die drei Schnittpunkte entsprechender Seiten liegen auf einer Geraden;

d) die sechs Schnittpunkte nicht entsprechender Seiten gehören einer Punktreihe zweiter Ordnung an.

Aufgabe 296. (12) — (45) wird || 2, sonst genau wie Aufgabe 295 zu verfahren.

Aufgabe 298. Weil die Parabel die unendlich ferne Tangente unbedingt erfordert und im Satze von Pascal fürs Sechseck keine Tangenten vorkommen.

Aufgabe 304. Durch Scheitel nebst Achse kennt man eine Tangente, nämlich die Scheiteltangente samt Berührungspunkt, sowie die unendlich ferne Tangente samt dem Berührungspunkt, also vier Elemente der Art (TP) (TP). Jedes weitere Element P oder T ergänzt die Fünfzahl, ganz abgesehen davon, dass durch die Symmetrie zu jedem neuen sofort das symmetrische bekannt ist.

Aufgabe 306. 1. Wenn die Ueberzahl der gegebenen Elemente Tangenten sind, dann nach Brianchon: also für $TTTTT$, $TTT(TP)$ und $T(TP)(TP)$; wenn Ueberzahl der gegebenen Elemente Kurvenpunkte sind, dann nach Pascal: also für $PPPPP$, $PPP(PT)$, $P(PT)(PT)$.

2. Nach Brianchon findet man Tangenten durch beliebige Punkte auf gegebenen Tangenten, sowie Berührungspunkte gegebener Tangenten; nach Pascal Kurvenpunkte auf beliebigen Sekanten durch gegebene Kurvenpunkte, sowie Tangenten in gegebenen Kurvenpunkten.

Aufgabe 308. Es muss mindestens der eine der unendlich fernen Punkte bekannt sein, d. h. von einer der Asymptoten die Richtung: dann kann der Mittelpunkt und die Achsen konstruiert werden.

Aufgabe 310. Man verfährt nach Erkl. 443 und erhält für gewähltes (ac) erst den Schnittpunkt auf b, dann den Berührungspunkt auf c.



Verlag von Julius Maier in Stuttgart.

*Von **Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen u. exakten Natur-Wissenschaften** sind nachstehende Bände vollständig erschienen:*

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Erstes Buch: **Das Rechnen mit unbenannten ganzen Zahlen.** Mit 71 Erklärungen und einer Sammlung von 657 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **A. Frömter**. Preis: M. 3. —.

do. do. Zweites Buch: **Das Rechnen mit benannten Zahlen.** Mit 30 Erklärungen und einer Sammlung von 518 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Frömter** und **Neubüser**. Preis: M. 3. —.

do. do. Drittes Buch: **Das Rechnen mit unbenannten gebrochenen Zahlen. (Die gemeinen Brüche und die Dezimalbrüche.)** Mit 260 Erklärungen und einer Sammlung von 309 gelösten und ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **J. G. Maier**. Preis: M. 3. —.

Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Erster Teil: **Die Schluss- und Kettenrechnung (die einfache und zusammengesetzte Regeldetri und der Reesische Satz) nebst Anwendungen.** Mit 100 Fragen, 325 Erklärungen, 63 Anmerkungen, 1250 Aufgaben, 18 Figuren, den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben und einer **Münz-, Mass- und Gewichtstabelle.** Zum Selbststudium, Nachschlagen, sowie zum Schulgebrauch bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Richard Olbricht**. Preis: M. 4.50.

do. do. Zweiter Teil: **Die Prozent- und Zinsrechnung nebst ihren Anwendungen, mit Einschluss der Diskontrechnung, der Terminrechnung, der Kalkulationen und Kontokorrente.** Mit 130 Fragen, 444 Erklärungen, 27 Anmerkungen, 1520 Aufgaben, zahlreichen schematischen Figuren, einem Formelverzeichnis, einer Fristen- und Zinsenberechnungstabelle, sowie den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. R. Olbricht**. Preis: M. 6. —.

do. do. Dritter Teil: **Die Gold-, Silber-, Münz-, Effekten- und Wechselrechnung, sowie die Gesellschafts- und Mischungsrechnung.** Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. R. Olbricht**. — Befindet sich unter der Presse. —

Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen (Elemente der Buchstabenrechnung), **der Verhältnisse und Proportionen** mit einer Sammlung von 478 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Hans Staudacher**, Prof. an der kgl. Industrieschule zu Nürnberg. Erster Teil. Preis: M. 5. —.

do. do. Zweiter Teil: **Elemente der Zahlenlehre, Dezimal- und Kettenbrüche und Rechnung mit unvollständigen Zahlen.** Mit einer Sammlung v. 277 gelöst. u. analogen ungelöst. Aufg., nebst d. Resultaten d. letzteren. Bearb. n. **System Kleyer** v. Prof. **Hans Staudacher**. Preis: M. 5. —.

Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln nebst einer Sammlung von 3296 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von **Ad. Kleyer**. Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der Logarithmen nebst einer Sammlung von 1996 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von **Ad. Kleyer**. Preis: M. 4. —.

Fünfstellige korrekte Logarithmentafeln nebst einer trigonometrischen Tafel und einer Anzahl von anderen Tabellen. Von **Ad. Kleyer**. Preis: gebunden M. 2. 50.

Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen, der zusammengesetzten-, harmonischen-, Ketten- und Teilbruchreihen nebst einer Sammlung von über 400 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer**. Preis: M. 4. —.

Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung nebst einer Sammlung von 525 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben aus allen Zweigen des Berufslebens. Von **Ad. Kleyer**. Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. Sammlung von 2381 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grösstenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 230 Erklärungen und 26 in den Text gedruckte Figuren. Von **Ad. Kleyer**. Preis: M. 8. —.

Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit mehreren Unbekannten. Sammlung von 905 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 403 Erklärungen und Anmerkungen. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Otto Prange**. Preis: M. 7. —.

Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit einer Unbekannten. (Quadrat. Gleichungen.) Sammlung von 1650 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form erläutert durch 872 Erklärungen und 53 Figuren. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Aug. Blind**. Preis: M. 10. —.

Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades (Quadratische Gleichungen) mit zwei und mehreren Unbekannten. Sammlung von 361 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 185 Erklärungen und 8 in den Text gedruckten Figuren. Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten bearbeitet nach **System Kleyer** von **Prof. Conrad Metger** Preis: M. 4. —.

Lehrbuch der Gleichungen 3. und 4. Grades, nebst der trigonometrischen Auflösung der Gleichungen 2. Grades. Sammlung von 253 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 251 Erklärungen und 10 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Prof. Conrad Metger**. Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen des 1. Grades. (Diophantische Gleichungen.) Sammlung von 374 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben in vollständig gelöster Form und zahlreichen Erklärungen und Erläuterungen. Nebst den Abhandlungen des Bachez de Méziriac, im französischen Originale mit beigefügter deutscher Uebersetzung. Von **W. Fr. Schüler**. Preis: M. 4.50.

Geschichte der Geometrie für Freunde der Mathematik gemeinverständlich dargestellt von **Richard Klimpert**. Mit 100 in den Text gedruckten Figuren. Preis: M. 3. —.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Erster Teil: **Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 234 Erklärungen und 109 in den Text gedruckten Figuren. Von **Ad. Kleyer**. Preis: M. 1. 80.

do. do. Zweiter Teil: **Der Winkel und die parallelen Linien.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 201 Erklärungen und 113 in den Text gedruckten Figuren. Von **Dr. J. Sachs**. Preis: M. 2. 20.

Verlag von Julius Maier in Stuttgart.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Dritter Teil: Die geometrischen Gebilde und ihre Lagen-Veränderungen. Die einfachen Vielecke. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 737 Erklärungen und 343 Figuren. Von **Dr. J. Sachs**. Preis: M. 6. —.

do. do. Vierter Teil: Die Lehre vom Kreis. Die geometrischen Oerter und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 529 Erklärungen und 230 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs**. Preis: M. 6. —.

do. do. Fünfter Teil: Die Flächen der geradlinigen Figuren. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 346 Erklärungen und 96 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs**. Preis: M. 4.—.

do. do. Sechster Teil: Proportionalität der Strecken. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 378 Erklärungen und 90 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs**. Preis: M. 4. —.

do. do. Siebenter Teil: Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 394 Erklärungen und 76 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs** Preis: M. 4. —

do. do. Achter Teil. Die Anwendung der Aehnlichkeit auf die Lehre vom Kreis. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 505 Erklärungen und 135 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs**. Preis: M. 5. —.

Tabelle der Elemente der regelmässigen Vielecke. Von **Prof. Dr. J. Sachs**. Preis: M. —. 50.

Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (**Synthetische Geometrie. Geometrie der Lage**). Erster Teil: Elemente und Grundgebilde. Projektivität. Dualität. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren. Mit 361 Erklärungen und 97 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs**. Preis: M. 5. —.

do. do. Zweiter Teil: Harmonische Gebilde. Entstehung der Kegelschnitte. Sätze von Paskal und Brianchon. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 445 Erklärungen und 125 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs**. Preis: M. 6. —.

do. do. Dritter Teil: Polarität und Mittelpunktseigenschaften der Kurven. Involution und Brennpunktseigenschaften der Kurven. Von **Prof. Dr. J. Sachs**. ☞ Unter der Presse. ☜

Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben gelöst durch geometrische Analysis. Erster Teil: Aufgaben, gelöst ohne Anwendung der Proportionenlehre. Mit 1952 gelösten und ungelösten Aufgaben, 178 Anmerk., 207 Erkl. und 214 Figuren. Von **E. R. Müller**. Preis: M. 5. —.

do. do. Zweiter Teil: Aufgaben gelöst mit Anwendung der Proportionenlehre. Mit 1327 gelösten und ungelösten Aufgaben, 126 Anmerkungen, 100 Erklärungen und 174 in den Text gedruckten Figuren. Von **E. R. Müller**. Preis: M. 4. —.

do. do. Dritter Teil: Verwandlungs- und Teilungsaufgaben, sowie Aufgaben über ein- und umbeschriebene Figuren. Mit 510 gelösten und ungelösten Aufgaben, 40 Anmerkungen, 72 Erklärungen und 54 Figuren. Von **Prof. E. R. Müller** Preis: M. 2. —.

Das apollonische Berührungsproblem und verwandte Aufgaben. Sammlung von 163 gelösten und ungelösten Aufgaben und 200 Figuren. Zur Ergänzung des Schulunterrichts und zum Selbststudium. Nach **System Kleyer** durchaus neu bearb. Zweite Aufl. Von **Prof. Heinr. Cranz**. Preis: M. 6. —.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Erster Teil: Die rechtwinklige Projektion auf eine und mehrere Projektionsebenen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 271 Erklärungen und 226 Figuren. Von **J. Vonderlinn**. Preis: M. 3. 50.

do. do. Zweiter Teil: Ueber die rechtwinklige Projektion ebenflächiger Körper. Mit 130 Erklärungen und 99 Figuren. Von **J. Vonderlinn**. Preis: M. 3. 50.

do. do. Dritter Teil. Erste Hälfte: Schiefe Parallelprojektion, Centralprojektion einschliesslich der Elemente der projektiven Geometrie. Mit 195 Erklärungen und 169 in den Text gedruckten Figuren. Von **J. Vonderlinn**. Preis: M. 3. 50.

do. do. Dritter Teil. Zweite Hälfte: Centralcollineation ebener und räumlicher Systeme, Kegelschnitte, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie. Mit 218 Erklärungen und 210 in den Text gedruckten Figuren. Von **J. Vonderlinn**. Preis: M. 5. —.

do. do. Vierter Teil: Krumme Linien (ebene und räumliche Kurven). Krumme Oberflächen. Schatten- und Beleuchtungslehre. Von **Prof. J. Vonderlinn** ☞ Erscheint im Frühjahr 1902. ☜

Lehrbuch der Analytischen Geometrie der Ebene. Erster Teil: Analytische Geometrie des Punktes und der Geraden. Mit einer Sammlung von 100 Aufgaben, 206 gelösten Uebungsaufgaben und 92 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Prof. Heinr. Cranz**. Preis: M. 6. —.

do. do. Zweiter Teil: Analytische Geometrie der einzelnen Linien zweiten Grades. Mit einer Sammlung von 116 Aufgaben, 286 gelösten Uebungsaufgaben und 200 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Prof. H. Cranz**. Preis: M. 8. —.

Lehrbuch der Goniometrie (Winkelmessungslehre) mit 307 Erkl. und 52 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung v. 513 gelöst. u. ungelöst. analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer**. Preis: M. 7.—.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Eine Sammlung von 1049 gelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben und 178 ungelösten, oder mit Andeutungen versehenen trigonometrischen Aufgaben aus der angewandten Mathematik. Mit 797 Erkl., 563 in den Text gedruckten Fig. u. 65 Anmerk., nebst einem ausführlich. Formelverzeichnis von über 500 Formeln. Von **Ad. Kleyer**. Preis: M. 18. —.

Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 236 Erklärungen und 56 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. W. Láska**. Preis: M. 4. 50.

Verlag von Julius Maier in Stuttgart.

Lehrbuch der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Mit 52 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 29 Erkl. und 17 in den Text gedruckten Figuren. Bearb. nach **System Kleyer** von **Dr. K. J. Bobek.** Preis: M. 5. —.

Lehrbuch der Vermessungskunde (Geodäsie). Mit einer Sammlung von 153 gelösten Aufgaben und angewandten Beispielen, zahlreichen Erklärungen und 481 in den Text gedruckten Figuren. Unter Berücksichtigung des Selbstunterrichts für Geometer-Eleven, Studierende des Bau-, Berg- und Ingenieur-Fachs, sowie zum praktischen Gebrauch für Feldmesser, Kulturtechniker, Katasterbeamte etc. Von **Dr. W. Láska.** Preis: M. 10. —.

Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie). Erster Teil: Die Lage von geraden Linien und Ebenen im Raum. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 573 Erklärungen und 174 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Seipp.** Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der Körperberechnungen. Erstes Buch. Mit vielen gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, nebst 184 in den Text gedruckten Figuren. **Zweite Auflage.** Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 4. —.

do. do. Zweites Buch. Eine Sammlung von 772 vollständig gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, nebst 742 Erkl. und 256 in den Text gedruckt. Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 9. —

Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen. Erster Teil. Mit einer Sammlung von 469 gelösten und ungelösten Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren, nebst 226 Erklärungen. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. G. Weichold.** Preis: M. 10. —.

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen. Mit 221 Erklärungen und 38 in den Text gedruckten Figuren. Mit einer Sammlung von 269 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richard Krüger.** Preis: M. 5. —.

Lehrbuch der Differentialrechnung. Erster Teil: Die einfache und wiederholte Differentiation explizieter Funktionen von einer unabhängigen Variablen. Ohne Anwendung der Grenzen- und der Nullen-Theorie und ohne Vernachlässigung von Grössen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Zweite Auflage. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 5. —.

do. do. Zweiter Teil: Die vollständige Differentiation entwickelter und nicht entwickelter Funktionen von einer und von mehreren reellen Veränderlichen. Reihenentwicklungen, unbestimmte Formen, Maxima und Minima. Nebst 352 gelösten Aufgaben, 78 Figuren und 230 Erklärungen. Preis: M. 8. —.

do. do. Dritter Teil: Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven. Nebst 425 gelösten Aufgaben, 138 Erklärungen und 164 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer.** von Prof. **Dr. Haas.** Preis M. 7. —.

Lehrbuch der Integralrechnung. Erster Teil. Mit einer Sammlung von 592 gelösten Aufgaben. Für das Selbststudium, zum Gebrauch an Lehranstalten, sowie zum Nachschlagen von Integrationsformeln und -Regeln. Bearbeitet nach eigenem System und im Anschluss an das Lehrbuch der Differentialrechnung von **Adolph Kleyer.** Preis: M. 10. —.

do. do. Zweiter Teil: Anwendung der bestimmten Integrale auf Quadratur, Rektifikation, Komplanation und Kubatur, sowie auf zahlreiche gelöste praktische Aufgaben aus der **Mechanik und Technik.** Mit 245 vollständig gelösten Aufgaben, 163 Figuren und 137 Erklärungen, nebst ausführlichem Formelverzeichnis. Zum Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet von **Prof. Dr. August Haas.** Preis: M. 9. —.

Einführung in die Funktionentheorie. Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Mit 23 in den Text gedruckten Figuren. Von **Dr. W. Láska.** Preis: M. 1. 50.

Lehrbuch der Kombinatorik. Ausführliche Darstellung der Lehre von den kombinatorischen Operationen (Permutieren, Kombinieren, Variieren). Mit 506 gelösten und analogen ungelösten Uebungsbeispielen nebst den Resultaten der letzteren. Nach **System Kleyer** für den Unterricht und zum Selbststudium bearbeitet von **Prof. H. Staudacher.** Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit 303 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 68 Erklärungen und 27 in den Text gedruckten Figuren. Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. K. J. Bobek.** Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der sphärisch. und theoret. Astronomie und der mathematischen Geographie. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Mit 328 Erklärungen, Formelverzeichnis, 148 in den Text gedruckten Figuren und 2 Tafeln. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. W. Láska.** Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der allgemeinen Physik. (Die Grundbegriffe und Grundsätze der Physik.) Mit 549 Erklärungen, 83 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 120 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richard Klimpert.** Preis: M. 8. —.

Lehrbuch der absoluten Masse und Dimensionen der physikalischen Grössen. Mit 352 Fragen, 545 Erklärungen und einer Sammlung von 561 gelösten und ungelösten Aufgaben nebst den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Hovestadt.** Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der Statik fester Körper (Geostatik). Mit 291 Erklärungen und 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis nebst einer Sammlung von 359 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richard Klimpert.** Preis: M. 9. —.

Lehrbuch der Dynamik fester Körper (Geodynamik). Mit 690 Erklärungen, 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 500 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: M. 13. 50.

Lehrbuch über die Percussion oder den Stoss fester Körper. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richard Klimpert.** Preis: M. 3. —.

Lehrbuch der Elasticität und Festigkeit. Mit 212 Erklärungen, 186 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 167 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richard Klimpert.** Preis: M. 5. 50.

Verlag von Julius Maier in Stuttgart.

Lehrbuch der Statik flüssiger Körper (Hydrostatik). Mit 425 Erklärungen, 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 208 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richard Klimpert.** Preis: M. 8. —.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). Erster Band: Die Bewegungserscheinungen flüssiger Körper, welche aus den Boden- und Seitenwänden von Gefässen, sowie durch Röhrenleitungen bei konstanter sowie veränderlicher Druckhöhe fliessen. Mit 434 Erklärungen, mehr als 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 220 gelösten und ungelösten Aufgaben, und den Resultaten der letzteren. Bearb. nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: M. 8. —.

do. do. Zweiter Band. Erste Hälfte: Die Bewegungserscheinungen des Wassers in Kanälen und Flüssen, sowie der dabei ausgeübte Stoss und Widerstand. Mit 282 Erklärungen, mehr als 150 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 134 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: M. 5. —.

do. do. Zweiter Band. Zweite Hälfte: Von der Anwendung der lebendigen Kraft des bewegten Wassers als Motor oder Beweger. Mit 203 Erklärungen, 88 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 30 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: M. 3. 50.

Lehrbuch über das spezifische Gewicht fester, flüssiger und gasförmiger Körper. Mit 55 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Preis: M. 2. —.

Lehrbuch des Magnetismus und des Erdmagnetismus. Nebst einer Samml. von gelösten u. ungelösten Aufgaben erläutert durch 189 in den Text gedr. Fig. u. 10 Karten. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 6.—.

Lehrbuch der Reibungselektricität (Friktions-Elektricität, statischen oder ruhenden Elektricität). Erläutert durch 860 Erklärungen und 273 in den Text gedruckte Figuren, nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 7. —.

Lehrbuch der Kontaktelektricität (Galvanismus). Nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben. Mit 731 Erklärungen, 238 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May.** Preis: M. 8. —.

Lehrbuch der Elektrodynamik. Erster Teil. Mit 105 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May.** Preis: M. 3. —.

Lehrbuch des Elektromagnetismus. Mit 302 Erklärungen, 152 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May** und **Adolf Krebs.** Preis: M. 4. 50.

Lehrbuch der Induktionselektricität und ihrer Anwendungen (Elemente der Elektrotechnik). Mit 432 Erklärungen und 213 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Adolf Krebs.** Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der angewandten Potentialtheorie. Mit 588 Erklärungen und 47 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung von erläuternden Beispielen und Uebungsaufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Hovestadt.** Preis: M. 7. —.

Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie. Erster Band: Die Metalloide. Mit 2208 Erklärungen, 332 Experimenten und 366 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Wilh. Steffen.** Preis: M. 16. —.

do. do. Anorganische Experimental-Chemie. Zweiter Band: Die Metalle. Mit 573 Erklärungen, 174 Experimenten und 33 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **W. Steffen.** Preis: M. 16. —.

Im gleichen Verlag sind ferner erschienen:

Vierstellige logarithmische Tafeln der natürlichen und trigonometrischen Zahlen nebst den erforderlichen Hilfstabellen. Für den Schulgebrauch und die allgemeine Praxis bearbeitet von **E. R. Müller.** Preis: kartoniert 60 Pfg.

Das Zeichnen der Stereometrie. Als Vorschule zur darstellenden Geometrie und zum Fachzeichnen für Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. 28 Tafeln mit Text. Von Prof. **A. Brude.** Preis: M. 6. —.

Vorlegeblätter für den Unterricht im Linear- und Projektionszeichnen. Zum Gebrauche an Realschulen, höheren Bürgerschulen, gewerblichen Fortbildungsschulen, Gewerbe- und Handwerkerschulen u. s. w. 12 Tafeln mit erläuterndem Text. Entworfen und gezeichnet von **J. Vonderlinn,** Ingenieur, Lehrer an der Kgl. Oberreal- und Baugewerkschule, sowie an der Sonntags- und Abendschule für Handwerker zu Breslau. Preis: In Mappe M. 5. 50.

Darstellende Geometrie für Bauhandwerker. Erster Teil: **Geometrische Konstruktionen, Elemente der Projektionslehre, Konstruktion der Durchdringungen zwischen Ebenen und Körpern, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie, einfache Dachausmittelungen.** Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Mit 258 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Preis: broschiert M. 3. —., gebunden M. 3. 30.

do. do. Zweiter Teil: **Schattenlehre, Verteilung des Lichtes auf der Oberfläche eines Körpers, Schiftung bei Dächern, Windschiefe Dächer, Darstellung eines Treppenkrümmlings, Steinschnitt, Centralperspektive.** Anhang: **Bildliche Darstellung der Beleuchtung auf Körpern.** Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Mit 217 Fig. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Preis: M. 3. —., geb. M. 3. 30.

Statik für Bauhandwerker. Ein Lehrbuch für den Unterricht an Baugewerkschulen, sowie zum Selbstunterricht. Mit 141 Uebungsaufgaben und 324 Figuren, nebst einem Anhang von Tabellen. Bearbeitet von **J. Vonderlinn,** staatlich geprüfter Ingenieur. Preis: M. 3. —., geb. M. 3. 30.

Die Nautik in elementarer Behandlung. Einführung in die Schiffahrtkunde. Zur Förderung des Verständnisses der Schiffahrt in weiteren Kreisen, sowie zum Unterricht an Lehranstalten. Mit 90 vollständig gelösten Beispielen, 260 analogen ungelösten Aufgaben mit den Ergebnissen, nebst [illegible] Figuren, sowie Erklärung der Kunstausdrücke der Seemannssprache. Bearbeitet von **Dr. F. Bolte,** Oberlehrer an der Navigationschule in Hamburg. Preis: broschiert M. 5. —., in Schuleinband M. 5. 40., in Leinwand gebunden M. 6. —.





QA Sachs, J.
471 Lehrbuch der projektivischen
S22 (neuren) Geometrie
T.2

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

